A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VI. KÖTET

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956

A VI. KÖTET TARTALOMJEGYZÉKE

1. SZÁM

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍRE

A III. OSZTÁLY HÍREI

2. SZÁM

KÖNYVISMERTETÉSEK

A III. OSZTÁLY HÍREI

3—4. SZÁM

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor

Szegedi Nyomda Vállalat 56-2962 — Felelős vezető: Gabnai János

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VI. KÖTET 1. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VI. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

KÖZVETLEN BIZONYÍTÁS AZ ELDÖNTÉSPROBLÉMÁNAK ÁLTALÁNOS REKURZÍV ALGORITMUSSAL VALÓ MEGOLDHATATLANSÁGÁRA[1]

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Előadta az 1955. december 16-án tartott felolvasó ülésen

1. Eldöntésproblémán ebben a dolgozatban a szűkebb logikai függvénykalkulus eldöntésproblémáját[2] értem. Ez a probléma olyan eljárás keresésében áll, amelynek segítségével bármely adott (a szűkebb logikai függvénykalkulus értelmében vett) logikai formuláról[3] véges számú lépésben el lehet dönteni, vajon kielégíthető-e.

A logikai formulák halmaza, mint ismeretes és könnyen látható, megszámlálható. Tekintsük a logikai formulák valamely

$$(1) \qquad A_0, A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$$

megszámlálását. Minden ilyen megszámláláshoz hozzárendelhetjük a következőképpen definiált aritmetikai függvényt[4], amelyet az eldöntésproblémának a kérdéses megszámláláshoz tartozó karakterisztikus függvényének nevezhetünk:

$$\chi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{ha az } A_\nu \text{ formula kielégíthető,} \\ 1, & \text{ha az } A_\nu \text{ formula nem elégíthető ki.} \end{cases}$$

Világos, hogy annak eldöntése, hogy az A_ν formula kielégíthető-e, ekvivalens a $\chi(\nu)$ függvényérték kiszámításával, ennélfogva, amennyiben az (1) megszámlálás effektív, vagyis olyan, hogy bármely A logikai formulához véges számú lépésben meg tudjuk találni azt a ν sorszámot, amelyre $A = A_\nu$ és

[1] 1954. november 22-én a berlini Humboldt-Egyetem matematikai kollokviumán tartott előadás részletes kidolgozása. Német nyelvű változata a berlini *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* c. folyóiratban jelenik meg.

[2] Az eldöntésprobléma mibenlétére és jelentőségére nézve lásd pl. a szerző [1] dolgozatának bevezető részét (163—169. oldal), vagy Surányi János [1] dolgozatának **1—3.** fejezetét (180—186. oldal); ezekből a jelen dolgozatban felhasznált matematikai logikai fogalmakat is meg lehet ismerni. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a jelen dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

[3] Logikai formulán ebben a dolgozatban mindig a szűkebb logikai függvénykalkulus értelmében vett formulát értünk; megengedjük, hogy az azonosság-reláció is előforduljon a formulában.

[4] Aritmetikai függvényen olyan függvényt értünk, amelynek független változója (vagy ha többváltozós függvényről van szó, mindegyik független változója) a természetes számokon fut át és értékei is természetes számok. Természetes számon ebben a dolgozatban nemnegatív egész számot értünk.

viszont, bármely ν természetes számhoz meg tudjuk találni az A_ν formulát, akkor az eldöntésprobléma ekvivalens olyan eljárás keresésével, amelynek segítségével a χ függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani.

Az olyan aritmetikai függvényeket, amelyekhez van olyan eljárás, amelynek segítségével a függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, kiszámítható függvényeknek nevezzük. Egy CHURCH-féle hipotézis szerint[5] a kiszámítható függvények osztálya azonos az általános rekurzív függvények osztályával[6]. Ez a hipotézis — amennyiben az „eljárás" fogalmát a legáltalánosabb, tehát nem valamilyen matematikai definíció segítségével szabatosan elhatárolt és egyben leszűkített értelemben értjük[7] — ismeretelméleti jellegű. Itt nem megyek bele annak a kérdésnek a tárgyalásába, mennyiben fogadható el CHURCH e hipotézise, csak megemlítem, hogy vele szemben alapos (természetesen filozófiai) érveket lehet felhozni[8].

Már most CHURCH bebizonyította[9], hogy az eldöntésproblémának a logikai formulák szokásos (effektív) megszámlálásához tartozó karakterisztikus függvénye nem tartozik az általános rekurzív függvények osztályába. CHURCH e tételét gyakran úgy fogalmazzák, hogy az eldöntésprobléma megoldhatatlan. E fogalmazás az említett CHURCH-féle hipotézisen alapul; maga a tétel azonban független a CHURCH-féle hipotézistől, és azt mondja ki, hogy az eldöntés-

[5] CHURCH [1], 356. oldal. — CHURCH definíció alakjába öltözteti ezt a hipotézist; azonban már az a tény is, hogy felveti azt a kérdést, mennyiben fedi definíciója a definiált fogalom (a kiszámítható függvény fogalma) „intuitív" tartalmát, mutatja, hogy valójában hipotézisről van szó.

[6] Az általános rekurzív függvény fogalmát illetően lásd KLEENE [1] dolgozatát, vagy magyarul PÉTER RÓZSA [1] művének 130—131. oldalát, vagy pedig a szerző [2] dolgozatának 1. pontját (103—113. oldal). Maga az általános rekurzív függvény definíciója a jelen dolgozatban is elő fog fordulni.

[7] Az eljárás (algoritmus), nevezetesen valamely aritmetikai függvénynek (természetes számokból álló sorozatnak) bármely adott helyen felvett értékének (adott indexű tagjának) kiszámítására szolgáló eljárás fogalmának szabatos elhatárolására számos definíciót javasoltak (lásd pl. CHURCH [1], 356—358. oldal; TURING [1], 232—233. oldal; MARKOV [1]); ha a kiszámítható függvény fogalmában eljáráson e definíciók bármelyike által szabatosan elhatárolt eljárás-fogalmat értjük, akkor CHURCH hipotézise bebizonyítható tétellé válik (lásd KLEENE [2], TURING [2], ill. GYETLOVSZ [1]). Azonban az eljárás ilyenféle elhatárolt fogalma esetén már nem evidens (hanem ismét csak ismeretelméleti jellegű hipotézis), hogy az eldöntésprobléma ekvivalens olyan, az *elhatárolt értelemben vett* eljárás keresésével, amelynek segítségével az eldöntésproblémának a logikai formulák valamely effektív megszámlálásához tartozó karakterisztikus függvényének értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani.

[8] Lásd a szerző [2] dolgozatának 125. oldalán a [30] jegyzetet. Erre a kérdésre még máshol vissza szándékozom térni.

[9] CHURCH [2] és [3].

probléma *bizonyos fajta* eljárással nem oldható meg, ti. olyannal, amely a következő alakú (vagy ilyen alakra hozható). Adva van egy egyváltozós φ általános rekurzív függvény; és az eljárásnak valamely A_ν logikai formulára való alkalmazása abban áll (vagy azzal ekvivalens), hogy kiszámítjuk a φ függvény értékét a ν helyen. Ha azt találjuk, hogy $\varphi(\nu) = 0$, akkor az eljárás arra az eredményre vezet, hogy az A_ν formula kielégíthető; ha pedig $\varphi(\nu) \neq 0$, akkor az eljárás arra az eredményre vezet, hogy az A_ν formula nem elégíthető ki. Az ilyen eljárást *általános rekurzív algoritmusnak* nevezzük[10]; eszerint CHURCH tétele azt mondja ki, hogy az eldöntésprobléma nem oldható meg általános rekurzív algoritmussal. CHURCH tételének jelentőségét az mutatja, hogy mindazok az eljárások, amelyek segítségével az eldöntésprobléma bizonyos speciális eseteit sikerült megoldani, általános rekurzív algoritmusnak bizonyulnak.

CHURCH tételének eddig közzétett bizonyításai[11], tudomásom szerint, valamennyien a következő alakúak. Mindenekelőtt egy másik P problémaseregről[12] mutatjuk meg, hogy nem oldható meg általános rekurzív algoritmussal[12]; majd a P problémasereget „általános rekurzív módon", vagyis olyan redukciós eljárás segítségével vezetjük vissza az eldöntésproblémára, amely azt mutatja, hogy ha az eldöntésprobléma megoldható általános rekurzív algoritmussal, akkor a P problémasereg is megoldható volna ilyen algoritmussal. Éppen ezért ezeknek a bizonyításoknak megértéséhez nemcsak a szűkebb logikai függvénykalkulusnak, valamint az általános rekurzív függvények elméletének alapfogalmait kell ismerni, amelyekre már a CHURCH-tétel kimondásához is szükség van, hanem, legalábbis részben, azt a diszciplínát is, amelyhez

[10] Általánosabban, legyen adva egy megszámlálható problémasereg, vagyis egy, megszámlálható sok értéket felvevő, paramétertől függő olyan problémák összessége, amelyek mindegyikére „igen" vagy „nem" választ várunk. (Ilyen megszámlálható problémasereg az eldöntésprobléma is; a paraméter az a logikai formula, amelyről el akarjuk dönteni, kielégíthető-e, vagy nem.) Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a paraméter a természetes számokon fut át; tehát a problémasereg problémái egy

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

sorozatot alkotnak. Mármost e problémasereg megoldására szolgáló általános rekurzív algoritmuson olyan eljárást értünk, amely a következő alakú (vagy ilyen alakra hozható). Adva van egy egyváltozós φ általános rekurzív függvény; az eljárás a P_ν problémára aszerint adja azt a választ, hogy „igen" vagy „nem", hogy a $\varphi(\nu)$ függvényérték 0-e, vagy 0-tól különböző szám-e. Könnyen látható, hogy a problémasereg akkor és csak akkor oldható meg általános rekurzív algoritmussal, ha karakterisztikus függvénye, vagyis a következőképpen definiált aritmetikai függvény általános rekurzív függvény:

$$\chi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{ha a } P_\nu \text{ problémára a helyes válasz: „igen"}, \\ 1, & \text{ha a } P_\nu \text{ problémára a helyes válasz: „nem"}. \end{cases}$$

[11] Lásd CHURCH [2], [3]; TURING [1], különösen 259—263. oldal, továbbá [3].

[12] Lásd a [10] jegyzetet.

a kérdéses P problémasereg problémái tartoznak. A jelen dolgozatban közvetlen, vagyis olyan bizonyítását adom az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára vonatkozó CHURCH-féle tételnek, amely elkerüli az ilyen P problémaseregen át vezető kerülő utat s ennélfogva a szűkebb logikai függvénykalkulusnak és az általános rekurzív függvények elméletének elemein kívül további előismeretet nem tételez fel[13]. Ezenkívül még az az előnye is megvan a jelen dolgozatban adott bizonyításnak, hogy világosabban megmutatja azoknak, a logikai formulák (1) megszámlálására vonatkozó, feltételeknek pontos alakját, amelyek elegendők a tétel érvényességéhez[14].

2. A CHURCH-tétel bizonyításához természetesen szükségünk lesz az általános rekurzív függvény fogalmára, valamint bizonyos, e fogalom definíciójához felhasznált fogalmakra. E fogalmak definíciója megtalálható a szerző [2] dolgozatának 1. pontjában (103—113. oldal). E dolgozat említett részét ismertnek teszem fel; azonban a CHURCH-tétel bizonyítása szempontjából célszerű lesz e dolgozat jelöléseit némileg megváltoztatni és bizonyos, ott nem teljesen rögzített jelöléseket rögzíteni.

Az egyik változtatás az, hogy az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló egyenletrendszerek felírására csupa *félkövér* betűt és egyéb jelet (zárójelet, vesszőt, 0 számjegyet, egyenlőség-jelet) használunk. Ezáltal, valamint annak folytán, hogy természetes számokat egyébként mindig csak görög kisbetűvel jelölünk[15], a közönséges (sovány) kurzív latin kisbetűk felszabadulnak a kifejezések (vagy másféle jelsorozatok) jelölésére (eszerint a kifejezéseket nem jelöljük kurzív nagybetűvel, mint az említett dolgozatban).

[13] A feltételezett előismeretek megtalálhatók pl. a szerző [1] dolgozatának bevezető részében (163—169. oldal), valamint [2] dolgozatának 1. pontjában (103—113. oldal).

[14] Az, hogy egy problémasereg megoldható-e általános rekurzív algoritmussal vagy nem, függ attól, milyen sorrendben rendezzük a hozzátartozó problémákat; így az is, hogy az eldöntésprobléma megoldható-e általános rekurzív algoritmussal, függ a logikai formulák (1) megszámlálásától. Így pl., ha a logikai formulákat úgy számláljuk meg, hogy páros indexet kapjanak a kielégíthető, páratlant a ki nem elégíthető formulák, akkor az A_ν formula akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $\varphi(\nu) = 0$, ahol a φ függvény, amely a következőképpen van definiálva:

$$\varphi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \nu \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } \nu \text{ páratlan,} \end{cases}$$

mint könnyen látható, általános rekurzív függvény. Azonban ilyen *effektív* megszámlálást — legalább is addig, amíg meg nem oldjuk az eldöntésproblémát — nem tudunk megadni. — A CHURCH-tétel pontos kimondásában valójában nem az összes, hanem csak a zárt, azaz szabad változót nem tartalmazó logikai formulák megszámlálására vonatkozó feltétel szerepel majd; ugyanis az eldöntésprobléma, mint ismeretes és könnyen látható, ekvivalens olyan eljárás keresésével, amelynek segítségével bármely adott *zárt* formuláról el lehet dönteni, vajon kielégíthető-e.

[15] Görög kisbetűkkel, mégpedig a ζ, η, ϑ, ξ, φ, χ, ψ, ω betűkkel jelölünk majd bizonyos matematikai függvényeket is (aritmetikai függvényeket, vagy olyan függvényeket, ame-

Ez azért célszerű, mert a kifejezések később majd egy I individuumtartomány elemeiként szerepelnek; márpedig az individuumtartomány elemeit kurzív latin kisbetűkkel szokás jelölni. Hasonlóan, kurzív latin kisbetűkkel jelöljük majd egy másik I' individuumtartomány elemeit is[16].

A másik változtatás az, hogy ebben a dolgozatban azt a (rekurzív függvények elméletében kitüntetett) függvényt is funktorral, nevezetesen az $\mathbf{f}_1$ funktorral jelöljük, amely a tetszőleges ν helyen a $\nu+1$ értéket veszi fel (ν a természetes számokon fut át). Ily módon a ′ jelölés, amely a szerző [2] dolgozatában e függvényt jelölte, felszabadul a szokásos (megkülönböztető jelként való) használatra és a kifejezés fogalmának definíciója is egyöntetűbben mondható ki (a szerző [2] dolgozatában a ′ jellel is, funktorokkal is képeztünk kifejezés(ek)ből új kifejezést); ez az előny kárpótol bennünket azért a hátrányért, hogy egyenletrendszerekben $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ helyett a nehézkesebb $\mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}))), \ldots$ kifejezéseket kell a $0, 1, 2, 3, \ldots$ természetes számok jelölésére használnunk.

A harmadik változtatás az, hogy szigorúbban rögzítjük, mely betűket használunk számváltozóként vagy funktorként. Valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló egyenletrendszerben szereplő számváltozóként mindig a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$, funktorként pedig mindig az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ betűket használjuk. Itt tehát α és β egyenletrendszerről egyenletrendszerre változó természetes számok (az egyenletrendszerben szereplő számváltozók, ill. funktorok száma, de választhatunk ezeknél nagyobb számokat is α és β gyanánt, hiszen nem kötjük ki, hogy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ és $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ mind szerepeljenek az egyenletrendszerben). Mint mondtuk, az $\mathbf{f}_1$ funktor mindig az $\mathbf{f}_1(\nu) = \nu+1$ függvényt jelöli; az $\mathbf{f}_2$ funktort pedig mindig az egyenletrendszer által definiálandó általános rekurzív függvény jelölésére használjuk[17].

lyeknek (mindegyik) független változója természetes számokon fut át ugyan és értékei is természetes számok, de amelyek nincsenek minden helyen értelmezve; továbbá olyan függvényeket, amelyeknek (mindegyik) független változója valamelyik individuumtartomány elemein fut át és értékei is ezen, vagy másik individuumtartomány elemei). A többi görög kisbetűvel mindig természetes számot jelölünk. (Amikor arról beszélünk, milyen fogalmak jelölésére használunk valamilyen betűt, ezt mindig úgy értjük, hogy akár index nélkül, akár indexszel, egy vagy több vesszővel szerepel, mindig ilyen fogalmat jelölünk vele.)

[16] Az I vagy I' halmazon értelmezett logikai függvényeket görög nagybetűkkel jelöljük; egyes latin nagybetűket, nevezetesen az F, G, H és T betűket logikai függvényváltozók, vagyis olyan változók jelölésére használjuk, amelyek (az I vagy az I' halmazon értelmezett) logikai függvényeken futnak át. A többi latin nagybetűket különböző fogalmak jelölésére használjuk; pl. I, mint már mondottuk, individuumtartományt jelöl; P-vel pedig fentebb valamely problémasereget jelöltünk.

[17] Ez a jelölésrögzítés nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen szükség esetén jelölésváltoztatással mindig elérhető, hogy az egyenletrendszer által definiált függvényt jelöljük az $\mathbf{f}_2$ funktorral.

Egy-egy egyenletrendszer felírása esetén rögzíteni kell a benne szereplő $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ funktorok argumentumszámát, vagyis az általuk jelölt aritmetikai függvények független változóinak számát is; legyenek ezek rendre $\varrho_1, \ldots, \varrho_\beta$. Itt ϱ_1 mindig 1, hiszen $\mathbf{f}_1$ egyváltozós függvényt jelöl; ϱ_2 azonban egyenletrendszerről egyenletrendszerre változik, hiszen mindig az egyenletrendszerrel definiált általános rekurzív függvény független változóinak számával egyenlő. Hasonlóan, azt is megengedjük, hogy $\varrho_3, \ldots, \varrho_\beta$ is egyenletrendszerről egyenletrendszerre változzanak.

Az a körülmény, hogy $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ nem egyszer s mindenkorra rögzített számok, változást tesz szükségessé a kifejezés fogalmának definíciójában, hiszen pl. $\mathbf{f}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ nyilván akkor és csak akkor kifejezés, ha $\varrho_2 = 2$. Világos e példából, hogy az, hogy milyen jelsorozatokat nevezünk kifejezéseknek, függ a $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától. Ez a körülmény nem okoz nehézséget, hiszen amikor valamely adott E egyenletrendszerről beszélünk, a $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számokat is adottaknak tekinthetjük[18].

Célszerű lesz némileg módosítani a triviális következmény fogalmát is. Ahelyett, hogy valamely v számváltozó (azaz a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ jelek valamelyike) helyébe tetszőleges számnak (pontosabban: a $\mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \ldots$ kifejezések bármelyikének) helyettesítését engednők meg (ezt a műveletet neveztük a szerző [2] dolgozatában specializálásnak), mindössze kétféle helyettesítést engedünk

[18] Eszerint az, amit a jelen dolgozatban kifejezésnek nevezünk, nem fedi pontosan a szerző [2] dolgozatában szereplő kifejezés-fogalmat, hanem az olyan kifejezés fogalmának felel meg, amelyben nem szerepel sem más számváltozó, sem pedig más funktor, mint az adott E egyenletrendszerben szereplő $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ számváltozók és sorra $\varrho_1 = 1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ argumentumszámú $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ funktorok. (Ez a fogalom, és vele együtt az egyenletnek és egyenletrendszernek a jelen dolgozatban használt fogalma is, függ az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától.) Ez a „relatív" kifejezés-fogalom elegendő akkor is, ha az E egyenletrendszernek a szerző a [2] dolgozatában definiált értelemben vett triviális következményeit vizsgáljuk, hiszen ezekben sem szerepelhet más számváltozó, mint $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\beta$, sem pedig más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$. Ugyanis azok a műveletek (a „specializálás" és az „alkalmazás"), amelyek ismételt végrehajtása segítségével az E egyenletrendszer egyenleteiből az E egyenletrendszer triviális következményeit megkaphatjuk, olyanok, hogy egyikük sem vezet olyan egyenlethez, amely „új" számváltozót, vagy „új", $\mathbf{f}_1$-től különböző funktort tartalmaz.

Az a körülmény, hogy az egyenletrendszer fogalma függ az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától, ezek pedig attól az egyenletrendszertől, amelyet (triviális következményeivel együtt) vizsgálni akarunk, csak látszólag jelent circulus vitiosust. Valójában az a helyzet, hogy ha egy, a szerző [2] dolgozata értelmében vett, E egyenletrendszert akarunk vizsgálni, akkor az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számokat úgy kell választanunk, hogy E, megfelelő jelölésváltozás után, egyenletrendszer legyen a jelen dolgozatban használt, az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok e választásához tartozó, értelemben. (Pl. α gyanánt az E egyenletrendszerben szereplő számváltozók számát, β gyanánt a benne szereplő funktorok számát választhatjuk (a $'$ jelet is beleértve), $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ gyanánt pedig sorra e funktoroknak az E egyenletrendszerből leolvasható argumentumszámát.)

meg: v helyébe a $\mathbf{0}$, vagy az $\mathbf{f}_1(v)$ kifejezés helyettesítését. Könnyen látható, hogy ez az, egyébként KLEENEtől származó[19] módosítás változatlanul hagyja az általános rekurzív függvény fogalmát[20].

3. Hogy az említett jelölésváltozások és a velük kapcsolatos további módosítások ne nehezítsék meg a jelen dolgozat olvasását, röviden elismétlem — e módosításokat alkalmazva — az általános rekurzív függvény fogalmának definícióját, a hozzá szükséges fogalmak definíciójával együtt[21]. Ez utóbbiak között olyan fogalmak is szerepelnek, a megfelelő jelölésekkel együtt, amelyek a szerző [2] dolgozatában nem fordulnak elő, de amelyek megkönnyítik az általános rekurzív függvény fogalmának definícióját és majd a továbbiak szempontjából is célszerűnek bizonyulnak; ezeket a fogalmakat könnyebb érthetőség kedvéért példákkal illusztrálom.

Legyenek α, β, továbbá $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ adott pozitív egész számok; a jelen **3.** pontban definiálandó fogalmak, az általános rekurzív függvény fogalmát kivéve, mind e számok választásától függnek. Legyen továbbá $\varrho_1 = 1$.

Jelsorozaton olyan véges sorozatot értünk, amelynek minden tagja az alábbi jelek egyike[22]:

(a) a $\mathbf{0}$ *konstans;*

(b) a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ *számváltozók;*

(c) az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ *funktorok;*

(d) az **(**, **)** és **,** *írásjelek (kezdőzárójel, végzárójel* és *vessző)*;

(e) az $=$ *egyenlőség-jel.*

A $\varrho_1(=1), \ldots, \varrho_\beta$ számokat sorra az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ funktorok *argumentumszámának* nevezzük.

A jelsorozatokat úgy adjuk meg, hogy tagjaikat egymásután írjuk. Pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{0})$ jelsorozat első tagja az $\mathbf{f}_1$ funktor, második tagja a kezdőzárójel, harmadik tagja a $\mathbf{0}$ konstans, negyedik tagja a végzárójel; a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jelsorozat tagjai sorra a kezdőzárójel, a $\mathbf{v}_1$ számváltozó, a vessző, a $\mathbf{v}_2$ számváltozó, a vessző, a $\mathbf{v}_3$ számváltozó és a végzárójel (nem pedig a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ számváltozók). Az egytagú jelsorozatokat azonosaknak tekintjük egyetlen tagjukkal.

[19] Lásd KLEENE [1], 731. oldal (utolsó két bekezdés).

[20] Ez a tény azon alapul, hogy valamely v számváltozó helyébe pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})))$ kifejezést helyettesíteni úgy is lehet, hogy v helyébe előbb háromszor egymásután az $\mathbf{f}_1(v)$ kifejezést helyettesítjük (ezáltal először az $\mathbf{f}_1(v)$, majd az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(v))$, majd az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(v)))$ kifejezés kerül mindenhova, ahol eredetileg v állott), majd végül a $\mathbf{0}$ kifejezést helyettesítjük v helyébe; és hasonló áll az $\mathbf{f}_1(\mathbf{0})$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \ldots$ kifejezések bármelyikére.

[21] A rövidséghez az is hozzátartozik, hogy nem ismétlem el azokat a megjegyzéseket, amelyek az egyes fogalmak jelentésének megvilágítására szolgálnak; ezek megtalálhatók a szerző [2] dolgozatában.

[22] Az alábbi felsorolásban dőlt írással megadjuk azokat a neveket, amiken az egyes jeleket vagy jelfajtákat a továbbiakban említeni fogjuk.

Tetszőleges jelsorozatokat kurzív latin kisbetűvel jelölünk. Néha úgy adunk meg egy jelsorozatot, hogy vegyesen írunk egymásután jelsorozatokat jelölő latin kisbetűket és a fenti jelek közül egyeseket. Ilyenkor természetesen azt a jelsorozatot értjük, amely úgy jön létre, hogy a latin kisbetűket azokkal a jelsorozatokkal pótoljuk, amelyeket jelölnek. Pl. ha k az $\mathfrak{f}_1(0)$, l pedig az $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0))$ jelsorozatot jelöli, akkor $\mathfrak{f}_2(k, l)$-en az $\mathfrak{f}_2(\mathfrak{f}_1(0), \mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0)))$ jelsorozatot értjük.

Bizonyos jelsorozatokat *kifejezéseknek* nevezünk; mégpedig

(a) a 0 konstans kifejezés;

(b) a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ számváltozók kifejezések;

(c) ha $\lambda = 1, \ldots, \beta$, továbbá $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések, akkor az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ jelsorozat[23] is kifejezés;

(d) más jelsorozat nem kifejezés[24].

Világos, hogy a $0, \mathfrak{f}_1(0), \mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0)), \mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0))), \ldots$ jelsorozatok mind kifejezések; ezeket a kifejezéseket *számkifejezéseknek* nevezzük és sorra s_0-val, s_1-gyel, s_2-vel, s_3-mal, ... is jelöljük.

Egyenleten tetszőleges $k = l$ alakú jelsorozatot értünk, ahol k és l kifejezések; *egyenletrendszeren* pedig olyan véges halmazt, amelynek elemei egyenletek.

Legyen k és l két kifejezés, v pedig egy számváltozó. Azt a jelsorozatot, amely úgy keletkezik a k jelsorozatból, hogy minden olyan tagja helyébe, amely v-vel azonos, az l jelsorozatot helyettesítjük, így jelöljük: $k(v/l)$. Könnyű látni, hogy $k(v/l)$ is mindig kifejezés. Pl. ha $k = \mathfrak{f}_\lambda(\mathbf{v}_1, 0, \mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_1))$ (ahol $\varrho_\lambda = 3$), akkor $k(\mathbf{v}_1/\mathfrak{f}_1(0)) = \mathfrak{f}_\lambda(\mathfrak{f}_1(0), 0, \mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0)))$.

Egy l kifejezést valamely k kifejezés *részének* nevezzük, ha a k jelsorozat bizonyos közvetlenül egymásután következő tagjai sorra az l jelsorozat tagjaival azonosak. Pl. az $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0))$ számkifejezés része az $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_1(0)))$ számkifejezésnek, mert ez utóbbinak harmadik, negyedik, ötödik, hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik tagja sorra azonos az előbbinek egymásután következő tagjaival.

Ha az l kifejezés része a k kifejezésnek, akkor a k jelsorozat tetszőleges olyan, közvetlenül egymásután következő tagjainak sorozatát, amelyek sorra azonosak az l jelsorozat tagjaival, azt is beleértve, hogy a k jelsorozat mely tagjai alkotják ezt a sorozatot, az l kifejezés egy *előfordulásának* nevezzük a k kife-

[23] Vagyis $\varrho_\lambda = 1$ esetén az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1)$, $\varrho_\lambda = 2$ esetén az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, k_2)$, $\varrho_\lambda = 3$ esetén az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, k_2, k_3)$ jelsorozat stb.

[24] Más szóval a kifejezések halmaza mindazon jelsorozathalmazok metszete, amelyeknek a 0 konstans és a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ számváltozók elemei, továbbá amelyeknek $\lambda = 1, \ldots, \beta$ esetén a $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ jelsorozatokkal együtt az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ jelsorozat is eleme. A definíció fenti fogalmazására nézve lásd a szerző [2] dolgozatának 105. oldalán a [6] jegyzetet.

jezésben. Pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0))$ kifejezésnek csak egy előfordulása van az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0)))$ kifejezésben (csak egyszer fordul elő benne); az $\mathbf{f}_\lambda(\underline{\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0))}, 0, \mathbf{f}_1(\underline{\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0))}))$ kifejezésben (ahol $\varrho_\lambda = 3$) azonban két előfordulása van (kétszer fordul elő benne, ti. az aláhúzott helyeken).

Legyen k, l, m három kifejezés. Azoknak a jelsorozatoknak a halmazát, amelyek a k jelsorozatból úgy keletkeznek, hogy kijelöljük az l kifejezésnek tetszőleges számú előfordulását a k kifejezésben (esetleg egyet sem, esetleg mindet, általában azonban csak némelyiket), majd a kijelölt előfordulások mindegyikét az m kifejezéssel pótoljuk, a többi esetleges előfordulását pedig változatlanul hagyjuk, így jelöljük: $k(l//m)$. Pl. ha $k = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_\mu(0, 0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\mu(0, 0)))$ (ahol $\varrho_\lambda = 3, \varrho_\mu = 2$), $l = \mathbf{f}_\mu(0, 0)$, $m = \mathbf{f}_1(0)$, akkor a $k(l//m)$ halmaz a következő négy elemből áll: $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_\mu(0, 0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\mu(0, 0)))$ (vagyis k maga; úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *egyik előfordulását sem* pótoljuk m-mel); $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_1(0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\mu(0, 0)))$ (úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *első előfordulását* pótoljuk m-mel); $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_\mu(0, 0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0)))$ (úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *második előfordulását* pótoljuk m-mel); végül $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_1(0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0)))$ (úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *mindkét előfordulását* m-mel pótoljuk). Maga k mindig eleme a $k(l//m)$ halmaznak; ha l nem része k-nak, akkor a $k(l//m)$ halmaz egyedül a k elemből áll. Ha $l = m$, akkor a $k(l//m)$ halmaz szintén egyedül a k elemből áll (mert l akárhány előfordulását pótoljuk m-mel, vagyis l-lel, k mindig változatlanul marad); ha azonban $l \neq m$, akkor, mint könnyű látni, a $k(l//m)$ halmaz elemeinek száma 2^ν, ahol ν az l kifejezés előfordulásainak száma k-ban. Azt is könnyű látni, hogy a $k(l//m)$ halmaz elemei mindig valamenynyien kifejezések [25].

Legyen mármost adva egy E egyenletrendszer. Bizonyos egyenleteket az E egyenletrendszer (triviális [26]) *következményeinek* nevezünk, mégpedig

(a) az E egyenletrendszer egyenletei következményei E-nek;

(b) valahányszor a $k = l$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek (k és l kifejezések), továbbá v valamely számváltozó, mindannyiszor a $k(v/0) = l(v/0)$ és $k(v/\mathbf{f}_1(v)) = l(v/\mathbf{f}_1(v))$ egyenletek is következményei E-nek;

[25] A $k(v/l)$ jelsorozatot és a $k(l//m)$ jelsorozat-halmazt (a jelsorozat részének, valamint az l jelsorozatnak a k jelsorozatban való előfordulásának fogalmával együtt) tetszőleges k és l, ill. k, l és m jelsorozatok (nemcsak kifejezések) esetén lehet definiálni; ebben az általános esetben természetesen $k(v/l)$ nem mindig kifejezés és $k(l//m)$ elemei sem mindig azok. (A $k(l//m)$ halmaz definíciójában némi bonyodalmat okoz az, hogy ebben az általános esetben l egyes előfordulásai k-ban „egymásba nyúlhatnak", ami olyankor, amikor k és l kifejezések, mint könnyen látható, nem lehetséges.) Azonban erre az általánosításra nem lesz szükségünk.

[26] A szerző [2] dolgozatában azért volt szükség a *triviális* jelzőre, mert az egyenletrendszer más, általánosabb értelemben vett következményeiről is szó volt; a jelen dolgozatban azonban elhagyjuk ezt a jelzőt, mert másféle következményről nem lesz szó.

(c) valahányszor a $k=l$ és $k'=l'$ egyenletek következményei az E egyenletrendszernek (k, l, k' és l' kifejezések), továbbá $k'' \in k(k'//l')$ és $l'' \in l(k'//l')$, mindannyiszor a $k''=l''$ egyenlet is következménye E-nek;

(d) más egyenlet nem következménye E-nek[27].

Egy E egyenletrendszert (az $\mathfrak{f}_2$ funktorra nézve[28]) *általános rekurzív definíciónak* nevezünk, ha tetszőleges $\nu_1, \ldots, \nu_{\varrho_3}$ természetes számokhoz egy és csak egy olyan ν természetes szám van, amelyre az $\mathfrak{f}_2(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_{\varrho_3}}) = s_\nu$ egyenlet következménye E-nek. Ha E általános rekurzív definíció, akkor azt a ϱ_2 változós φ aritmetikai függvényt, amelynek a $(\nu_1, \ldots, \nu_{\varrho_2})$ helyen felvett $\varphi(\nu_1, \ldots, \nu_{\varrho_2})$ értéke, tetszőleges $\nu_1, \ldots, \nu_{\varrho_2}$ természetes számok esetén, ezzel az egyértelműen meghatározott ν számmal egyenlő, *az E általános rekurzív definíció által definiált függvénynek* nevezzük.

Egy φ aritmetikai függvényt *általános rekurzív függvénynek* nevezünk, ha az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ pozitív egész számok alkalmas választása esetén van olyan E általános rekurzív definíció, hogy φ az E által definiált függvény; minden ilyen E egyenletrendszert a függvény *általános rekurzív definíciójának* nevezünk[29].

4. A továbbiakban az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ pozitív egész számokat adottaknak gondoljuk, tehát nem mondjuk meg mindig külön, ha valami függ tőlük; mégpedig (a [47] jegyzetben szereplő E_2 egyenletrendszer kivételével) legyen mindig $\varrho_2 = 1$.

A CHURCH-tételnek a jelen dolgozatban adandó bizonyítása a következő segédtételen alapul.

SEGÉDTÉTEL. *Bármely E egyenletrendszerhez meg lehet adni olyan (az $\alpha, \beta, \varrho_3, \ldots, \varrho_\beta$ számokon kívül csak E-től függő) $B = B(E)$ zárt logikai formulát, továbbá bármely τ természetes számhoz meg lehet adni olyan (csak τ-tól függő[30]) $C = C(\tau)$ zárt logikai formulát, hogy az (E-től és τ-tól függő)*

[27] Más szóval az E egyenletrendszer következményeinek halmaza mindazon egyenlethalmazok metszete, amelyeknek E minden egyenlete eleme, továbbá bármely $k=l$ egyenlettel együtt minden $k(v/0) = l(v/0)$ és $k(v/\mathfrak{f}_1(v)) = l(v/\mathfrak{f}_1(v))$ alakú egyenlet is eleme, ahol v tetszőleges számváltozó, végül bármely két $k=l$ és $k'=l'$ egyenlettel együtt minden olyan $k''=l''$ egyenlet is eleme, ahol $k'' \in k(k'//l')$ és $l'' \in l(k'//l')$. (Lásd a [24] jegyzetet.)

[28] Hasonlóan lehetne definiálni az $\mathfrak{f}_3, \ldots, \mathfrak{f}_\beta$ funktorok valamelyikére nézve általános rekurzív definíció fogalmát; azonban erre nem lesz szükségünk (hiszen az E egyenletrendszer által definiálandó függvény jelölésére, mint mondtuk, mindig az $\mathfrak{f}_2$ funktort használjuk).

[29] A szerző [2] dolgozatában az a kikötés is szerepelt, hogy az E egyenletrendszer nemcsak az $\mathfrak{f}_2$, hanem a benne szereplő többi ($\mathfrak{f}_1$-től különböző) funktorra nézve is általános rekurzív definíció legyen (lásd a megelőző jegyzetet). Azonban ugyanabban a dolgozatban (a 115. oldalon) megjegyeztük, hogy ez a kikötés nem lényeges.

[30] A $C(\tau)$ formula még az $\alpha, \beta, \varrho_3, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától sem függ.

$A = A(E,\tau) = B(E) \,\&\, C(\tau)$ logikai formula akkor és csak akkor (vagyis az E egyenletrendszer és a τ természetes szám azon és csak azon választásai esetén) elégíthető ki, ha az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek. Mégpedig $C(\tau)$ gyanánt választhatjuk az alábbi (23) *formulát.*

BIZONYÍTÁS. Jelöljük I-vel a kifejezések halmazát. Világos, hogy I megszámlálható halmaz, sőt, az is, hogy van olyan (ismétlés nélküli) $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálása, hogy

(a) $i_0 = \mathbf{0}$, $i_1 = \mathfrak{v}_1, \ldots, i_\alpha = \mathfrak{v}_\alpha$;

(b) az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ kifejezés ($\lambda = 1, \ldots, \beta$; $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ tetszőleges kifejezések) később fordul elő az $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálásban, mint a $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések bármelyike.

Rögzítsük az I halmaz egy ilyen $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálását. Akkor i_μ, $\mu = \alpha+1, \alpha+2, \ldots$ esetén, valamely $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ alakú kifejezés, ahol a λ index is, továbbá a $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések és így ezek sorszámai is az $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálásban, amelyek (b) folytán mind kisebbek, mint μ, egyértelműen meg vannak határozva μ megadása által. Más szóval van olyan ξ egyváltozós függvény, amely az α-nál nagyobb természetes számok halmazán van értelmezve és értékei β-nál nem nagyobb pozitív egész számok, továbbá van olyan η kétváltozós függvény, amely akkor van értelmezve a (μ, ϱ) helyen, ha μ valamely α-nál nagyobb természetes szám, ϱ pedig valamely $\varrho_{\xi(\mu)}$-nél nem nagyobb pozitív egész szám, és értékei természetes számok, hogy $\mu = \alpha+1, \alpha+2, \ldots$ esetén

(2) $$i_\mu = \mathfrak{f}_{\xi(\mu)}(i_{\eta(\mu,1)}, \ldots, i_{\eta(\mu,\varrho_{\xi(\mu)})}),$$

továbbá $\mu = \alpha+1, \alpha+2, \ldots$; $\varrho = 1, \ldots, \varrho_{\xi(\mu)}$ esetén

(3) $$\eta(\mu, \varrho) < \mu.$$

Legyen adva egy E egyenletrendszer; elemei legyenek (mindegy, milyen sorrendben) az

$$i_{\gamma_1} = i_{\delta_1},$$
$$\cdots$$
$$i_{\gamma_\sigma} = i_{\delta_\sigma}$$

egyenletek. Legyen továbbá

$$\varepsilon = \max(\gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_\sigma, \delta_\sigma).$$

Definiáljuk az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ és Θ logikai függvényeket az I halmazon a következőképpen[31].

$$\Omega(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x = \mathbf{0}, \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

[31] Itt $x, y, z, u, x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}$ az I halmaz tetszőleges elemei, vagyis tetszőleges kifejezések; $\uparrow$ az „igaz", $\downarrow$ a „hamis" logikai érték jele.

$\lambda = 1, \ldots, \beta$ esetén

$$\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Psi_0(x, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } y \text{ a } \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\alpha \text{ számváltozók egyike és } z = x(y\,0), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Psi_1(x, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } y \text{ a } \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\alpha \text{ számváltozók egyike és } z = x(y\,\mathfrak{f}_1(y)), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Psi_2(x, y, z, u) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u \in x(y\,z), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Theta(x, y) \begin{cases} \uparrow, & \text{ha az } x = y \text{ egyenlet az } E \text{ egyenletrendszer következménye,} \\ \downarrow & \text{különben.} \end{cases}$$

Akkor az alábbi (4)—(22) formulák $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$; $\varkappa' = 1, \ldots, \alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa$; $\lambda = 1, \ldots, \beta$; $\mu = \alpha + 1, \ldots, \varepsilon$; $\nu = 1, \ldots, \sigma$ esetén az $\uparrow$ logikai értéket veszik fel, ha az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad individuumváltozók helyébe sorra az $i_0, \ldots, i_\varepsilon$ kifejezéseket, a $H, F_1, \ldots, F_\beta, G_0, G_1, G_2$ és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ és Θ logikai függvényeket helyettesítjük, a kvantorokat pedig úgy értjük, hogy változóik az I individuumtartományon futnak át. Minden egyes formula után megadjuk annak rövid indokolását, miért van ez így[32].

$$(4) \qquad H(u_0).$$

Valóban, az Ω logikai függvény definíciója folytán $\Omega(i_0) = \Omega(0) = \uparrow$.

$$(5) \qquad F_{\xi(\mu)}(u_{\eta(\mu,1)}, \ldots, u_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}, u_\mu).$$

Valóban, a $\Phi_{\xi(\mu)}$ logikai függvény definíciója folytán, (2) miatt, $\Phi_{\xi(\mu)}(i_{\eta(\mu,1)}, \ldots, i_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}, i_\mu) = \uparrow$.

$$(6) \qquad (x_1) \ldots (x_{\varrho_\lambda})(Ex)F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x).$$

Valóban, a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán tetszőleges $x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekhez van olyan x kifejezés, ti. $x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda})$, hogy $\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) = \uparrow$.

$$(7) \qquad (x_1) \ldots (x_{\varrho_\lambda})(x)(y)((F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) \,\&\, F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, y)) \rightarrow x = y).$$

[32] Az indokolásból látszik, hogy a (4) és (5) formulák bizonyos értelemben az $i_0, i_1, \ldots$ sorozat képzésmódját, a (6) és (7) formulák a kifejezéseknek egymásból való képzésmódját, a (8)—(11) formulák a 0 kifejezés helyettesítését valamely $\mathfrak{v}_\varkappa$ számváltozó helyébe, a (12)—(15) formulák az $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{v}_\varkappa)$ kifejezés helyettesítését $\mathfrak{v}_\varkappa$ helyébe, a (16)—(18) formulák valamely egyenlet „alkalmazását" (baloldalának egy másik egyenlet bal- és jobboldalán való bizonyos számú előfordulásának jobboldalával való pótlását), a (19)—(22) formulák pedig az E egyenletrendszer következményeinek képzésmódját „axiómatizálják". Az indokolás egyelőre csak azt mutatja, hogy az „axiómákat" kielégíti az „alapfogalmak" (ti. a bennük előforduló logikai függvényváltozók) e választása; a bizonyítás második fele azt is mutatja majd, hogy ezek az „axiómák" bizonyos értelemben „teljes axiómarendszert" alkotnak. — A (7) formulában $x = y$ természetesen az azonossági-relációt jelöli.

Valóban, ha $\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) = \Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, y) = \uparrow$ ($x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}$, x és y kifejezések), akkor a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}) = y$.

(8) $$G_0(u_0, u_\varkappa, u_0).$$

Valóban, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(i_0, i_\varkappa, i_0) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_0(i_\varkappa/0) = 0(\mathbf{v}_\varkappa/0) = 0 = i_0$.

(9) $$G_0(u_\varkappa, u_\varkappa, u_0).$$

Valóban, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(i_\varkappa, i_\varkappa, i_0) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_\varkappa(i_\varkappa/0) = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/0) = 0 = i_0$.

(10) $$G_0(u_{\varkappa'}, u_\varkappa, u_{\varkappa'}).$$

Valóban, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(i_{\varkappa'}, i_\varkappa, i_{\varkappa'}) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_{\varkappa'}(i_\varkappa/0) = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/0) = \mathbf{v}_{\varkappa'} = i_{\varkappa'}$.

(11) $$(x_1)\ldots(x_{\varrho_\lambda})(x)(y_1)\ldots(y_{\varrho_\lambda})(y)\Big((F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x)\,\&$$
$$\&\prod_{\varrho=1}^{\varrho_\lambda} G_0(x_\varrho, u_\varkappa, y_\varrho)\,\&\, F_\lambda(y_1, \ldots, y_{\varrho_\lambda}, y)) \rightarrow G_0(x, u_\varkappa, y)\Big).$$

Valóban[33], ha $\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) = \Phi_\lambda(y_1, \ldots, y_{\varrho_\lambda}, y) = \uparrow$ és $\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda$ esetén $\Psi_0(x_\varrho, i_\varkappa, y_\varrho) = \uparrow$ ($x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x, y_1, \ldots, y_{\varrho_\lambda}$ és y kifejezések), akkor a Φ_λ és Ψ_0 logikai függvények definíciója folytán $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda})$, $y = \mathbf{f}_\lambda(y_1, \ldots, y_{\varrho_\lambda})$ és $\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda$ esetén $y_\varrho = x_\varrho(i_\varkappa/0) = x_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/0)$; tehát $x(i_\varkappa/0) = x(\mathbf{v}_\varkappa/0) = \mathbf{f}_\lambda(x_1(\mathbf{v}_\varkappa/0), \ldots, x_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/0)) = \mathbf{f}_\lambda(y_1, \ldots, y_{\varrho_\lambda}) = y$, úgy hogy a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(x, i_\varkappa, y) = \uparrow$.

(12) $$G_1(u_0, u_\varkappa, u_0).$$

Valóban, a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(i_0, i_\varkappa, i_0) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_0(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = 0(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = 0 = i_0$.

(13) $$(x)(F_1(u_\varkappa, x) \rightarrow G_1(u_\varkappa, u_\varkappa, x))$$

Valóban, ha $\Phi_1(i_\varkappa, x) = \uparrow$ (x kifejezés), akkor a Φ_1 logikai függvény definíciója folytán $x = \mathbf{f}_1(i_\varkappa) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)$, tehát a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(i_\varkappa, i_\varkappa, x) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_\varkappa(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa) = x$.

(14) $$G_1(u_{\varkappa'}, u_\varkappa, u_{\varkappa'}).$$

[33] A Π jellel a (11), (15), (18) és (23) formulákban a megfelelő tagok konjunkcióját rövidítjük. Ha egy konjunkciós tag sincs (ha a (23) formulában $\tau = 0$), akkor a Π jellel rövidített konjunkció $\left(\prod_{\iota=1}^{\tau} F_1(x_{\iota-1}, x_\iota)\right)$ elmarad; ha csak egy konjunkciós tag van (pl. ha a (11) formulában $\varrho_\lambda = 1$), akkor a Π jellel rövidített konjunkció természetesen ezt az egy tagot jelenti.

Valóban, a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(i_{\varkappa'}, i_\varkappa, i_{\varkappa'}) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_{\varkappa'}(i_\varkappa/\mathfrak{f}_1(i_\varkappa)) = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{v}_{\varkappa'} = i_{\varkappa'}$.

$$(15) \qquad (x_1)\ldots(x_{\varrho_\lambda})(x)(y_1)\ldots(y_{\varrho_\lambda})(y)((F_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x)\,\& \\ \& \prod_{\varrho=1}^{\varrho_\lambda} G_1(x_\varrho, u_\varkappa, y_\varrho)\,\&\, F_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda},y)) \to G_1(x,u_\varkappa,y)).$$

Valóban, ha $\Phi_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x) = \Phi_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda},y) = \uparrow$ és $\varrho = 1,\ldots,\varrho_\lambda$ esetén $\Psi_1(x_\varrho, u_\varkappa, y_\varrho) = \uparrow$ ($x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda}$, x, $y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda}$ és y kifejezések), akkor a Φ_λ és Ψ_1 logikai függvények definíciója folytán $x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda})$, $y = \mathfrak{f}_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda})$ és $\varrho = 1,\ldots,\varrho_\lambda$ esetén $y_\varrho = x_\varrho(i_\varkappa/\mathfrak{f}_1(i_\varkappa)) = x_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$; tehát $x(i_\varkappa/\mathfrak{f}_1(i_\varkappa)) = x(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathfrak{f}_\lambda(x_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)),\ldots,x_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))) = \mathfrak{f}_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda}) = y$, úgy, hogy a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(x, i_\varkappa, y) = \uparrow$.

$$(16) \qquad (x)(y)(z)G_2(x,y,z,x).$$

Valóban, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán tetszőleges x, y, és z kifejezések esetén $\Psi_2(x,y,z,x) = \uparrow$, mert $x \in x(y//z)$ (ti. ha az x kifejezésben az y kifejezés egyik előfordulását sem pótoljuk a z kifejezéssel, akkor az x kifejezés változatlan marad).

$$(17) \qquad (x)(y)G_2(x,x,y,y).$$

Valóban, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán tetszőleges x és y kifejezések esetén $\Psi_2(x,x,y,y) = \uparrow$, mert $y \in x(x//y)$ (ti. ha az x kifejezésben az x kifejezés egyetlen előfordulását az y kifejezéssel pótoljuk, akkor az y kifejezés keletkezik belőle).

$$(18) \qquad (x_1)\ldots(x_{\varrho_\lambda})(x)(z)(w)(y_1)\ldots(y_{\varrho_\lambda})(y)((F_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x)\,\& \\ \& \prod_{\varrho=1}^{\varrho_\lambda} G_2(x_\varrho, z, w, y_\varrho)\,\&\, F_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda},y)) \to G_2(x,z,w,y)).$$

Valóban, ha $\Phi_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x) = \Phi_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda},y) = \uparrow$ és $\varrho = 1,\ldots,\varrho_\lambda$ esetén $\Psi_2(x_\varrho, z, w, y_\varrho) = \uparrow$ ($x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda}$, x, $y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda}$, y, z és w kifejezések), akkor a Φ_λ és Ψ_2 logikai függvények definíciója folytán $x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda})$, $y = \mathfrak{f}_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda})$ és $\varrho = 1,\ldots,\varrho_\lambda$ esetén $y_\varrho \in x_\varrho(z//w)$, vagyis az y_ϱ kifejezés úgy keletkezik az x_ϱ kifejezésből, hogy benne a z kifejezés bizonyos előfordulásait (esetleg egyet sem, esetleg mindet) a w kifejezéssel pótoljuk. A z kifejezés ugyanezen előfordulásait pótolva az $x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda})$ kifejezésben a w kifejezéssel, az $\mathfrak{f}_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda}) = y$ kifejezés keletkezik; tehát $y \in x(z//w)$ és így a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_2(x,z,w,y) = \uparrow$.

$$(19) \qquad T(u_{\gamma_\nu}, u_{\delta_\nu}).$$

Valóban, a Θ logikai függvény definíciója folytán $\Theta(i_{\gamma_\nu}, i_{\delta_\nu}) = \uparrow$, mert az $i_{\gamma_\nu} = i_{\delta_\nu}$ egyenlet az E egyenletrendszer eleme, tehát következménye az E egyenletrendszernek.

$$(20) \qquad (x)(y)(z)(w)((T(x,y) \,\&\, G_0(x, u_\varkappa, z) \,\&\, G_0(y, u_\varkappa, w)) \to T(z,w)).$$

Valóban, ha $\Theta(x,y) = \Psi_0(x, i_\varkappa, z) = \Psi_0(y, i_\varkappa, w) = \uparrow$ (x, y, z és w kifejezések), akkor a Θ és Ψ_0 logikai függvények definíciója folytán egyrészt az $x = y$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek, másrészt $z = x(i_\varkappa/\mathbf{0}) = x(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és $w = y(i_\varkappa/\mathbf{0}) = y(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$; tehát a $z = w$ egyenlet is következménye az E egyenletrendszernek és így, a Θ logikai függvény definíciója folytán, $\Theta(z,w) = \uparrow$.

$$(21)' \qquad (x)(y)(z)(w)((T(x,y) \,\&\, G_1(x, u_\varkappa, z) \,\&\, G_1(y, u_\varkappa, w)) \to T(z,w)).$$

Valóban, ha $\Theta(x,y) = \Psi_1(x, i_\varkappa, z) = \Psi_1(y, i_\varkappa, w) = \uparrow$ (x, y, z és w kifejezések),. akkor a Θ és Ψ_1 logikai függvények definíciója folytán egyrészt az $x = y$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek, másrészt $z = x(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = x(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ és $w = y(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = y(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$; tehát a $z = w$ egyenlet is következménye az E egyenletrendszernek és így, a Θ logikai függvény definíciója folytán, $\Theta(z,w) = \uparrow$.

$$(22) \qquad (x)(y)(z)(t)(u)(w)((T(x,y) \,\&\, T(z,t) \,\&\, G_2(x,z,t,u) \,\&$$
$$\&\, G_2(y,z,t,w) \to T(u,w)).$$

Valóban, ha $\Theta(x,y) = \Theta(z,t) = \Psi_2(x,z,t,u) = \Psi_2(y,z,t,w) = \uparrow$ (x, y, z, t, u és w kifejezések), akkor a Θ és Ψ_2 logikai függvények definíciója folytán egyrészt az $x = y$ és a $z = t$ egyenletek következményei az E egyenletrendszernek, másrészt $u \in x(z//t)$ és $w \in y(z//t)$; tehát az $u = w$ egyenlet is következménye az E egyenletrendszernek és így, a Θ logikai függvény definíciója folytán, $\Theta(u,w) = \uparrow$.

Legyen mármost adva egy olyan τ természetes szám, amelyre az $\mathbf{f}_2(s_\tau) = \mathbf{0}$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek. Akkor a

$$(23) \qquad (x_0)\ldots(x_\tau)(y)\left(\left(H(x_0) \,\&\, \prod_{\iota=1}^{\tau} F_1(x_{\iota-1}, x_\iota) \,\&\, F_2(x_\tau, y)\right) \to \overline{T}(y, x_0)\right)$$

formula is az $\uparrow$ logikai értékét veszi fel, ha a H, F_1, F_2 és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az Ω, Φ_1, Φ_2 és Θ logikai függvényeket helyettesítjük. Valóban, ha $\Omega(x_0) = \Phi_2(x_\tau, y) = \uparrow$ és $\iota = 1, \ldots, \tau$ esetén $\Phi_1(x_{\iota-1}, x_\iota) = \uparrow$ ($x_0, \ldots, x_\tau$ és y kifejezések), akkor az Ω, Φ_1 és Φ_2 logikai függvények definíciója folytán $x_0 = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{f}_2(x_\tau)$ és $\iota = 1, \ldots, \tau$ esetén $x_\iota = \mathbf{f}_1(x_{\iota-1})$; tehát $x_0 = s_0$, $x_1 = \mathbf{f}_1(x_0) = \mathbf{f}_1(\mathbf{0}) = s_1$, $x_2 = \mathbf{f}_1(x_1) = \mathbf{f}_1(s_1) = s_2, \ldots, x_\tau = \mathbf{f}_1(x_{\tau-1}) = \mathbf{f}_1(s_{\tau-1}) = s_\tau$ és $y = \mathbf{f}_2(x_\tau) = \mathbf{f}_2(s_\tau)$. Ennélfogva az $y = x_0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek, úgy, hogy a Θ logikai függvény definíciója folytán $\Theta(y, x_0) = \downarrow$ és így $\overline{\Theta}(y, x_0) = \uparrow$.

Jelöljük mármost B-vel azt a zárt logikai formulát, amely úgy keletkezik, hogy az (5) formulában μ helyébe az $\alpha+1, \ldots, \varepsilon$ számokat, a (6), (7) és (18) formulákban λ helyébe az $1, \ldots, \beta$ számokat, a (8), (9), (12), (13), (20) és (21) formulákban $\varkappa$ helyébe az $1, \ldots, \alpha$ számokat, a (10) és (14) formulákat $\varkappa$ és $\varkappa'$ helyébe az $1, \ldots, \alpha$ számokat, de $\varkappa$ és $\varkappa'$ helyébe különböző számokat, a (11) és (15) formulákban $\varkappa$ helyébe az $1, \ldots, \alpha$, λ helyébe pedig az $1, \ldots, \beta$ számokat, a (19) formulában ν helyébe az $1, \ldots, \sigma$ számokat helyettesítjük, majd az így keletkező logikai formuláknak, valamint a (4), (16), (17) és (22) formuláknak (valamilyen sorrendben) a konjunkcióját képezzük, végül a kapott logikai formulában az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad változókat (a formula elejére írt és a formula egész további részére vonatkozó) $(Eu_0) \ldots (Eu_\varepsilon)$ exisztenciális kvantorok segítségével lekötjük. Ez a B formula (az α, β, $\varrho_3, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásán kívül) nyilván csak az E egyenletrendszertől függ[34]. Jelöljük továbbá C-vel a (23) zárt logikai formulát; ez pedig nyilván csak a τ természetes számtól függ. Az eddigiekből látszik, hogy ha az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek, akkor az $A = B \& C$ logikai formula kielégíthető, hiszen az I individuumtartományon kielégül, ha a $H, F_1, \ldots, F_\beta, G_0, G_1, G_2$ és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ és Θ logikai függvényeket helyettesítjük.

5. Eszerint a segédtétel bizonyításához azt kell még csak megmutatnunk, hogy fordítva, ha az A logikai formula kielégíthető, akkor az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek.

Tegyük fel tehát, hogy az A formula kielégíthető, mégpedig legyen I' olyan halmaz, továbbá $\Omega', \Phi_1', \ldots, \Phi_\beta', \Psi_0', \Psi_1', \Psi_2'$ és Θ' olyan, az I' halmazon értelmezett logikai függvények, hogy az A formula kielégül az I' individuumtartományon, ha a $H, F_1, \ldots, F_\beta, G_0, G_1, G_2$ és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az $\Omega', \Phi_1', \ldots, \Phi_\beta', \Psi_0', \Psi_1', \Psi_2'$ és Θ' logikai függvényeket helyettesítjük, a kvantorokat pedig úgy értjük, hogy változóik az I' individuumtartományon futnak át[35]. Akkor a (4)—(22) formulák $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$; $\varkappa' = 1, \ldots, \alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa$; $\lambda = 1, \ldots, \beta$; $\mu = \alpha+1, \ldots, \varepsilon$; $\nu = 1, \ldots, \sigma$ esetén az $\uparrow$ logikai értéket veszik fel, ha az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad individuumváltozók helyébe sorra az I' halmaz alkalmas $i_0', \ldots, i_\varepsilon'$ elemeit, a $H, F_1, \ldots, F_\beta$ G_0, G_1, G_2 és T logikai függvényváltozók helyébe pedig sorra az $\Omega', \Phi_1', \ldots, \Phi_\beta'$, $\Psi_0', \Psi_1', \Psi_2'$ és Θ' logikai függvényeket helyettesítjük.

[34] Az E egyenletrendszer a (19) konjunkcióstagon át befolyásolja a B logikai formulát, hiszen a $\gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_\sigma, \delta_\sigma$ számok az E egyenletrendszertől függnek.

[35] A kvantorok ebben és a következő pontban mindig így értendők, anélkül, hogy ezt mindig külön megmondanók.

(6) és (7) miatt[36] vannak olyan, az I' halmazon értelmezett, sorra $\varrho_1, \dots, \varrho_\beta$ változós $\varphi_1, \dots, \varphi_\beta$ matematikai függvények, hogy $\lambda = 1, \dots, \beta$; $x_1, \dots, x_{\varrho_\lambda}$, $x \in I'$ esetén $\Phi'_\lambda(x_1, \dots, x_{\varrho_\lambda}, x)$ logikai értéke akkor és csak akkor $\uparrow$, ha $x = \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_{\varrho_\lambda})$. Ennélfogva (5) miatt[37] $\mu = \alpha + 1, \dots, \varepsilon$ esetén

(24) $$i'_\mu = \varphi_{\xi(\mu)}(i'_{\eta(\mu, 1)}, \dots, i'_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}).$$

Definiáljuk az I halmaznak az I' halmazba való ω (egyértelmű) leképezését a következőképpen[38]. Legyen

(25) $$\omega(0) = i'_0,$$

továbbá $\varkappa = 1, \dots, \alpha$ esetén

(26) $$\omega(\mathrm{v}_\varkappa) = i'_\varkappa,$$

ha végül a k kifejezés $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \dots, k_{\varrho_\lambda})$ alakú ($\lambda = 1, \dots, \beta$; $k_1, \dots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések), akkor legyen

(27) $$\omega(k) = \omega(\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \dots, k_{\varrho_\lambda})) = \varphi_\lambda(\omega(k_1), \dots, \omega(k_{\varrho_\lambda})).$$

A kifejezés fogalmának definíciója alapján (különösen (d) figyelembevételével, lásd a 8. oldalon) világos, hogy (25), (26) és (27) által $\omega(k)$ minden k kifejezésre értelmezve van és mindig I' eleme.

Megmutatjuk, hogy $\mu = 0, 1, \dots, \varepsilon$ esetén

(28) $$\omega(i_\mu) = i'_\mu.$$

Valóban, ez $i_0 = 0, i_1 = \mathrm{v}_1, \dots, i_\alpha = \mathrm{v}_\alpha$ folytán (25) és (26) miatt áll, ha $\mu = 0, 1, \dots, \alpha$. Ha pedig $\mu = \alpha + 1, \dots, \varepsilon$ és feltesszük, hogy (28) μ helyett minden μ-nél kisebb természetes számra áll, akkor (2) és (27) miatt

$$\omega(i_\mu) = \omega(\mathfrak{f}_{\xi(\mu)}(i_{\eta(\mu, 1)}, \dots, i_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})})) = \varphi_{\xi(\mu)}(\omega(i_{\eta(\mu, 1)}), \dots, \omega(i_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}));$$

itt (3) miatt, az indukciós feltevés folytán $\varrho = 1, \dots, \varrho_{\xi(\mu)}$ esetén

$$\omega(i_{\eta(\mu, \varrho)}) = i'_{\eta(\mu, \varrho)},$$

tehát (24) miatt

$$\omega(i_\mu) = \varphi_{\xi(\mu)}(i'_{\eta(\mu, 1)}, \dots, i'_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}) = i'_\mu,$$

amivel (28)-at $\mu = \alpha + 1, \dots, \varepsilon$ esetén is bebizonyítottuk.

[36] Vagyis amiatt, hogy a (6) és (7) formulák $\lambda = 1, \dots, \beta$ esetén az $\uparrow$ logikai értéket veszik fel, ha bennük az F_λ logikai függvényváltozó helyébe a Φ'_λ logikai függvényt helyettesítjük. Hasonlóan értendők a továbbiak során is a (4)—(23) formulákra való ilyen utalások. (Az olyan formulák esetén, amelyekben az $u_0, \dots, u_\varepsilon$ szabad változók egy része is szerepel, úgy értendő az ilyen utalás, hogy ezek helyébe sorra az I' halmaz $i'_0, \dots, i'_\varepsilon$ elemeit helyettesítjük.)

[37] Lásd a megelőző jegyzetet (utolsó, zárójelbe tett mondatával együtt).

[38] Az ω tehát olyan egyváltozós függvény, amely a kifejezések I halmazán van értelmezve és értékei az I' halmaz elemei. Az ω leképezés nem szükségképpen *kölcsönösen* egyértelmű és nem szükségképpen az *egész* I' halmazra képezi le az I halmazt.

(28) folytán nem okoz félreértést, ha valamely k kifejezésnek az ω leképezés szolgáltatta $\omega(k)$ képét rövidség kedvéért általában k'-vel is jelöljük. Ezt a jelölést használjuk, valahányszor a k kifejezés egyetlen jelből áll, vagy ha egyetlen (esetleg indexes) betűvel jelöljük; más esetben megmaradunk az $\omega(k)$ jelölés mellett. Eszerint (25) és (26) így is írható:

(25′) $\quad \mathbf{0}' = i_0',$

(26′) $\quad \mathbf{v}_\varkappa' = i_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, \ldots, \alpha);$

(27)-et pedig így is kimondhatjuk: ha $k = \mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta;$ $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések), akkor $k' = \varphi_\lambda(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}')$.

6. Legyen Φ az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Theta$ logikai függvények valamelyike, π pedig a Φ logikai függvény független változóinak száma (tehát $\Phi = \Omega$ esetén $\pi = 1$; $\Phi = \Phi_\lambda$ esetén $\pi = \varrho_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$; $\Phi = \Psi_0$ és $\Phi = \Psi_1$ esetén $\pi = 3$; $\Phi = \Psi_2$ esetén $\pi = 4$; végül $\Phi = \Theta$ esetén $\pi = 2$). Jelöljük Φ'-vel $\Phi = \Omega$ esetén az Ω', $\Phi = \Phi_\lambda$ esetén $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$ a Φ_λ', $\Phi = \Psi_\nu$ esetén $(\nu = 0, 1, 2)$ a Ψ_ν', végül $\Phi = \Theta$ esetén a Θ' logikai függvényt. Megmutatjuk, hogy *valahányszor* $k_1, \ldots, k_\pi$ *olyan kifejezések, amelyekre* $\Phi(k_1, \ldots, k_\pi)$ *logikai értéke* $\uparrow$, *mindannyiszor* $\Phi'(k_1', \ldots, k_\pi')$ *logikai értéke is* $\uparrow$.

Ez az állítás $\Phi = \Omega$ esetén igaz, mert akkor $\Phi(k_1)$ logikai értéke, az Ω logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha $k_1 = \mathbf{0}$; már pedig ekkor (25′) és (4) miatt

$$\Phi'(k_1') = \Omega'(\mathbf{0}') = \Omega'(i_0') = \uparrow.$$

Ha $\Phi = \Phi_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$, akkor $\Phi(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}, k_{\varrho_\lambda+1})$ logikai értéke, a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha $k_{\varrho_\lambda+1} = \mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$; ekkor (27) (már említett átfogalmazása) folytán $k_{\varrho_\lambda+1}' = \varphi_\lambda(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}')$ tehát a φ_λ matematikai függvény bevezetésekor említett tulajdonsága miatt

$$\Phi'(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}', k_{\varrho_\lambda+1}') = \Phi_\lambda'(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}', k_{\varrho_\lambda+1}') = \uparrow,$$

tehát állításunk ekkor is igaz.

Ha $\Phi = \Psi_0$, akkor $\Phi(k_1, k_2, k_3)$ logikai értéke, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha k_2 a számváltozók egyike, mondjuk $k_2 = \mathbf{v}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ és $k_3 = k_1(k_2/\mathbf{0}) = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$. Ebben az esetben, (26′) folytán,

$$\Phi'(k_1', k_2', k_3') = \Psi_0'(k_1', \mathbf{v}_\varkappa', k_3') = \Psi_0'(k_1', i_\varkappa', k_3');$$

azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $k_3 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$, akkor $\Psi_0'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \uparrow$. Ez áll, ha $k_1 = \mathbf{0}$, mert akkor $k_3 = \mathbf{0}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tehát (25′) folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{0}' = i_0'$, már pedig (8) miatt $\Psi_0'(i_0', i_\varkappa', i_0') = \uparrow$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_\varkappa$, akkor $k_3 = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tehát, (26′) és (25′) folytán, $k_1' = \mathbf{v}_\varkappa' = i_\varkappa'$, $k_3' = \mathbf{0}' = i_0'$; ennélfogva állításunk ekkor is igaz, mert (9) miatt $\Psi_0'(i_\varkappa', i_\varkappa', i_0') = \uparrow$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_{\varkappa'}$ $(\varkappa' = 1, \ldots, \alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa)$, akkor $k_3 = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = \mathbf{v}_{\varkappa'}$, tehát, (26') folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{v}_{\varkappa'}' = i_{\varkappa'}'$; ennélfogva állításunk ekkor is igaz, mert (10) miatt $\Psi_0'(i_{\varkappa'}', i_\varkappa', i_{\varkappa'}') = \uparrow$. Legyen mármost $k_1 = \mathbf{f}_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda})$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta$; $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések) és tegyük fel, hogy állításunk igaz k_1 helyett az $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre; vagyis, hogy ha $m_\varrho = l_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ $(\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda)$, akkor $\Psi_0'(l_\varrho', i_\varkappa', m_\varrho') = \uparrow$. A Φ_λ logikai függvény definíciója folytán egyrészt $\Phi_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}, k_1) = \uparrow$, másrészt, $k_3 = \mathbf{f}_\lambda(l_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0}), \ldots, l_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})) = \mathbf{f}_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda})$ miatt, $\Phi_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda}, k_3) = \uparrow$; tehát, állításunknak a $\Phi = \Phi_\lambda$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Phi_\lambda'(l_1', \ldots, l_{\varrho_\lambda}', k_1') = \Phi_\lambda'(m_1', \ldots, m_{\varrho_\lambda}', k_3') = \uparrow$. Ennélfogva, (11) miatt, $\Psi_0'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \uparrow$; ezzel állításunkat a $\Phi = \Psi_0$ esetben tetszőleges k_1 kifejezésre bebizonyítottuk[39].

Ha $\Phi = \Psi_1$, akkor $\Phi(k_1, k_2, k_3)$ logikai értéke, a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha k_2 a számváltozók egyike, mondjuk $k_2 = \mathbf{v}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ és $k_3 = k_1(k_2/\mathbf{f}_1(k_2)) = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$. Ebben az esetben, (26') folytán,

$$\Phi'(k_1', k_2', k_3') = \Psi_1'(k_1', \mathbf{v}_\varkappa', k_3') = \Psi_1'(k_1', i_\varkappa', k_3');$$

azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $k_3 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$, akkor $\Psi_1'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \uparrow$. Ez áll, ha $k_1 = \mathbf{0}$, mert akkor $k_3 = \mathbf{0}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{0}$, tehát, (25') folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{0}' = i_0'$, már pedig (12) miatt $\Psi_1'(i_0', i_\varkappa', i_0') = \uparrow$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_\varkappa$, akkor $k_3 = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)$, tehát, a Φ_1 logikai függvény definíciója folytán, $\Phi_1(\mathbf{v}_\varkappa, k_3) = \uparrow$ és így, állításunknak a $\Phi = \Phi_1$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része, valamint (26') miatt, $\Phi_1'(\mathbf{v}_\varkappa', k_3') = \Phi_1'(i_\varkappa', k_3') = \uparrow$; ennélfogva (13) miatt $\Psi_1'(i_\varkappa', i_\varkappa', k_3') = \uparrow$, ami azt jelenti, hogy állításunk ebben az esetben is igaz, hiszen (26') folytán $k_1' = \mathbf{v}_\varkappa' = i_\varkappa'$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_{\varkappa'}$ $(\varkappa' = 1, \ldots, \alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa)$, akkor $k_3 = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{v}_{\varkappa'}$, tehát, (26') folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{v}_{\varkappa'}' = i_{\varkappa'}'$; ennélfogva állításunk ekkor is igaz, mert (14) miatt $\Psi_1'(i_{\varkappa'}', i_\varkappa', i_{\varkappa'}') = \uparrow$. Legyen mármost $k_1 = \mathbf{f}_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda})$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta$; $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések) és tegyük fel, hogy állításunk igaz k_1 helyett az $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre; vagyis, hogy ha $m_\varrho = l_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ $(\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda)$, akkor $\Psi_1'(l_\varrho', i_\varkappa', m_\varrho') = \uparrow$. A Φ_λ logikai függvény definíciója folytán egyrészt $\Phi_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}, k_1) = \uparrow$, másrészt, $k_3 = \mathbf{f}_\lambda(l_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)), \ldots, l_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))) = \mathbf{f}_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda})$ miatt, $\Phi_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda}, k_3) = \uparrow$; tehát állításunknak a $\Phi = \Phi_\lambda$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Phi_\lambda'(l_1', \ldots, l_{\varrho_\lambda}', k_1') = \Phi_\lambda'(m_1', \ldots, m_{\varrho_\lambda}', k_3') = \uparrow$. Ennélfogva, (15) miatt,

[39] A bizonyítás azon alapul, hogy ha egy állítás igaz a $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ kifejezésekre és valahányszor bizonyos $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre igaz, mindannyiszor igaz az $\mathbf{f}_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda})$ kifejezésre is $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$, akkor ez az állítás minden kifejezésre igaz. Ez nyilvánvalóan adódik a kifejezés-fogalom definíciójából (lásd a 8. oldalon, különösen a definíció (d) pontját). E módon később is fogunk bizonyos állításokat valamennyi kifejezésre bebizonyítani.

$\Psi_1'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \uparrow$; ezzel állításunkat a $\Phi = \Psi_1$ esetben is bebizonyítottuk tetszőleges k_1 kifejezésre.

Ha $\Phi = \Psi_2$, akkor $\Phi(k_1, k_2, k_3, k_4)$ logikai értéke, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha $k_4 \in k_1(k_2//k_3)$; azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben $\Phi'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4')$ logikai értéke is $\uparrow$. Ez áll, ha $k_4 = k_1$, tehát $k_4' = k_1'$ és így (16) miatt $\Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_1') = \uparrow$; továbbá akkor is, ha $k_2 = k_1$ és $k_4 = k_3$, tehát $k_2' = k_1'$ és $k_4' = k_3'$ és így (17) miatt $\Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \Psi_2'(k_1', k_1', k_3', k_3') = \uparrow$. Ennélfogva állításunk a $k_1 = \mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\alpha$ esetben mindenesetre igaz, hiszen ekkor a $k_1(k_2//k_3)$ halmaz $k_2 \neq k_1$ esetén egyedül a k_1 kifejezésből, $k_2 = k_1$ esetén pedig a k_1 és k_3 kifejezésekből áll. Legyen mármost $k_1 = \mathfrak{f}_\lambda(l_1, \dots, l_{\varrho_\lambda})$ ($\lambda = 1, \dots, \beta$; $l_1, \dots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések) és tegyük fel, hogy állításunk igaz k_1 helyett az $l_1, \dots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre; vagyis, hogy valahányszor $\varrho = 1, \dots, \varrho_\lambda$ esetén $m_\varrho \in l_\varrho(k_2//k_3)$, mindannyiszor $\Psi_2'(l_\varrho', k_2', k_3', m_\varrho') = \uparrow$. Akkor a $k_1(k_2//k_3)$ halmaz $k_2 \neq k_1$ esetén az összes olyan $\mathfrak{f}_\lambda(m_1, \dots, m_{\varrho_\lambda})$ kifejezésekből áll, ahol $\varrho = 1, \dots, \varrho_\lambda$ esetén $m_\varrho \in l_\varrho(k_2//k_3)$ (mert ekkor a k_2 kifejezésnek csak olyan előfordulása lehetséges a k_1 kifejezésben, amely az $l_1, \dots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések valamelyikéhez tartozik); $k_2 = k_1$ esetén pedig a k_1 és k_3 kifejezésekből áll. Minthogy a $k_4 = k_1$, továbbá a $k_2 = k_1$ és $k_4 = k_3$ eset már el van intézve, elég azt az esetet tekintenünk még, amikor $k_4 = \mathfrak{f}_\lambda(m_1, \dots, m_{\varrho_\lambda})$, ahol $\varrho = 1, \dots, \varrho_\lambda$ esetén $m_\varrho \in l_\varrho(k_2//k_3)$. Ekkor a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán $\Phi_\lambda(m_1, \dots, m_{\varrho_\lambda}, k_4) = \Phi_\lambda(l_1, \dots, l_{\varrho_\lambda}, k_1) = \uparrow$, tehát, állításunknak a $\Phi = \Phi_\lambda$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Phi_\lambda'(m_1', \dots, m_{\varrho_\lambda}', k_4') = \Phi_\lambda'(l_1', \dots, l_{\varrho_\lambda}', k_1') = \uparrow$. Ennélfogva, (18) miatt, $\Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \uparrow$; ezzel állításunkat a $\Phi = \Psi_2$ esetben is bebizonyítottuk tetszőleges k_1 (és k_2, k_3, k_4) kifejezésre.

Ha végül $\Phi = \Theta$, akkor $\Phi(k_1, k_2)$ logikai értéke, a Θ logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha a $k_1 = k_2$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek; azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben $\Phi'(k_1', k_2') = \Theta'(k_1', k_2')$ logikai értéke is $\uparrow$. Ez áll, ha a $k_1 = k_2$ egyenlet az E egyenletrendszer egyenleteinek valamelyike, mondjuk $k_1 = i_{\gamma_\nu}$ és $k_2 = i_{\delta_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, \sigma$), mert akkor (19) miatt

$$\Theta'(k_1', k_2') = \Theta'(i_{\gamma_\nu}', i_{\delta_\nu}') = \uparrow.$$

Tegyük fel, hogy állításunk bizonyos k_1 és k_2 kifejezésekre áll; megmutatjuk, hogy akkor, $\varkappa = 1, \dots, \alpha$ esetén, az $l_1 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és $l_2 = k_2(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$, továbbá az $m_1 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ és $m_2 = k_2(\mathbf{v}_\varkappa/\mathfrak{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ kifejezésekre is áll, vagyis, hogy $\Theta'(l_1', l_2') = \Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Valóban, a Ψ_0 és Ψ_1 logikai függvények definíciója folytán, $\Psi_0(k_1, \mathbf{v}_\varkappa, l_1) = \Psi_0(k_2, \mathbf{v}_\varkappa, l_2) = \uparrow$ és $\Psi_1(k_1, \mathbf{v}_\varkappa, m_1) = \Psi_1(k_2, \mathbf{v}_\varkappa, m_2) = \uparrow$ és így állításunknak a $\Phi = \Psi_0$ és $\Phi = \Psi_1$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része, valamint (26') miatt, $\Psi_0'(k_1', \mathbf{v}_\varkappa', l_1') = \Psi_0'(k_1', i_\varkappa', l_1') = \uparrow$, $\Psi_0'(k_2', \mathbf{v}_\varkappa', l_2') =$

$\Psi_0''(k_2', i_\varkappa', l_2') = \uparrow$ és $\Psi_1''(k_1', \mathrm{v}_\varkappa', m_1') = \Psi_1''(k_1', i_\varkappa', m_1') = \uparrow$, $\Psi_1''(k_2', \mathrm{v}_\varkappa', m_2') = \Psi_1''(k_2', i_\varkappa', m_2') = \uparrow$; ennélfogva (20) és (21) miatt, valóban $\Theta'(l_1', l_2') = \uparrow$ és $\Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Tegyük fel másrészt, hogy állításunk bizonyos k_1 és k_2, valamint[40] l_1 és l_2 kifejezésekre, amelyekre a $k_1 = k_2$ és $l_1 = l_2$ egyenletek következményei az E egyenletrendszernek, áll, vagyis $\Theta'(k_1', k_2') = \Theta'(l_1', l_2') = \uparrow$; megmutatjuk, hogy akkor áll tetszőleges olyan m_1 és m_2 kifejezésekre is, amelyekre $m_1 \in k_1(l_1/l_2)$ és $m_2 \in k_2(l_1/l_2)$, vagyis, hogy tetszőleges ilyen m_1 és m_2 kifejezésekre $\Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Valóban, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán, $\Psi_2(k_1, l_1, l_2, m_1) = \Psi_2(k_2, l_1, l_2, m_2) = \uparrow$ és így, állításunknak a $\Phi = \Psi_2$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Psi_2''(k_1', l_1', l_2', m_1') = \Psi_2''(k_2', l_1', l_2', m_2') = \uparrow$; ennélfogva, (22) miatt, valóban $\Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Ezzel állításunkat a $\Phi = \Theta$ esetben is bebizonyítottuk az E egyenletrendszer tetszőleges $k_1 = k_2$ következményére[41].

Eszerint annak bizonyításához, hogy valamely $k_1 = k_2$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek, elegendő azt megmutatnunk, hogy $\Theta'(k_1', k_2') = \downarrow$. Alkalmazzuk ezt a $k_1 = \mathbf{f}_2(s_\tau)$, $k_2 = \mathbf{0}$ esetre. Minthogy $\iota = 1, 2, \ldots$ esetén $s_\iota = \mathbf{f}_1(s_{\iota-1})$, azért, a Φ_1 logikai függvény definíciója folytán, $\Phi_1(s_{\iota-1}, s_\iota) = \uparrow$, tehát, a most bebizonyított állítás ($\Phi = \Phi_1$ esete) miatt, $\Phi_1'(s_{\iota-1}', s_\iota') = \uparrow$; ez többek között $\iota = 1, 2, \ldots, \tau$ esetén is áll. Továbbá, a Φ_2 logikai függvény definíciója folytán, $\Phi_2(s_\tau, k_1) = \uparrow$, tehát, ugyanazon állítás ($\Phi = \Phi_2$ esete) miatt, $\Phi_2'(s_\tau', k_1') = \uparrow$. Minthogy végül, az Ω logikai függvény definíciója és $s_0 = \mathbf{0}$ folytán, $\Omega(s_0) = \uparrow$, tehát, ugyanazon állítás ($\Phi = \Omega$ esete) miatt, $\Omega'(s_0') = \uparrow$, azért, (23) és $s_0 = \mathbf{0} = k_2$ miatt, $\bar{\Theta}'(k_1', s_0') = \Theta'(k_1', k_2') = \uparrow$, tehát $\Theta'(k_1', k_2') = \downarrow$; ennélfogva a $k_1 = k_2$, vagyis az $\mathbf{f}_2(s_\tau) = \mathbf{0}$ egyenlet valóban nem következménye az E egyenletrendszernek. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

7. A segédtétel felhasználásával mármost bebizonyíthatjuk az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára vonatkozó CHURCH-féle tételt a következő, szabatosan megfogalmazott alakban[42].

[40] Itt tehát l_1 és l_2 nem feltétlenül azokat a $k_1(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és $k_2(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ kifejezéseket jelölik, mint az előbb.

[41] A bizonyítás azon alapul, hogy ha egy állítás igaz valamely E egyenletrendszer minden egyes egyenletére, továbbá, valahányszor valamely $k_1 = k_2$ egyenletre igaz, mindannyiszor igaz $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$ esetén a $k_1(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = k_2(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és a $k_1(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathrm{v}_\varkappa)) = k_2(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathrm{v}_\varkappa))$ egyenletekre is, végül valahányszor bizonyos $k_1 = k_2$ és $l_1 = l_2$ egyenletekre igaz, mindannyiszor igaz minden olyan $m_1 = m_2$ egyenletre, ahol $m_1 \in k_1(l_1/l_2)$ és $m_2 \in k_2(l_1/l_2)$, akkor ez az állítás az E egyenletrendszer minden következményére igaz. Ez nyilvánvalóan adódik a következmény-fogalom definíciójából (lásd a 9—10. oldalon, különösen a definíció (d) pontját).

[42] A CHURCH-tétel itt kimondott alakja nemcsak abban különbözik a bevezető **1.** pontban vázolt alakjától, hogy azokat, a logikai formulák (1) megszámlálására vonatkozó feltételeket, amelyek mellett bebizonyitjuk a tételt, most szabatosan megfogalmazzuk (míg ott a „szokásos" megszámlálásokról beszéltünk), továbbá, hogy az összes logikai formulák

TÉTEL. *Legyen* $\nu_0, \nu_1, \ldots$ *csupa különböző természetes számokból álló végtelen sorozat; legyen* $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ *az összes zárt formulák egy olyan megszámozása a* $\nu_0, \nu_1, \ldots$ *indexekkel*[43], *amely eleget tesz a következő feltételeknek. Létezzék olyan egyváltozós* ζ *és olyan kétváltozós* ϑ *általános rekurzív függvény, hogy*

(a) $\tau = 0, 1, \ldots$ *esetén* $C(\tau) = A_{\zeta(\tau)}$, *ahol* $C(\tau)$ *a* (23) *logikai formulát*[44] *jelenti*[45];

---

helyett csak a zárt logikai formulákról van szó (lásd a [14] jegyzet utolsó mondatát); hanem abban is, hogy *megszámlálás*, vagyis az összes természetes számokkal mint indexekkel való megszámozás helyett tetszőleges (csupa különböző) $\nu_0, \nu_1, \ldots$ természetes számokkal mint indexekkel való *megszámozásról* van szó (a közönséges megszámlálás az ilyen megszámozásnak az a speciális esete, amikor $\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \ldots$). Ennek a módosításnak nem az a célja, hogy általánosabban mondjuk ki a tételt, hanem az, hogy könnyebben lehessen alkalmazni. Ugyanis magának a (zárt) logikai formulák halmazának legkönnyebb úgy megadni egy effektív megszámlálását, hogy mindenekelőtt az olyan jelekből képezett összes véges sorozatok halmazát számláljuk meg, amelyek segítségével minden logikai formulát (alkalmas jelöléssel) fel lehet írni (ilyen jelek gyanánt választhatjuk pl. a következőket: ‾ (negáció jele), &, V, →, ↔, (,), *E*, , (vessző), továbbá az individuumváltozók és a logikai függvényváltozók gyanánt használt, pl. $x, y, z, t, u, v, w, x_0, y_0, z_0, t_0, u_0, v_0, w_0, x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, \ldots$ ill. $F, G, H, T, F_0, G_0, H_0, T_0, F_1, G_1, H_1, T_1, \ldots$ betűket; egyébként a negáció jelét célszerű másképp választani, pl. $\bar{A}$ helyett mindig $\urcorner A$-t írni (ha szükséges, *A*-t zárójelbe téve), hogy minden logikai formulát e jelekből alkotott véges, *lineáris* sorozatként írhassunk). Az e jelekből képezett véges sorozatok között természetesen nemcsak zárt logikai formulák vannak, hanem szabad változót tartalmazó logikai formulák is, sőt olyanok is, amelyek nem logikai formulák, hanem jelek értelmetlen egymásutánjából állnak, pl. $))x \to F$. A zárt logikai formulák megszámlálásához e sorozatok megszámlálásából úgy juthatunk, hogy az ilyen értelmetlen képződményeket, továbbá a szabad változót tartalmazó logikai formulákat utólag elhagyjuk. Mármost azt, hogy egy adott zárt logikai formula milyen sorszámot kap e megszámlálásban, körülményes megállapítani, hiszen e sorszám attól függ, hány értelmetlen képződmény, valamint szabad változót tartalmazó logikai formula előzte meg az adott zárt logikai formulát az említett jelekből képezett véges sorozatok megszámlálásában. Ezért nehézkes annak ellenőrzése is, vajon eleget tesz-e egy így kapott megszámlálás a tétel feltételeinek. Egyszerűbb úgy eljárni, hogy az értelmetlen képződmények, valamint a szabad változót tartalmazó logikai formulák elhagyása után is megtartjuk a zárt logikai formulák *eredeti* sorszámait; csakhogy akkor e sorszámok nem lesznek az *összes* természetes számok. A zárt logikai formulák ilymódon keletkező megszámozásairól már rendszerint könnyebb megmutatni, hogy eleget tesznek a tétel feltételeinek.

[43] Nem kötjük ki, hogy az $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ zárt logikai formulák különbözőek legyenek, csak azt, hogy minden zárt logikai formula legalább egyszer előforduljon köztük. Eszerint a zárt logikai formulák megszámozásai nem egyebek, mint a természetes számok halmaza valamely részhalmazának (a $\{\nu_0, \nu_1, \ldots\}$ indexhalmaznak) egyértelmű, de nem szükségképpen kölcsönösen egyértelmű leképezései a zárt logikai formulák halmazára.

[44] Vagy bármely más olyan formulát, amely (minden egyes *E* egyenletrendszerhez) alkalmasan választott $B(E)$ formulával együtt rendelkezik a $B(E)$ és $C(\tau)$ formuláknak a segédtételben kimondott tulajdonságával.

[45] Ebbe természetesen az is beleértendő, hogy a ζ függvény csak olyan értékeket vesz fel, amely a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike.

(b) $\mu, \nu = \nu_0, \nu_1, \ldots$ *esetén*

$$A_\mu \,\&\, A_\nu \rightarrow A_{\vartheta(\mu,\nu)}\text{[46]}.$$

Akkor nincs olyan egyváltozós φ általános rekurzív függvény, hogy az A_ν logikai formula $\nu = \nu_0, \nu_1, \ldots$ esetén akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $\varphi(\nu) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, van ilyen φ általános rekurzív függvény; akkor tehát az A_ν logikai formula $\nu = \nu_0, \nu_1, \ldots$ és $\varphi(\nu) = 0$ esetén kielégíthető, $\varphi(\nu) \neq 0$ esetén nem. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen, mégpedig úgy, hogy megadunk egy ellenpéldát, vagyis olyan ν számot a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok közül, amelyre vagy $\varphi(\nu) = 0$ és az A_ν logikai formula mégsem elégíthető ki, vagy pedig $\varphi(\nu) \neq 0$ és az A_ν logikai formula mégis kielégíthető.

A

$$\psi(\nu) = \varphi(\vartheta(\nu, \zeta(\nu))) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

egyenlettel definiált ψ aritmetikai függvény általános rekurzív függvény[47]. Legyen E a ψ függvény valamely általános rekurzív definíciója és legyen $B = B(E)$ a segédtétel értelmében az E egyenletrendszerhez tartozó zárt logikai formula[48]. Legyen τ a $B(E)$ formula (valamelyik[49]) sorszáma az $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ megszámozásban, vagyis legyen $B(E) = A_\tau$ (τ a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok egyike). Akkor az $A = B(E) \,\&\, C(\tau)$ logikai formula a segédtétel szerint akkor és csak akkor elégíthető ki, ha az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek. Minthogy másrészt az E egyenletrendszer a ψ függvény általános rekurzív definíciója, azért az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$, vagyis az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = s_0$ egyenlet

[46] Ebbe természetesen az is beleértendő, hogy a ϑ függvény olyan (μ, ν) helyen, ahol μ is, ν is a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike, csak olyan értéket vesz fel, amely szintén a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike.

[47] Valóban, legyen E_1, E_2 és E_3 a ζ, ϑ, ill. φ függvények egy-egy általános rekurzív definíciója, E_1', E_2' és E_3' pedig olyan egyenletrendszerek, amelyek úgy keletkeznek az E_1, E_2, ill. E_3 egyenletrendszerből, hogy megváltoztatjuk a bennük szereplő, $\mathfrak{f}_1$-től különböző funktorok jelöléseit, mégpedig úgy, hogy két olyan egyenletben, amelyek az E_1', E_2' és E_3' egyenletrendszerek közül két különbözőhöz tartoznak, ne szerepeljen közös, $\mathfrak{f}_1$-től különböző funktor, továbbá, hogy az $\mathfrak{f}_2$ funktor egyáltalában ne szerepeljen az E_1', E_2' és E_3' egyenletrendszerekben. Legyen $\mathfrak{f}_\varkappa$, $\mathfrak{f}_\lambda$ és $\mathfrak{f}_\mu$ az a három funktor, amely e jelölésváltoztatás során az E_1, E_2, ill. E_3 egyenletrendszerben szereplő $\mathfrak{f}_2$ funktor helyébe lép. (Az $\mathfrak{f}_2$ funktort az E_1 egyenletrendszerben a ζ, az E_2 egyenletrendszerben a ϑ, az E_3 egyenletrendszerben pedig a φ függvény jelölésére használtuk; az E_1', E_2', ill. E_3' egyenletrendszerben ezeknek a függvényeknek jelölésére az $\mathfrak{f}_\varkappa$, $\mathfrak{f}_\lambda$, ill. $\mathfrak{f}_\mu$ funktort használjuk.) Akkor könnyű látni, hogy az az egyenletrendszer, amely az E_1', E_2' és E_3' egyenletrendszerek egyenleteiből, továbbá az

$$\mathfrak{f}_2(\mathfrak{v}_1) = \mathfrak{f}_\mu(\mathfrak{f}_\lambda(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{f}_\varkappa(\mathfrak{v}_1)))$$

egyenletből áll, általános rekurzív definíció, és az általa definiált függvény éppen ψ.

[48] Vagyis olyan zárt logikai formula, amely a tételben szereplő $C(\tau)$ logikai formulával együtt (lásd a [44] jegyzetet) rendelkezik a segédtételben kimondott tulajdonsággal.

[49] A $B(E)$ formula többször is előfordulhat az $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ megszámozásban (lásd a [43] jegyzetet), tehát több sorszámot is kaphat.

akkor és csak akkor következménye az E egyenletrendszernek, ha $\psi(\tau)=0$, tehát akkor és csak akkor nem következménye, ha $\psi(\tau)\neq 0$. Eszerint az A logikai formula akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $\psi(\tau)\neq 0$. Azonban a ψ függvény definíciója szerint

$$\psi(\tau)=\varphi(\vartheta(\tau,\zeta(\tau))=\varphi(\nu),$$

ahol $\nu=\vartheta(\tau,\zeta(\tau))$; másrészt a tételben szereplő (a) és (b) feltételek, továbbá $B(E)=A_r$ folytán

$$A=B(E)\,\&\,C(\tau)=A_\tau\,\&\,A_{\zeta(\tau)}=A_{\vartheta(\tau,\zeta(\tau))}=A_\nu.$$

Eszerint, ha $\varphi(\nu)=\psi(\tau)=0$, akkor az A_ν logikai formula nem elégíthető ki, ha pedig $\varphi(\nu)=\psi(\tau)\neq 0$, akkor kielégíthető; tehát a $\nu=\vartheta(\tau,\zeta(\tau))$ szám valóban ellenpélda[50] a φ függvény feltételezett tulajdonságára. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Könnyen látható, hogy a zárt logikai formulák „szokásos" megszámozásai, pl. a GÖDEL-féle megszámozás[51] és a lexikografikus megszámozás[52], eleget tesznek a tétel feltételeinek; így tehát a tétel többek között ezekre a megszámozásokra is érvényes.

[50] A $\nu=\vartheta(\tau,\zeta(\tau))$ szám a ζ és ϑ függvényeknek a [45] és [46] jegyzetben említett tulajdonsága folytán a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike.

[51] A zárt logikai formulák GÖDEL-féle megszámozásához a következő módon jutunk. Mindenekelőtt megszámozzuk a pozitív egész számokkal valamilyen módon azokat a jeleket, amelyeket a logikai formulák felírásához használunk; pl. az 1, 2, ... számokhoz sorra a ⌉, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (,), E, , (vessző), x, y, z, t, u, v, w, F, G, H, T, x_0, y_0, z_0, t_0, u_0, v_0, w_0, F_0, G_0, H_0, T_0, x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, F_1, G_1, H_1, T_1, ... jeleket rendeljük. Majd minden $\nu=\pi_0^{\mu_0}\ldots\pi_\varrho^{\mu_\varrho}$ pozitív egész számhoz, ahol $\pi_0=2$, $\pi_1=3$, $\pi_2=5, \ldots$ a prímszámok növekvő sorozata, hozzárendeljük azt a fenti jelekből képezett véges sorozatot, amely sorra azokból a jelekből áll, amelyek a fent említett megszámozásban a $\mu_0, \ldots, \mu_\varrho$ sorszámot kapták. (Ha $\mu_0, \ldots, \mu_\varrho$ valamelyike 0, akkor ez elhagyandó.) Ilymódon többek között minden egyes zárt logikai formulát is hozzárendeltünk valamilyen pozitív egész számhoz, a formula ún. GÖDEL-számához. Pl. a $(x)(F(x)\rightarrow G(x))$ formula GÖDEL-számaként $2^6 3^{10} 5^7 7^6 11^{17} 13^6 17^{10} 19^7 23^4 29^{18} 31^6 37^{10} 41^7 43^7$ (vagy pl. $2^6 3^{10} 5^7 11^6 13^{17} 17^6 19^{10} 23^7 31^4 41^{18} 43^6 \cdot 47^{10} 53^7 59^7$) választható.

[52] A zárt logikai formulák lexikografikus megszámozásához a következő módon jutunk. Mindenekelőtt megszámláljuk valamilyen (pl. a megelőző jegyzetben szereplő) sorrendben azokat a jeleket, amelyeket a logikai formulák felírásához használunk; majd az e jelekből képezett véges sorozatokat a következőképpen rendezzük. Két különböző hosszúságú véges sorozat közül az jön előbb, amelyik rövidebb; két egyenlő hosszúságú sorozat közül pedig vagy az, amelyiknek a jelek megszámlálásában legkésőbb előforduló jele e megszámlálásban megelőzi a másik sorozatnak a jelek megszámlálásában legkésőbb előforduló jelét; vagy pedig, ha a két sorozat olyan, hogy a jelek megszámlálásában legkésőbb előforduló jelük ugyanaz, akkor az jön előbb, amelynek az első olyan jele, amelyik különbözik a másik sorozat ugyanannyadik jelétől, a jelek megszámlálásában megelőzi a másik sorozat ugyanannyiadik jelét. Mármost minden ν természetes számhoz hozzárendeljük azt az említett jelekből képezett véges sorozatot, amely ebben az elrendezésben a $\nu+1$-edik helyre került; ilymódon többek között a zárt logikai formulákat is hozzárendeltük bizonyos természetes számokhoz.

IRODALOM

A. CHURCH [1], An unsolvable problem in elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, **58** (1936), 345—363.

[2], A note on the Entscheidungsproblem, *The Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), 40—41.

[3], Correction to *A note on the Entscheidungsproblem*, ugyanott, 1 (1936), 101—102.

V. K. GYETLOVSZ (В. К. ДЕТЛОВС) [1], Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, Доклады Академми Наук СССР, **90** (1953), 723—725.

KALMÁR LÁSZLÓ [1], Az eldöntésprobléma visszavezetése logikai formulák véges halmazon való kielégíthetőségének kérdésére, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 27—szept. 2), Budapest, 1952, 163—190.

[2], K. Schröter egy, az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozó problémájának megoldása, *A Magyar Tudományos Akadémia III. (matematikai és fizikai) Osztályának Közleményei*, 5 (1955), 103—127.

S. C. KLEENE [1], General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), 727—742.

[2], λ-definability and recursiveness, *Duke Mathematical Journal*, **2** (1936), 340—353.

A. MARKOV (А. МАРКОВ) [1] Теория алгорифмов, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 27—szept. 2), Budapest, 1952, 191—203.

R. PÉTER [1], *Rekursive Funktionen*, Budapest, 1951.

SURÁNYI JÁNOS [1], A matematikai logika eldöntésproblémájáról, *Matematikai Lapok*, 6 (1955), 180—187.

A. M. TURING [1], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2), **42** (1937), 230—265.

[2], Computability and λ-definability, *The Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), 153—163.

[3], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction, *Proceedings of the London Mathematical Society* (2) **43** (1937), 544—546.

ELEKTRONCSÖVEK ANÓDÁRAM-INGADOZÁSÁNAK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Elektroncsövek anódáram-ingadozásának vizsgálatánál általában két kérdés játszik lényeges szerepet. Az egyik kérdés az, hogy a pillanatnyi anódáram értékét milyen törvény határozza meg. A másik pedig az, hogy az áram különböző frekvenciájú komponensei milyen amplitudókkal fordulnak elő, azaz, milyen az áram „teljesítmény-spektruma". Tekintve, hogy az elektroncsövek anódárama véletlen ingadozást mutat, ezért a fenti kérdésre adandó válaszok is a valószínűségszámítás körébe esnek. A feltett kérdések ilyen irányú első megoldását W. SCHOTTKY [14] adta meg 1918-ban. Jelen értekezésünkben W. SCHOTTKY említett eredményeinek általánosításával foglalkozunk és a problémák pontosabb megoldását adjuk meg.

Az alábbiakban közölt vizsgálatok egy része 1950-ben az Egyesült Izzó (Tungsram) Kutató Laboratóriumában készült. Az akkori tárgyalás alapját szerző [17] dolgozatában közölt módszere képezte. Ennek lényege a következő: Az elektroncsövek anódáramának időbeli lefolyása általában nem-Markov típusú sztochasztikus folyamat, amely nehezen kezelhető. A jelenségnek időben visszafelé történő vizsgálatával azonban el lehet érni, hogy a folyamatot Markov-folyamatként lehessen kezelni, sőt, az időtengely szakaszokra osztásával a Markov-folyamat visszavezethető lényegében független valószínűségi változók összegezésével kapcsolatos problémák megoldására. Ezen észrevételeken alapuló tárgyalás korábbi hasonló kérdésekkel foglalkozó munkákkal szemben egyszerűsítést jelentett és ugyanakkor általánosabb eredmények kimondását tette lehetővé. A későbbiekben egy újabb észrevétel, amely az említett [17] munka függelékében nyert közlést, további egyszerűsítéseket engedett meg. A következőkben ezen észrevételen alapuló tárgyalás kerül ismertetésre, melyet szerző 1953-ban a Távközlési Kutató Intézet Újpesti Laboratóriumában (volt Egyesült Izzó Kutató Laboratórium) készített.*

* Jelen cikk rövidített formában a Távközlési Kutató Intézet Közleményei I. (1955) 2. szám 14—29. nyert közlést.

1. §. W. Schottky vizsgálatairól

Elektroncsöveknél W. SCHOTTKY [14] fedezte fel, hogy az anódáram állandó ingadozást mutat. Mint ismeretes, elektroncsövek katódjából az elektronok diszkrét időpontokban lépnek ki és minden egyes elektron véges töltést $\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *coulomb*ot visz magával. W. SCHOTTKY az áram klasszikus definícióját használta, amely szerint a létesített áram egyenlő az időegység alatt a katódról távozó töltéssel. Az időegység alatt a katódról kilépő elektronok száma azonban véletlen ingadozást mutat, azaz valószínűségi változó és így indokolt az anódáram ingadozása is. W. SCHOTTKY meggondolásaiban feltételezte, hogy a katódból adott t időtartam alatt kilépő elektronok száma, amelyet jelöljön ξ_t változó, Poisson-eloszlást követ, azaz annak a valószínűsége, hogy t időtartam alatt n elektron lép ki.

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{P}(\xi_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

ahol λ jelenti az időegység alatt kilépő elektronok várható számát.

W. SCHOTTKY az anódáram ingadozásának vizsgálatával kapcsolatosan három kérdést vetett fel, amelyekre a fent leírt modell alapján az alábbiakban részletezett eredményeket nyerte. A következő eredmények arra az esetre vonatkoznak, midőn feltételezzük, hogy a katódról kilépő valamennyi elektron eljut az anódig.

A) *A pillanatnyi anódáram ingadozása.* Az áram klasszikus definíciója szerint, ha az időegység alatt ξ elektron lép ki a katódból, úgy a létesített áram $i = \varepsilon\xi$. Ennek várható értéke

$$\mathbf{E}(i) = \varepsilon\lambda,$$

ugyanis az (1) feltevés szerint $\mathbf{P}(\xi = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n$. Ha az $\mathbf{E}(i) = I$ jelölést bevezetjük az átlagáramra, úgy $\lambda = I/\varepsilon$ adódik az eddig ismeretlen λ paraméter értékére. Az i áram szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(i) = \varepsilon^2\lambda = \varepsilon I,$$

ugyanis, mint ismeretes, a Poisson-eloszlás átlaga és szórásnégyzete megegyezik egymással. A szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke a szórás vagy négyzetes ingadozás:

$$\text{(A)} \qquad \mathbf{D}(i) = \sqrt{\varepsilon I}.$$

W. SCHOTTKY eme első (A) eredménye azt fejezi ki, hogy I átlagos emissziós áram esetén az anódáram szórása $\sqrt{\varepsilon I}$, azaz az anódáram négyzetgyökével arányos.

B) *A T időre közepelt anódáram ingadozása.* Ha i_T jelöli a T időtartamra közepelt anódáramot, azaz $i_T = \varepsilon\xi_T/T$, ahol ξ_T jelöli a katódról T időtartam alatt kilépő elektronok számát, úgy

$$E(i_T) = \varepsilon\lambda = I$$

és

(B) $$D(i_T) = \sqrt{\frac{\varepsilon I}{T}},$$

ugyanis most $P(\xi_T = n) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$. W. SCHOTTKY eme második (B) eredménye azt fejezi ki, hogy minél hosszabb T, mérőműszerünk közepelési ideje, annál kisebb lesz az anódáram ingadozása, mégpedig a mérési idő négyzetgyökével fordítva arányos.

C) *Az anódáram frekvencia spektruma.* A fent vázolt felfogás szerint az áram pillanatnyi időtartamú áramlökésekből áll, amelyeket az egyes elektronok hoznak létre. Mivel minden egyes elektron véges töltést visz magával és az egyes áramlökések időszerinti integrálja ki kell hogy adja az ε töltést, következőleg ezen felfogás szerint az áramlökések amplitúdóinak végtelen nagynak kell lenniök. Eszerint az áram értéke olyan időpontokban, amikor egy elektron a katódot elhagyja, végtelenné válik és utána zérus lesz a következő elektron kilépésének időpontjáig. Ezen modell alapján meghatározta W. SCHOTTKY az anódáram ingadozásának spektrális eloszlását. Azt nyerte eredményül, hogy $\Delta\nu$ nagyságú frekvenciasávra jutó teljesítmény

(C) $$2\varepsilon I \Delta\nu$$

függetlenül attól, hogy hol helyezkedik el ez a $(\nu, \nu + \Delta\nu)$ frekvenciasáv. Ez az ún. fehérspektrum.

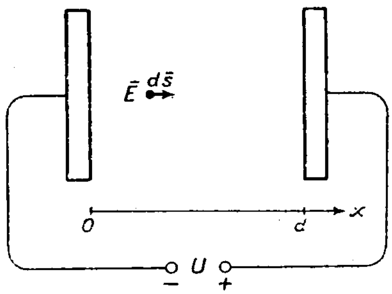
W. SCHOTTKY fenti eredményeihez néhány megjegyzést kell fűznünk. Az (A) eredmény (B)-nek az a speciális esete, midőn T-t egységnyinek választjuk. Így (A)-val külön nem kell foglalkoznunk. (B) eredmény ellen az a kifogás emelhető, hogy ha T-vel zérus felé közeledünk, akkor az áram szórása, $D(i_T)$, minden határon túl nő, ami nem egyezik a tapasztalati tényekkel. A (C) eredmény pedig azt szolgáltatja, hogy $\Delta\nu \to \infty$ esetén a teljesítmény végtelenné válik, ami abszurdum. Kicsiny frekvencia értékekre ($\nu < 10^8 Hz$) azonban a tapasztalattal jól egyező eredményt szolgáltat.

2. §. A jelenségeket leiró modell

Most következő tárgyalásunkban W. SCHOTTKY (A), (B) és (C) képletekben kifejezésre jutó eredményeit általánosítjuk. Ezt azáltal nyerjük, hogy egyrészt az áram precízebb definícióját vesszük alapul, másrészt a jelenséget a valószínűségszámítás modern fejezete, a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével tárgyaljuk.

Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk két elektródás elektroncsőre, ún diódára. Összes meggondolásaink azonban több elektródás elektroncsövekre is érvényesek.

1\. *Az egyes elektronok által okozott áramimpulzusok időbeli lefolyásának megállapítása.* A Maxwell-egyenletek álláspontjára helyezkedve azt az első pillanatban meglepő eredményt kapjuk, hogy az elektroncső áramkörében nem akkor kapunk áramot, amikor az elektron a katódot elhagyja, vagy az anódhoz érkezik, hanem áthaladása során állandóan influál áramot. Ennek pillanatnyi értéke $i(t)$ a következő energiaegyenletekből nyerhető



1. ábra

$$\varepsilon \bar{E} d\bar{s} = U i(t) dt,$$

ahol U a katód-anód feszültség, $\bar{E}$ a térerősség az elektron helyén és ds jelöli az elektron dt idő alatti elmozdulását (1. ábra). A fenti egyenlet baloldalán az a munka szerepel, amelyet az elektron $d\bar{s}$ elmozdulás alatt nyer, míg a jobboldalon az a munka, amelyet a külső áramkörben dt idő alatt végez. A két oldal egyenlősége az energia megmaradási elvéből következik. Ha $v = d\bar{s}/dt$ jelöli az elektron pillanatnyi sebességét, úgy a fentiek szerint

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{U} \bar{E}\bar{v}.$$

Bennünket azonban az érdekel, hogy adott konkrét esetben egy elektron által influált áram milyen időbeli lefolyást mutat. Ez meghatározható a Poisson-egyenletből

$$\operatorname{div} E = 4\pi\varrho,$$

ahol ϱ a töltéssűrűséget jelenti (sík dióda esetén $\varrho = I/v$, ahol I az emissziós áram sűrűsége) és az elektronok mozgásegyenlete segítségével, amely, mint ismeretes:

$$m \frac{dv}{dt} = \varepsilon \bar{E},$$

ahol $m(= 9{,}03 \cdot 10^{-28}$ gr) az elektron tömege. Elő kell írni természetesen a kezdeti feltételeket: az elektroncső geometriai adatait, az anódfeszültséget (állandó vagy időben változó), a katódról kilépő elektronok sebességét (feltesszük, hogy az elektronok a katódfelületet annak normálisának irányában hagyják el), továbbá a katódról kilépő emissziós áram átlagértékét (amely lehet időben állandó vagy változó).

Megjegyezzük még, hogy ha az elektron gyorsító térben mozog, úgy energiát vesz fel a külső körtől és abban katód-anód irányú (pozitív irányú) áramot influál, míg ha fékezési térben mozog, úgy energiát ad át a térnek és a külső körben anód-katód irányú (negatív irányú, generátor hatású) áramot influált. Ugyanis a tér energiájának a megváltozása a külső körön áramot hajt át.

A fent felsorolt képletek birtokában bármilyen két elektródás elektroncsőre megállapítható a katódról v_0 kezdősebességgel kilépő elektron által influált áram intenzitásának időbeli lefolyása. Jelölje egy a katódról t' időpontban v_0 kezdeti sebességgel kilépő elektron által influált áram intenzitását t időpontban

$$i = f(t, t', v_0).$$

Ha az U anódfeszültség állandó (nem függ a t időtől), úgy a fenti áramintenzitás csupán az $u = t - t'$ időkülönbségtől, az ún. futásidőtől függ és ekkor legyen

$$i = f(u, v_0).$$

Ha például feltesszük, hogy a katódról $v_0 = 0$ kezdősebességgel lépnek ki az elektronok és a tértöltéstől eltekintünk, azaz $\overline{E} =$ állandó feltételezéssel élünk, úgy egymástól d távolságra levő egységnyi felületű párhuzamos sík anód és katódból álló dióda esetén az influált áram időbeli lefolyása:

$$i = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon}{\tau_0^2} u & \text{ha } 0 < u \leq \tau_0 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{2}$$

ahol U az anódfeszültség és

$$\tau_0 = \frac{2d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}}$$

a katód-anód repülési idő (2. ábra).

Ekkor ugyanis $E = U/d$ és így $i = \dfrac{\varepsilon v}{d}$. Meghatározandó tehát v.

A mozgásegyenlet szerint $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{\varepsilon E}{m} = \dfrac{\varepsilon U}{md}$ és így $v = \dfrac{\varepsilon U}{md} u$ és $x = \dfrac{\varepsilon U}{md} \dfrac{u^2}{2}$.

Ha most $x = d$ úgy $u = \tau_0$, azaz $d = \dfrac{\varepsilon U}{md} \dfrac{\tau_0^2}{2}$ (innen τ_0 kiszámítható). Az utóbbi egyenletekből $v/d = 2u/\tau_0^2$ és így $i = \dfrac{\varepsilon v}{d} = \dfrac{2\varepsilon}{\tau_0^2} u$, ami kiszámítandó volt.

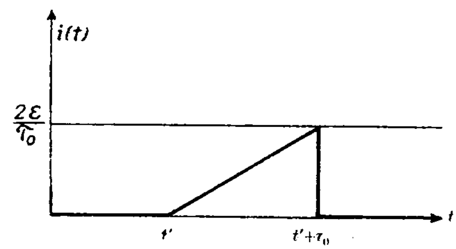
Ha a fenti példát azzal a módosítással tekintjük, hogy a tértöltést nem hanyagoljuk el, de feltesszük, hogy a katódnál $E=0$ (Langmuir-féle cső modell) úgy azt nyerjük, hogy

$$i=\begin{cases}\dfrac{4\varepsilon}{\tau_1^4}u^3 & \text{ha } 0\leq u\leq \tau_1\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}\tag{3}$$

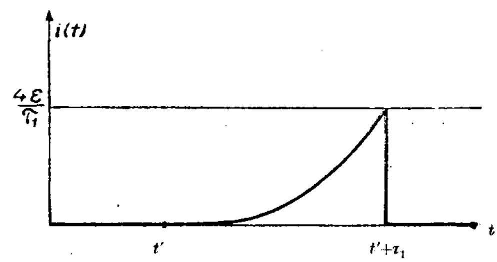
ahol most

$$\tau_1=\frac{3d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}}$$

a katód-anód repülési idő, amely a korábbinál 50 százalékkal nagyobb, azaz $\tau_1=\frac{3}{2}\tau_0$ (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Ekkor ugyanis a Poisson-egyenlet $\frac{dE}{dx}=4\pi\varrho$, de itt $\varrho=I/v$ és $v=\frac{dx}{du}$. Ha az elektron kezdeti sebessége $v_0=0$ úgy innen $E=4\pi I u$ és így a mozgásegyenletből $v=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{u^2}{2}$ és $x=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{u^3}{6}$. Ha most $x=d$ úgy $u=\tau_1$, és $d=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{\tau_1^3}{6}$ (innen τ_1 kiszámítható). A fentiekből $v/d=3u^2/\tau_1^3$ és továbbá $U=\int_0^{\tau_1}Ev\,dt=3\pi d I\tau_1$ tehát így $i=\frac{\varepsilon E v}{U}=\frac{4\varepsilon}{\tau_1^4}u^3$, ami bizonyítandó volt. Megjegyezzük, hogy most I nem választható meg tetszőlegesen, hanem $d=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{\tau_1^3}{6}$ és $U=3\pi d I\tau_1$ egyenletekből meghatározható éspedig

$$I=\frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\frac{U^{3/2}}{d^2}.$$

Amint látjuk, valamennyi esetben megállapitható az $i=f(u, v_0)$, illetve $i=f(t, t', v_0)$ függvény, amely a katódot v_0 kezdősebességgel elhagyó elektron által influált áram időbeli lefolyását írja le. A fenti példákban mindenütt $v_0=0$ feltevéssel éltünk. Általában azonban v_0 valószínűségi változó.

2. *A katódról kilépő elektronok sebességeloszlása.* A klasszikus statisztika tanítása szerint a katódról kilépő elektronok kezdősebességei egymástól független valószínűségi változók, mégpedig mindegyik Maxwell-eloszlást követ, azaz annak a valószínűsége, hogy $v_0 \leqq v$:

$$H(v)=1-e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

ha $v \geqq 0$, míg $H(v)=0$, ha $v<0$. Itt $k=1{,}38\cdot 10^{-16}$ erg/grad a Boltzmann-féle állandó és T az abszolút hőmérséklet. v_0 sűrűségfüggvénye

$$H'(v)=e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\frac{mv}{kT}, \qquad (0 \leq v < \infty).$$

Eszerint a katódról kilépő elektronok átlagsebessége

$$\mathbf{E}(v_0)=\int_0^\infty v\,dH(v)=\sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$$

és szórása

$$\mathbf{D}(v_0)=\sqrt{\frac{kT}{2m}(4-\pi)}.$$

Amint látjuk, a katódból kilépő elektronok sebességeloszlásának a törvénye csupán T-től, a katód hőmérsékletétől függ. Ha T a vizsgálati idő folyamán állandó, úgy ez a törvény is változatlan marad, különben T változásával ez is mutat időbeli változást.

3. *Az elektronok katódról való kilépéseinek időpontjai.* Az elektronoknak a katódból való kilépéseinek időpontjai feltehetőleg leírhatók Poisson-folyamat eseményeinek előfordulási pontjaival. Mégpedig, ha legáltalánosabban feltesszük, hogy a $(0, t)$ időközben kilépő elektronok számának várható értéke $\Lambda(t)$, ahol $\Lambda(t)$ a t-nek nemcsökkenő folytonos függvénye és $\Lambda(0)=0$, úgy annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben pontosan n elektron lép ki a katódból

$$P(\xi_t=n)=e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^n}{n!} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Poisson-folyamatot a legáltalánosabb feltevés mellett úgy nyerünk, hogy feltesszük, hogy diszjunkt időintervallumokban kilépő elektronok számai független valószínűségi változók és hogy az elektronok 1 valószínűséggel egyesével lépnek ki a katódból. A Poisson-folyamatnak ilyen általános tárgyalását C. RYLL-NARDZEWSKI [13] adta meg.

Legegyszerűbb az az eset, midőn feltesszük, hogy az elektronoknak a katódból való kilépéseinek időpontjai homogén folyamatot alkotnak. Ez alatt azt értjük, midőn $\Lambda(t)=\lambda t$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy tetszőleges t hosszúságú időintervallumban pontosan n a kilépő elektronok száma

$$\mathbf{P}(\xi_t=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

ahol λ pozitív állandó jelöli a katódról időegység alatt kilépő elektronok várható számát. A fent leírt homogén Poisson-folyamat definiálására sokszor a következő szemléletes feltevéseket tesszük: 1. annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben egy elektron kilép a katódról $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, 2. annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ közben egynél több elektron lép ki a katódról $o(\Delta t)$, 3. közös pont nélküli időintervallumokban kilépő elektronok számai egymástól függetlenek. Ezen A. JA. HINCSIN [7] féle feltevéseknél sokkal enyhébb feltevésekkel is megkapjuk a Poisson-eloszlást, lásd pl. E. MARCZEWSKI [10], K. FLOREK, E. MARCZEWSKI és C. RYLL-NARDZWESKI [5], de az előbbi definíció szemléletes tartalma miatt sokszor alkalmazásra talál.

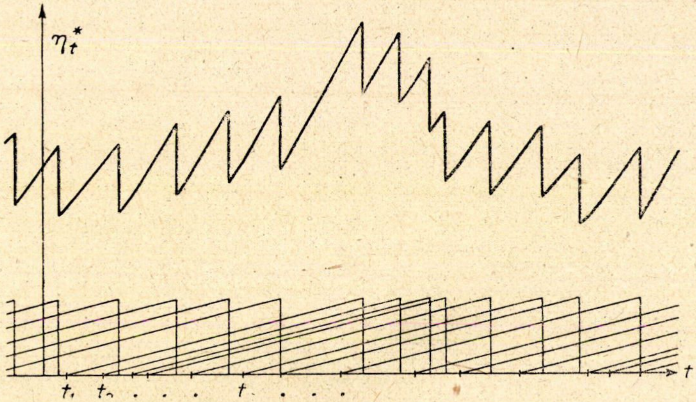
4. *Az anódáramot leíró modell.* Miután vázoltuk az általunk követett modell részleteit, rátérhetünk az anódáram megállapítására. Fel fogjuk tenni, hogy a vizsgált folyamat már végtelen hosszú ideje tart, azaz stacionárius esettel fogunk számolni. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az elektronok repülési idejénél hosszabb ideje vizsgáljuk a jelenséget. A Maxwell-egyenletek linearitásából következik, hogy az anódáram az egyes elektronok általt influált áramimpulzusok lineáris szuperpoziciójaként adódik. Tehát, ha az elektronok kilépési időpontjait $\{t_k\}$ sorozat jelöli és a t_k időpontban kilépő elektron kezdősebessége v_k, úgy a t időpontban létesített anódáram értéke

$$\eta_t^*=\sum_{\{t_k\}}' f(t, t_k, v_k). \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy itt az összegezés csupán azon t_k értékekre terjesztendő ki, amelyekhez tartozó elektronok t időpontban a cső belsejében vannak (4. ábra).

Itt a $\{t_k\}$ időpontok és a $\{v_k\}$ sebességek valószínűségi változók és így az η_t^* áram is minden t időpontban egy valószínűségi változót jelent, azaz η_t^* a folytonos t paraméter minden értékére egy valószínűségi változó, azaz η_t^* egy sztochasztikus folyamatot ír le. Jelenleg a $\{t_k\}$ sorozat egy Poisson-folyamat (általában inhomogén vagy speciálisan homogén) eseményeinek előfordulási pontjait jelöli és a $\{v_k\}$-k egymástól és a $\{t_k\}$-tól is független valószínűségi változók ugyanazon $\mathbf{P}(v_k\leqq v)=H(v)$ eloszlásfüggvénnyel. Megjegyezzük, hogy a legutolsó feltevés nem lényeges, ugyanis megengedhető, hogy v_k eloszlása függjön a t_k időponttól. A következőkben ezt a függést explicite nem írjuk ki, de az eredmények erre az esetre is érvényesek.

Az η_t^* valószínűségi függvény által leírt sztochasztikus folyamat általában nem-Markov folyamat, kivéve azt a speciális esetet, midőn $f(u, v) = ve^{-au}$, $u > 0$-ra. Ez az eset azonban ritkán fordul elő az elektroncsövek problémájában. Az η_t^* folyamattal megegyező típusú folyamatokat [17] dolgozatunkban Markov-folyamatra való visszavezetés útján tárgyaltuk. Jelenleg a [17] dolgozat függelékében közölt segédtétel alapján közvetlen tárgyalást alkalmazunk.



4. ábra

3. §. Az η_t^* folyamatra vonatkozó eredmények

Az η_t^* valószínűségi változó jelöli az anódáram értékét t időpontban. A következő eredmények kimondásánál egyszerűség kedvéért és fontosságuk miatt is feltesszük, hogy az alapul szolgáló Poisson-folyamat időben homogén λ eseménysűrűséggel, továbbá hogy az elektroncső anódfeszültsége állandó, azaz, egy elektron által influált áramimpulzus intenzitásának időbeli lefolyását $i = f(u, v)$ függvény írja le, ahol u az elektron repülési ideje és v a kezdősebessége.

A következőkben W. SCHOTTKY (A), (B) és (C) eredményeinek általánosításaként megadjuk az anódáram pillanatnyi értékének szórását, eloszlását (legalábbis a karakterisztikus függvényét), a T időre közepelt áram szórását és végül az η_t^* áram korrelációs függvényét és spektrális felbontását.

A) *A pillanatnyi áram ingadozása.* W. SCHOTTKY (A) formulája szerint az áram szórása $\sqrt{\varepsilon I}$-vel egyenlő. Most meghatározzuk az ingadozás pontos értékét, az áram szórását $\mathbf{D}(\eta_t^*)$-t. Az η_t^* áramintenzitás várható értéke

(6) $$\mathbf{E}(\eta_t^*) = \lambda \int_0^\infty \left| \int_0^\infty f(t, v)\, dH(v) \right| dt = \lambda \varepsilon.$$

Ha az átlagáramot $\mathbf{E}(\eta_t^*) = I$-vel jelöljük, úgy innen az ismeretlen λ paraméter értéke meghatározható, éspedig $\lambda = I/\varepsilon$. Az áram szórásnégyzete

$$(7) \qquad \mathbf{D}^2(\eta_t^*) = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (f(t,v))^2 dH(v) \right] dt.$$

A következőkben erre $\mathbf{D}^2(\eta_t^*) = \sigma^2$ jelölést fogjuk alkalmazni. Ennek pozitív négyzetgyöke $\mathbf{D}(\eta_t^*) = \sigma$ a szórás, amely az ingadozás mértéke. Mivel a (7) formulában $\lambda = I/\varepsilon$ és $f(t,v)$ értéke ε-nal arányos, következőleg azt nyerjük, hogy $\mathbf{D}(\eta_t^*)$ arányos $\sqrt{\varepsilon I}$-vel és az arányossági tényező függ a vizsgált elektroncső speciális adataiból.

A fentihez hasonló módon állíthatjuk elő az η_t^* áram magasabb momentumait is. A $\mathbf{P}(\eta_t^* < x) = F(x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható a

$$(8) \qquad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dF(x) = e^{-\lambda \int_0^t [1-\varphi(u,\omega)] du}$$

karakterisztikus függvény ismeretében. Itt

$$(9) \qquad \varphi(u,\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega f(u,v)} dH(v).$$

B) *A T időre közepelt anódáram ingadozása.* W. SCHOTTKY (B) formulája szerint a T időre közepelt anódáram szórása $\sqrt{\dfrac{\varepsilon I}{T}}$. Ennek pontos értéke az alábbi kifejezés pozitív négyzetgyöke

$$(10) \qquad \mathbf{D}^2 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta_t^* dt \right\} = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(u-v) \, du \, dv = \frac{2\sigma^2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) R(\tau) d\tau,$$

ahol $R(\tau)$ az η_t^* folyamat korrelációs függvénye, melynek értéke

$$(11) \qquad R(\tau) = \frac{\mathbf{E}(\eta_t^* \eta_{t-\tau}^*) - I^2}{\sigma^2} = \frac{\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t-\tau, v) f(t,v) dH(v) \right] dt.$$

$R(\tau)$ τ-nak páros függvénye. A (10) kifejezésből kiadódik, hogy a T időre közepelt anódáram szórása arányos $\sqrt{\varepsilon I}$-vel, csak az arányossági tényező nem $1/\sqrt{T}$, hanem olyan függvény, amely $T = 0$-nál is véges értéket vesz fel. A T időre közepelt áram eloszlása elvben megadható, de nagyon bonyolult formulák alkalmazását teszi szükségessé.

C) *Az anódáram frekvencia spektruma.* W. SCHOTTKY (C) formulája szerint a $(\nu, \nu + \Delta\nu)$ frekvenciasávra eső teljesítmény: $2\varepsilon I \Delta\nu$. Ha az η_t^* áram frekvencia spektrumát $G(\nu)$ függvény írja le, amely a $(0, \nu)$ frekvenciasávra eső teljesítményt szolgáltatja, úgy erre fennáll, hogy $G(0)=I^2$ és $0<\nu<\infty$ értékekre $G(\nu)$ differenciálható éspedig

(12) $$G'(\nu)=8\pi^2\lambda\int_0^\infty |A(2\pi\nu, v)|^2 dH(v),$$

ahol

(13) $$A(\omega, v)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(t, v)e^{-i\omega t}dt.$$

A $G(\nu)$ spektrális eloszlásfüggvény fizikai jelentése a következő: Ha az η_t^* áramot egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_t^{*2}dt\right\} = I^2+\sigma^2$$

és ennek a teljesítménynek a különböző frekvencia-tartományokra való eloszlását szolgáltatja $G(\nu)$, amely megadja a $(0, \nu)$ frekvencia tartományban disszipált átlagteljesítményt.

A szakirodalomban az anódáram ingadozásával az ún. sörétzajjal kapcsolatban főleg az áram spektrális eloszlásával foglalkoznak. Erre vonatkozó legtöbb eredmény mellőzi a sztochasztikus folyamatok elméletét és ehelyett más elvekből kiindulva jut eredményre. Ezek közül W. SCHOTTKY [14], [15] és E. SPENKE [16] munkáit emeljük ki, akik a kvadratikus szuperpozíció és inkoherencia elveiből indulnak ki. S. O. RICE [12], zajokra vonatkozó cikkében a sztochasztikus folyamatok elméletének alapján áll, de nem tárgyalja a kérdést olyan általánosan, mint arra az említett jelenségek vizsgálatánál szükség van és a stacionárius állapot létezésének kérdésével egyáltalán nem foglalkozik. A matematikai irodalomban szereplő hasonló kérdések tárgyalása is eltérést mutat az ittenitől. Az itt szükséges általánosítással éppen [17] dolgozatunkban foglalkozunk, de ott csupán részecskeszámlálásokkal kapcsolatos kérdéseket tárgyalunk.

Az előzőkhöz még néhány megjegyzést kívánunk fűzni. A fenti eredmények megadásánál feltételeztük, hogy az elektronemisszió időben homogenitást mutat, ami abban jutott kifejezésre, hogy az elektronok kilépési sűrűségét, λ-t állandónak vettük fel. Előfordulhat természetesen olyan probléma is, amelynél ezzel a feltevéssel nem élhetünk, hanem λ-t is időtől függőnek kell felvenni. (Például periodikusan változó függvénynek.) Ekkor $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)du$.

Továbbá a fenti eredmények az elektroncsövek egyenáramú viselkedésére vonatkoznak csupán. Ha feltesszük, hogy az anódfeszültség időben változik, például váltakozóáramú működésről van szó, úgy az influált áram értéke nemcsak a repülési időtől, hanem a kilépés időpontjától is függ, azaz $f(u, v_0)$ helyett $f(t, t', v_0)$ függvényt kell tekinteni. Továbbá általában megengedhető, hogy a kilépési sebesség is függ a kilépés időpontjától, azaz $H(v)$ helyett $H(t, v)$ eloszlásfüggvénnyel kell számolni. A következőkben megengedjük $H(v)$-nek t-től való függését, de ezt külön nem tüntetjük fel.

A következő matematikai tárgyalásban a fent vázolt szempontokra tekintettel leszünk és ezért az eredményeket általánosabban fogalmazzuk meg, mint azt fent említettük.

4. §. A vizsgált sztochasztikus folyamatokra vonatkozó tételek

1. *Az általános eset.* Legyen értelmezve $0 \leqq t < \infty$ időpontokra egy Poisson-folyamat, amelynél a $(0, t)$ időközben előforduló események várható számát $\Lambda(t)$ monoton, nemcsökkenő, folytonos függvény jelöli, amelyre $\Lambda(0) = 0$. Tegyük fel, hogy minden egyes esemény bekövetkezésének időpontjában elindít egy véletlen jelet, amelynek nagyságát t időpontban $f(t, t', \chi)$ függvény írja le, ahol t' az esemény előfordulásának időpontja és χ egy véletlen paraméter. Feltesszük, hogy az egyes véletlen jelek lineárisan szuperponálódnak és tekintsük

$$\eta_t = \sum_{0 \leqq t_n \leqq t} f(t, t_n, \chi_n) \tag{14}$$

folyamatot, ahol $\{t_n\}$ sorozat jelöli a Poisson-folyamat eseményeinek előfordulási pontjait és a χ_n paraméterek az egyes eseményekhez tartozó véletlen paraméterek, amelyekről feltesszük, hogy egymástól és a $t_k (k \neq n)$ időpontoktól is függetlenek (a t_n-től való függőség általában megengedhető). Legyen $\mathbf{P}(\chi_n \leqq x) = H(x)$, ahol az esetleges függést t-től nem tüntettük fel. Legyen továbbá $\mathbf{P}(\eta_t \leqq x) = F(t, x)$. Most $F(t, x)$ eloszlásfüggvény meghatározását tűzzük ki feladatul.

Vezessük be az η_t valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, azaz legyen

$$\Phi(t, \omega) = \mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(t, x).$$

$\Phi(t, \omega)$ ismeretében az $F(t, x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. (Lásd pl. H. CRAMÉR [1] 93. o.) $\Phi(t, \omega)$ meghatározására most a következő tételt bizonyítjuk be:

1 TÉTEL: *Ha*

$$\varphi(t, u; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t,u,x)} dH(x) \tag{15}$$

integrál $0 \leq u \leq t$ *értékekre majdnem mindenütt létezik, úgy*

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left\{-\int_0^t [1-\varphi(t, t-u, \omega)] dA(u)\right\}. \tag{16}$$

BIZONYÍTÁS: Felhasználjuk a következő segédtételt, amelyet [17] dolgozatunkban bebizonyítottunk.

SEGÉDTÉTEL: *Azon feltétel mellett, hogy a Poisson-folyamatban* $(0, t)$ *időközben pontosan* n *esemény fordult elő, ennek az* n *esemény időpontjainak együttes eloszlása megegyezik* n *számú, egymástól független véletlen pont eloszlásával a* $(0, t)$ *intervallumon, amelyek mindegyikére* $A(x)/A(t)$ *annak a valószínűsége, hogy* $(0, x)$ *közbe esik* $(0 \leq x \leq t)$.

Most jelölje ξ_t valószínűségi változó a $(0, t)$ időintervallumban a Poisson-folyamatban előforduló események számát. Ekkor $\xi_t = n$ esemény valószínűségét (4) szolgáltatja. Másrészt a feltételes várható értékekre vonatkozó ismert összefüggés alapján felírható

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_t = n)\, \mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = n\}.$$

Itt $\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = 0\} = 1$ és (15) tekintetbevételével segédtételünk alapján

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = 1\} = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi(t, t-u, \omega)\, dA(u). \tag{17}$$

Továbbá ugyancsak segédtételünk alapján felírható, hogy

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = n\} = [\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = 1\}]^n,$$

ugyanis ekkor η_t úgy tekinthető, mint n számú független, egyforma eloszlású valószínűségi változó összege, melyek közös karakterisztikus függvénye (17). A behelyettesítéseket elvégezve nyerjük a bizonyítandó (16) összefüggést.

Vezessük be most a következő jelöléseket

$$\lambda_j(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t, u, x)]^j\, dH(x), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ezek segítségével az η_t valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét a következőképpen fejezhetjük ki:

Ha η_t várható értéke létezik, úgy fennáll erre, hogy

$$\mathbf{E}\{\eta_t\} = -i\left(\frac{d \log \Phi(t, \omega)}{d\omega}\right)_{\omega=0} = \int_0^t \lambda_1(t, t-u)\, dA(u)$$

és η_t szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t\} = -\left(\frac{d^2 \log \Phi(t,\omega)}{d\omega^2}\right)_{\omega=0} = \int_0^t \lambda_2(t, t-u)\, dA(u).$$

Hasonlóképpen határozhatjuk meg η_t magasabbrendű félinvariánsait, illetve momentumait a $\lambda_j(t, u)$ kifejezések segítségével, amennyiben azok léteznek. Az η_t változó j-edik félinvariánsa

$$A_j(t) = (-i)^j \left(\frac{d^j \log \Phi(t,\omega)}{d\omega^j}\right)_{\omega=0} \int_0^t \lambda_j(t, t-u)\, dA(u).$$

2. *A homogén eset.* Most foglalkozzunk azzal a speciális esettel, midőn az alapul szolgáló folyamat időben homogén, λ eseménysűrűséggel, azaz $A(t) = \lambda t$, továbbá a jelek időbeli lefolyását leíró függvény nem függ külön a kezdőponttól, hanem csupán attól, hogy mióta tart a jel, azaz $f(t, u, x)$ helyett $f(t-u, x)$ alakú függvénnyel kell számolnunk, végül a χ_n paraméter t_n-től is független. Ekkor (15) helyett írható, hogy

$$\varphi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(u,x)}\, dH(x)$$

és η_t karakterisztikus függvénye most

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1 - \varphi(u; \omega)]\, du\right\}$$

és

$$\mathbf{E}\{\eta_t\} = \lambda \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u, x)\, dH(x)\right] du,$$

továbbá

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t\} = \lambda \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f(u, x))^2\, dH(x)\right] du$$

és általában η_t j-edik félinvariánsa:

$$A_j(t) = \lambda \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f(u, x))^j\, dH(x)\right] du.$$

Most bebizonyítjuk a következő határeloszlástételt:

2. TÉTEL: *Ha a fentemlített homogén folyamatra szorítkozunk és feltesszük, hogy*

(18) $$\int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(u, x)|\, dH(x)\right] du < \infty$$

úgy létezik $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F(x)$ *határeloszlásfüggvény és ennek karakterisztikus* *függvényére $\Phi(\omega)$-ra fennáll, hogy*

$$\Phi(\omega) = \exp\left\{-\lambda \int_0^\infty [1-\varphi(u,\omega)]\, du\right\}.$$

BIZONYÍTÁS: P. LÉVY és H. CRAMÉR tételéből (l. pl. H. CRAMÉR [1] 102. o.) következik, hogy ha $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t,\omega) = \Phi(\omega)$ létezik és $\Phi(\omega)$ az $\omega=0$ helyen folytonos, úgy $\lim\limits_{t\to\infty} F(t,x) = F(x)$ is létezik és $F(x)$ karakterisztikus függvénye éppen $\Phi(\omega)$. Tehát tételünk be van bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t [1-\varphi(u,\omega)]\, du$$

határérték létezik és az $\omega=0$ helyen folytonos.

Legyen

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(u,x)|\, dH(x)$$

úgy fennáll

$$|1-\varphi(u,\omega)| \leq \omega M(u)$$

és így

$$\left|\int_0^t [1-\varphi(u,\omega)]\, du\right| \leq \omega \int_0^t M(u)\, du.$$

Innen (18) szerint következik, hogy a kérdéses határérték létezik minden ω-ra és az is látszik, hogy az $\omega=0$ helyen folytonos. Ezzel kimutattuk a 2. tétel helyességét.

3. *A stacionárius folyamat.* A fizikai alkalmazásokban rendszerint olyan törvényszerűségek megállapítása bír fontossággal, amelyek általános érvényűek és nem függnek a speciális körülményektől. Így, ha az η_t folyamatot egy speciális t időpontban vizsgáljuk, akkor az így megállapított sajátságok magukon viselik a $t=0$ időpontban érvényes kezdeti állapot hatását. A fizikai vizsgálatokban a kezdeti állapot hatását úgy küszöbölik ki, hogy áttérnek a stacionárius megoldásra. Persze, ilyenkor külön vizsgálatot igényel annak kimutatása, hogy a kezdeti állapottól függetlenül létezik stacionárius határállapot, ún. egyensúlyi állapot. Ezeket szem előtt tartva tekintsük most a homogén folyamatot, mégpedig feltéve, hogy az végtelen hosszú ideje tart, azaz, tekintsük az

(19) $$\eta_t^* = \sum_{-\infty < t_n \leq t} f(t-t_n, \chi_n)$$

folyamatot, ahol most az összegezés kiterjed az alapul vett Poisson-folyamat valamennyi t időpont előtt bekövetkező eseményére. Erre a következő tételt bizonyítjuk be:

3. TÉTEL: *Ha feltételezzük, hogy*

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty |f(u,x)|\,dH(x)\right] du < \infty \tag{20}$$

úgy a (19) *alatt értelmezett* η_t^* *folyamat minden* t *értékre* 1 *valószínűséggel létezik és* η_t^* *eloszlása* t*-től független éspedig* $\mathbf{P}(\eta_t^* \leqq x) = F(x)$ *ahol* $F(x)$ *a* 2. *tételben megadott határeloszlás, azaz, fennáll*

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t^*}\} = \exp\left\{-\lambda\int_0^\infty [1-\varphi(u,\omega)]\,du\right\}. \tag{21}$$

BIZONYÍTÁS. Csupán azt kell kimutatnunk, hogy az η_t^* folyamat 1 valószínűséggel létezik. Ebből már következik a 2. tételben bebizonyított határeloszlás létezése is. Ekkor pedig $\mathbf{P}(\eta_t^* \leqq x) = F(x)$ állítás nyilvánvalóan igaz.

Mindenekelőtt észrevesszük, hogy η_t^* előállítható független valószínűségi változók végtelen összegeként a következőképpen: $\eta_t^* = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + \cdots$, ahol

$$\zeta_n = \sum_{t-nh < t_n \leqq t-(n-1)h}' f(t-t_n, \chi_n),$$

azaz a $(-\infty, t)$ intervallumot t-től visszafelé haladva h hosszúságú rész-intervallumokra bontjuk és ζ_n jelöli η_t^* kifejezésében azt az adalékot, amelyet az n-edik intervallumban előforduló események okoznak.

Arra nézve pedig, hogy független valószínűségi változók összegének végtelen sora 1 valószínűséggel mikor konvergens, szükséges és elegendő feltételt adott A. N. KOLMOGOROV [9] (lásd még P. R. HALMOS [6], 199. o.) Ha feltesszük, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\{|\zeta_n|\} < \infty \tag{22}$$

úgy KOLMOGOROV feltételei könnyen beláthatóan teljesülnek és ekkor $\lim_{n\to\infty}(\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n)$ határérték 1 valószínűséggel létezik. Ha (20) fennáll, úgy könnyen belátható, hogy esetünkben a fenti sor konvergens és így KOLMOGOROV tételéből következik, hogy η_t^* 1 valószínűséggel létezik.

Megjegyezzük, hogy (22) fennállásából $\lim_{n\to\infty}(\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n)$ 1 valószínűséggel való létezése akkor is következik, ha nem tesszük fel, hogy a változók függetlenek. Ez éppen BEPPO LEVI ismert tétele. Sőt, ez a tény közvetlenül is bebizonyítható MARKOV nem negatív valószínűségi változókra vonatkozó ismert egyenlőtlensége alapján. (Lásd [18] 193. o.)

Mint említettük a 3. tételből a 2. tétel nyilvánvalóan következik. J. L. DOOB [3] (119. o.) ennek a fordítottját is bebizonyította, kimutatván, hogy független valószínűségi változók összegének eloszlásban való konvergenciája, valószínűségi mértékben való konvergenciája és 1 valószínűséggel való konvergenciája egymással ekvivalensek.

A fentiekből egyszerűen következik, hogy most

$$\mathbf{E}\{\eta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u, x) dH(x) \right] du, \tag{23}$$

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f(u, x))^2 dH(x) \right] du \tag{24}$$

és η_t^* j-edik félinvariánsa

$$\Lambda_j^* = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f(u, x))^j dH(x) \right] du,$$

feltéve, hogy a fenti integrálok léteznek.

A fenti formulák igazolják a 3. § (6), (7), (8) és (9) eredményeit.

4. *A stacionárius folyamat korrelációs függvénye.* Legyen a rövidség kedvéért $\mathbf{E}\{\eta_t^*\} = m$ és $\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} = \sigma^2$. Az η_t^* folyamat korrelációs függvényét, szokásosan

$$R(\tau) = \frac{\mathbf{E}\{\eta_t^* \eta_{t-\tau}^*\} - m^2}{\sigma^2} \tag{25}$$

kifejezéssel definiáljuk, amely minden τ-ra értelmezve van és amely létezik, ha σ^2 véges.

4. TÉTEL: *Ha $\sigma^2 < \infty$, úgy a (25) alatt definiált $R(\tau)$ korrelációs függvény létezik éspedig fennáll, hogy*

$$R(\tau) = \frac{\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u, x) f(u-\tau, x) dH(x) \right] du. \tag{26}$$

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az $\theta_t^* = \eta_t^* + \eta_{t-\tau}^*$ folyamatot. Ez a folyamat szintén létezik és csupán abban különbözik η_t^*-től, hogy egy $u = 0$ időpontban kezdődő jel időbeli lefolyását nem $f(u, x)$, hanem $g(u, x) = f(u, x) + f(u-\tau, x)$ szolgáltatja. Ekkor pedig (23) segítségével felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\theta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f(u, x) + f(u-\tau, x))^2 dH(x) \right] du.$$

Másrészt, $\theta_t^* = \eta_t^* + \eta_{t-\tau}^*$ tekintetbevételével felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\theta_t^*\} = 2\sigma^2(1 + R(\tau)),$$

ugyanis $\mathbf{D}^2(\eta_t^*) = \mathbf{D}^2(\eta_{t-\tau}^*) = \sigma^2$. $\mathbf{D}^2\{\theta_t^*\}$ fenti két kifejezésének összehasonlításából kiszámítható $R(\tau)$, amely megegyezik (26)-tal.

A fentiekkel igazoltuk a (11) eredmény helyességét. A (10) képlet pedig egyszerű meggondolásokkal megkapható $R(\tau)$ ismeretében.

5. *A stacionárius folyamat harmonikus analízise.* A. JA. HINCSIN [8] munkájában S. BOCHNER tételére hivatkozva bebizonyítja, hogy annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $R(\tau)$ egy stacionárius folyamat korrelációs függvénye legyen, az, hogy előállítható legyen a következő alakban:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\tau\, dF(\omega), \tag{27}$$

ahol $F(\omega)$ valószínűségeloszlásfüggvény. $F(\omega)$-t a folyamat *spektrális eloszlásfüggvényének* nevezzük.

A fizikában egy ilyen sztochasztikus folyamat spektrális eloszlásfüggvénye alatt a

$$G(\nu)=m^2+\sigma^2[F(2\pi\nu)-F(-2\pi\nu)]$$

függvényt értik, amelynek szemléletes jelentése a következő: Ha η_t^*-t áramnak tekintjük, amelyet egységnyi ellenálláson vezetünk keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{E}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_t^{*2}dt\right\}=\mathbf{E}\{\eta_t^{*2}\}=m^2+\sigma^2$$

és ennek a teljesítménynek a $0\leq\nu<\infty$ frekvencia tartományra való eloszlását szolgáltatja $G(\nu)$, amely megadja a $(0,\nu)$ frekvenciasávban leadott teljesítményt. Itt ν közönséges frekvenciát jelöl, a körfrekvencia $\omega=2\pi\nu$.

$F(\omega)$ meghatározására a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy $f(u,x)$ majdnem minden véges x értékre u-ban abszolút és négyzetesen integrálható függvény, azaz $p=1,2$-re*

$$\int_0^{\infty}|f(u,x)|^p du<\infty$$

és legyen

$$A(\omega,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(u,x)e^{-i\omega u}du. \tag{28}$$

Ekkor a Hincsin-féle $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvény minden ω-ra differenciálható és fennáll, hogy

$$F'(\omega)=\frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^{\infty}|A(\omega,x)|^2dH(x). \tag{29}$$

Innen következik, hogy $G(0)=m^2$ és $0<\nu<\infty$ értékekre $G(\nu)$ differenciálható és

$$G'(\nu)=8\pi^2\lambda\int_0^\infty |A(2\pi\nu, x)|^2 dH(x).$$

BIZONYÍTÁS: $R(\tau)$ ismeretében a Hincsin-féle (27) kifejezés inverze segítségével $F(\omega)$ egyértelműen meghatározható. A bizonyítás részleteit illetően utalunk [17] dolgozatunkra.

MEGJEGYZÉS: H. CRAMÉR [2] vizsgálataira hivatkozva az η_t^* folyamat a következő sztochasztikus integrál alakjában állítható elő:

$$\eta_t^* = m+\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda). \tag{30}$$

Itt $Z(\lambda)$ a $-\infty<\lambda<\infty$ értékekre értelmezett additív és ortogonális növekményű folyamat, amelyre $\mathbf{E}\{Z(\lambda)\}=0$ valamennyi λ-ra és $\Delta\lambda>0$-ra

$$\mathbf{E}\{|Z(\lambda+\Delta\lambda)-Z(\lambda)|^2\}=F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda).$$

A (30) integrál úgy értendő, hogy

$$\mathbf{E}\left\{\left|\frac{\eta_t^*-m}{\sigma}-\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda)\right|^2\right\}=0.$$

A (30) előállítás szemléletesen azt jelenti, hogy az $\frac{\eta_t^*-m}{\sigma}$ folyamat felbontható különböző $\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ frekvenciájú szinuszhullámok összegére. Az egyes λ frekvenciájú komponensek amplitudói és fázisai véletlen menynyiségek, de érvényes, hogy a $(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ frekvenciasávba eső komponensek amplitudóinak négyzetösszege $F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)$, ahol $F(\lambda)$ a folyamat spektrális eloszlásfüggvénye.

Megjegyezzük továbbá, hogy (J. L. DOOB [4] 335 o.), hogy ha $\lambda\to\infty$ (eseménysűrűség) úgy az $\frac{\eta_t^*-m}{\sigma}$ folyamat egy olyan ξ_t Gauss-folyamathoz konvergál, amelyre $\mathbf{E}(\xi_t)=0$, $\mathbf{D}^2(\xi_t)=1$ és $\mathbf{E}(\xi_t\xi_{t-\tau})=R(\tau)$, ahol $R(\tau)$ korrelációs függvényt (26) szolgáltatja.

5. §. Az elektroncső terében levő elektronok számának eloszlása

RÉNYI ALFRÉD vetette fel a kérdést, hogy egy adott pillanatban a térben levő elektronok száma milyen eloszlást mutat. [11] dolgozatában kimutatta, hogy ez a számosság Poisson-eloszlást követ. Ez az eredmény dolgozatunk (16) képletéből is következik, ha az $f(u, v)$ függvényt speciálisan úgy választjuk meg, hogy $f(u,v)=1$, ha $0 \leq u \leq \tau(v)$ és $f(u,v)=0$ egyébként, ahol $\tau(v)$ jelenti egy v kezdősebességű elektron repülési idejét. Ekkor $F(t,x)$ szolgáltatja t időpontban a térben levő elektronok számának eloszlásfüggvényét. A következőkben azonban a 4. §-ban kimondott segédtétel felhasználásával ennek a ténynek egyszerű bizonyítását adjuk meg.

Jelölje $\tau(t)$ egy a katódról t időpontban kilépő elektron repülési idejét (az elektroncső terében való tartózkodási idejét). Ez a szám valószínűségi változó, amely függ az elektron kezdősebességétől és esetleg egyéb mennyiségektől. A $\tau(t)$ változó eloszlásfüggvénye legyen $\mathbf{P}(t \leq x) = R(t,x)$. Annak a valószínűsége, hogy a $(0,t)$ intervallum egy „véletlenül" ($A(u)/A(t)$ eloszlástörvénnyel) választott pontjában kilépő elektron t időpontban a térben tartózkodik:

$$p_t = \frac{1}{A(t)} \int_0^t [1 - R(u, t-u)]\, dA(u).$$

Ha ζ_t jelöli t időpontban a térben tartózkodó elektronok számát, úgy a 4. §-ban említett segédtétel figyelembevételével

$$\mathbf{P}(\zeta_t = k) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!} \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k} = e^{-A(t)p_t} \frac{[A(t)p_t]^k}{k!} \tag{31}$$

adódik. Ugyanis a szóban forgó esemény több, egymást kizáró módon jöhet létre: $(0,t)$ időközben $n = k, k+1, k+2, \ldots$ elektron lép ki a katódból és ha n elektron lépett ki, akkor ezek közül t időpontban k tartózkodik a térben és $n-k$ nem. A fentiek szerint tehát ζ_t valóban Poisson-eloszlást követ:

$$\mathbf{E}\{\zeta_t\} = p_t A(t) = \int_0^t [1 - R(u, t-u)]\, dA(u)$$

várható értékkel.

Tekintsük most a stacionárius folyamatot (λ eseménysűrűséggel) és legyen $R(t,x) = R(x)$, azaz $R(t,x)$ nem függ t-től, úgy ζ_t^*-nak, a t időpontban a térben levő elektronok számának, eloszlását

$$\mathbf{P}(\zeta_t^* = k) = e^{-\lambda\varrho} \frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}$$

írja le, ahol

$$\varrho = \int_0^{\infty} x\, dR(x).$$

Ez az eredmény a (31) képlet $t \to \infty$ esetre vett határértékeként adódik:

6. §. Példák

1. Tegyük fel, hogy a legegyszerűbb modellel állunk szemben, mégpedig az egyes elektronok által okozott áramlökéseket a (2)

$$f(t,0)=\begin{cases}\dfrac{2\varepsilon}{\tau_0^2}t & \text{ha} \quad 0\leqq t\leqq \tau_0\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

függvény írja le. Itt feltettük, hogy a kezdősebesség $v_0=0$ (állandó) és nem valószínűségi változó. Ekkor $H(v)=0$, ha $v<0$ és $H(v)=1$, ha $v\geqq 0$.

Most legyen az anódáram átlagértéke

$$\mathbf{E}\{\eta_t^*\}=I$$

ekkor $\lambda=I/\varepsilon$ és (7) szerint az anódáram szórása

$$\mathbf{D}\{\eta_t^*\}=\sqrt{\frac{4\varepsilon I}{3\tau_0}}, \tag{32}$$

ahol

$$\tau_0=\frac{2d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}}.$$

Most (8) szerint

$$\Phi^*(\omega)=e^{-\lambda\tau_0}\exp\frac{\lambda\tau_0^2}{2i\omega\varepsilon}\left(e^{\frac{2i\omega\varepsilon}{\tau_0}}-1\right)$$

és ennek megfordításával azt kapjuk, hogy az η_t^* anódáram eloszlásfüggvénye

$$F(x)=e^{-\lambda\tau_0}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda\tau_0}\frac{(\lambda\tau_0)^n}{n!}\int_0^{x\tau_0/2\varepsilon}f_n(z)\,dz,$$

ahol

$$f_n(z)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{[z]}(-1)^j\binom{n}{j}(z-j)^{n-j}.$$

$F(x)$ a $0<x<\infty$ értékekre differenciálható és pedig

$$F'(x)=\frac{e^{-\lambda\tau_0}\tau_0}{2\varepsilon}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x\tau_0}{2\varepsilon}\right]}\frac{(-1)^j(\lambda\tau_0)^j}{j!}\frac{J_{j-1}\left(2i\sqrt{\lambda\tau_0\left(\dfrac{x\tau_0}{2\varepsilon}-j\right)}\right)}{\left(i\sqrt{\lambda\tau_0\left(\dfrac{x\tau_0}{2\varepsilon}-j\right)}\right)^{j-1}},$$

ahol

$$J_\varrho(ix)=\left(\frac{ix}{2}\right)^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+\varrho+1)}$$

a Bessel-függvény definíciója szerint.

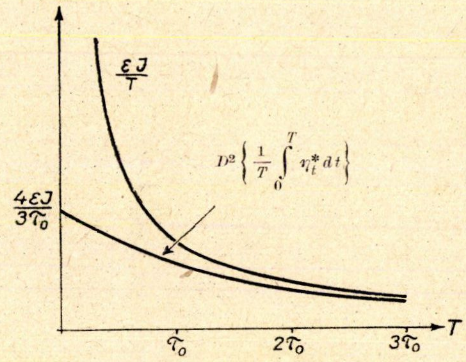
Az $R(\tau)$ korrelációs függvényre most (11) alapján

$$(33)\qquad R(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{3}{2}\dfrac{|\tau|}{\tau_0}+\dfrac{1}{2}\dfrac{|\tau|^3}{\tau_0^3} & \text{ha } 0\leqq|\tau|\leqq\tau_0\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

adódik, és a T időre közepelt áram szórásnégyzete (10) szerint

$$(34)\qquad \mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta_t^*\,dt\right\}=\begin{cases}\dfrac{4\varepsilon I}{3\tau_0}\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{T}{\tau_0}+\dfrac{1}{20}\dfrac{T^3}{\tau_0^3}\right] & \text{ha } 0\leqq T\leqq\tau_0\\[2ex] \dfrac{4\varepsilon I}{3\tau_0}\left[\dfrac{3}{4}\dfrac{\tau_0}{T}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\tau_0}{T}\right)^2\right] & \text{ha } \tau_0\leqq T<\infty.\end{cases}$$

Ha T igen nagy τ_0-hoz képest, úgy a szórásnégyzet jó közelítéssel $\varepsilon I/T$ és ez egyezik meg W. SCHOTTKY (B) formulájában kifejezésre jutó eredményével. (5. ábra).



5. *ábra*

Most $f(t, 0)$ frekvencia spektruma

$$A(\omega)=\frac{\varepsilon}{\pi\theta^2}\left[(1+i\theta)e^{-i\theta}-1\right],$$

ahol $\theta=\omega\tau_0$ és

$$|A(\omega)|^2=\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2\frac{2(1-\cos\theta)+\theta(\theta-2\sin\theta)}{\theta^4}.$$

$G(0)=I^2$ és (12) szerint

$$(35)\qquad G'(\nu)=8\varepsilon I\,\frac{2(1-\cos\theta)+\theta(\theta-2\sin\theta)}{\theta^4}=2\varepsilon I\left[1-\frac{1}{18}\theta^2+\ldots\right],$$

ahol $\theta=2\pi\nu\tau_0$. (6. ábra).

A $(\nu, \nu+\Delta\nu)$ frekvenciasávban leadott átlagos teljesítmény

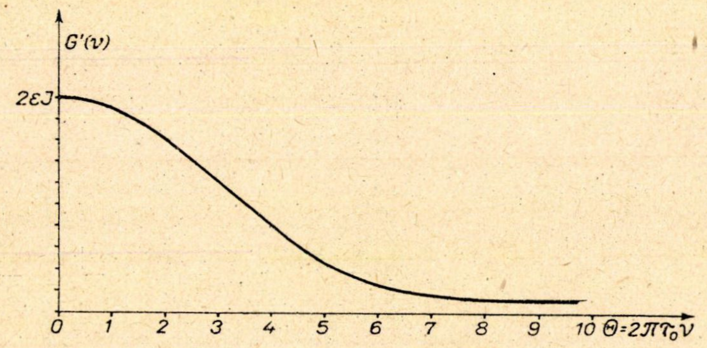
$$G(\nu+\Delta\nu)-G(\nu)\simeq G'(\nu)\Delta\nu\simeq 2\varepsilon I\Delta\nu$$

és ezen utóbbi közelítés egyezik meg W. SCHOTTKY (C) eredményével.

A fenti közelítés 3%-ig pontos, ha $\theta = 2\pi\nu\tau_0 < 0{,}4$ azaz, ha

$$\nu < \frac{2\sqrt{U}}{d}\, MHz,$$

itt U voltokban és d cm-ekben értendő.



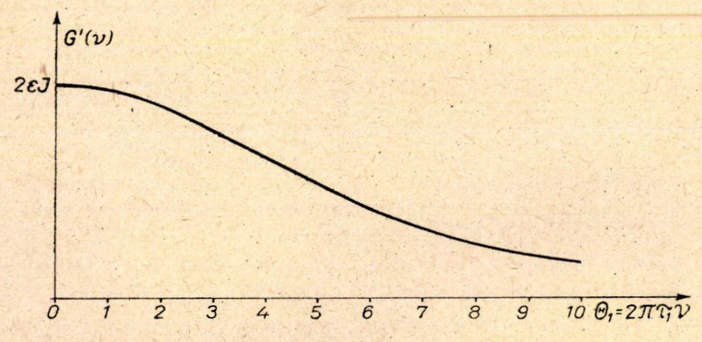
6. *ábra*

2. Ha a Langmuir-féle síkdióda modellel számolunk, akkor az egyes elektronok által létrehozott áramlökések időbeli lefolyása (3) szerint

$$f(t,0) = \begin{cases} \dfrac{4\varepsilon}{\tau_1^4} t^3 & \text{ha } 0 \leqq t \leqq \tau_1 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol

$$\tau_1 = \frac{3d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}} = \frac{3}{2}\tau_0.$$



7. *ábra*

Ekkor az anódáram szórása

$$\text{(36)} \qquad \mathbf{D}\{\eta_t^*\} = \sqrt{\frac{16\varepsilon I}{7\tau_1}} = \sqrt{\frac{32\varepsilon I}{21\tau_0}},$$

azaz 7%-kal több a tértöltés elhanyagolásával számított esetnél. Megjegyezzük, hogy ez az eredmény nem tévesztendő össze azzal az ismert ténnyel, hogy a tértöltés következtében fellépő potenciálvölgy csökkenti az anódáram szórását. A fenti eseteknél még nem lép fel potenciálvölgy, ugyanis az első példánál $U(x) = Ux/d\, (0 \leq x \leq d)$ függvény írja le a potenciálváltozást az elektroncső belsejében és a második példánál $U(x) = U(x/d)^{4/3}\, (0 \leq x \leq d)$. Most $\theta_1 = \omega\tau_1$ jelöléssel

$$A(\omega) = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_1^4}\left[(i\theta_1^3 + 3\theta_1^2 - 6i\theta_1 - 6)e^{-i\theta_1} + 6\right]$$

és $0 < \nu < \infty$ értékekre a frekvencia spektrum sűrűsége

(37) $$G'(\nu) =$$
$$2\varepsilon I\,\frac{576 + 16\left[(3\theta_1^2 - 6)^2 + (\theta_1^3 - 6\theta_1)^2\right] + 192\left[(\theta_1^3 - 6\theta_1)\sin\theta_1 + (3\theta_1^2 - 6)\cos\theta_1\right]}{\theta_1^8}$$

ahol $\theta_1 = 2\pi\nu\tau_1$. (7. ábra). Sorbafejtéssel azt kapjuk, hogy:

$$G'(\nu) = 2\varepsilon I\left[1 - \frac{14}{525}\theta_1^2 + \ldots\right].$$

Amint látjuk, ebben az esetben is jó közelítésül alkalmazható W. Schottky (C) formulája, kicsiy θ_1 értékekre.

IRODALOM

[1] H. Cramér, Mathematical Methods of Statistics, *Princeton*, (1946).
[2] H. Cramér, On harmonic analysis in certain functional spaces, *Ark. Math. Astro. Fys.* **28B** (1942), 1—7.
[3] J. L. Doob, Stochastic processes, New-York, (1953).
[4] J. L. Doob, Time series and harmonic analysis, *Procedings of the First Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob.*, (1949), 303—343.
[5] K. Florek, E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, Remarks on the Poisson stochastic process I., *Studia Mathematica*, **13** (1953), 122—1[illegible].
[6] P. R. Halmos, Measure Theory, New-York, (1950).
[7] A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, (1933)
[8] A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationär stochastischen Processe, *Mathematische Annalen*, **109** (1934), 604—610.
[9] A. N. Kolmogorov, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Mathematische Annalen*, **99** (1928), 309—319.
[10] E. Marczewski, Remarks on the Poisson process II., *Studia Mathematica* **13** (1953), 130—136.
[11] A. Rényi, On some problems concerning Poisson processes, *Publicationes Mathematicae*, Debrecen **2** (1951), 66—73.
[12] S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise, *Bell System Technical Journal*, **23** (1944) 282—332, **24** (1945), 46—156.

[13] C. RYLL-NARDZEWSKI, On the non-homogeneous Poisson-process I., *Studia Mathematica*, **14** (1954), 124—128.

[14] W. SCHOTTKY, Uber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern, *Annalen der Physik*, **57** (1918), 541—567.

[15] W. SCHOTTKY, Die Raumladungsschwänckung des Schratteffektes I., Theoretische Grundlagen und Hauptergebnisse, *Wiss. Veröff. Siemens-Konzern*, **16** (1937), 1—18.

[16] E. SPENKE, Die Frequenzabhängigkeit des Schrvtteffektes, *Wiss. Veröff. Siemens-Konzern*, **16** (1937), 127—136.

[17] L. TAKÁCS, Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól, *MTA III. Oszt. Közl.*, **4** (1954), 473—504.

[18] L. TAKÁCS, Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról, *MTA III. Oszt. Közl.*, **5** (1955) 187—197.

ÁLTALÁNOS METRIKUS VONALELEMTÉRRE ALAPOZOTT TÉRELMÉLET*

HORVÁTH JÁNOS és MOÓR ARTHUR

Bevezetés

Az utóbbi években a hullámterek kvantumelméletében igen fontos szerepet játszottak a H. YUKAWA [10—13] által kiépített bilokális térelméletek. Ezekben a bilokális térelméletekben ugyanis a kvantált terek jólismert divergencianehézségei igen érdekes módon eliminálhatók, azonkívül a bilokális térelméletek keretében igen természetes lehetőség nyílik a tömegkvantálásra, ami az elemi részecskék elméletének egyik legjelentősebb problémája. YUKAWA az elméletét az operátorkalkulus segítségével meglehetősen absztrakt módon építette ki. Fontossága miatt célszerűnek tartjuk ezt az érdekes elméletet geometriai szempontból is megalapozni. Ezáltal ugyanis világosabban mutatkozik meg a bilokalitás geometriai jelentése.

E célból a következőkben a vonalelemsokaságok egy általános metrikus geometriáját építjük ki, amely a már jólismert FINSLER-geometriát speciál esetként tartalmazza. Célunkat lényegileg azáltal fogjuk megvalósítani, hogy a bilokális terek alapelemeit a vonalelemsokaságok alapelemeivel hozzuk öszszefüggésbe.

Megjegyezzük még, hogy ennek az általános metrikus geometriának nemcsak a bilokális terek geometrizálásánál van jelentősége, hanem mindig alkalmazható, ha valamilyen fizikai térelméletben a tér anizotrópiáját kell kihangsúlyoznunk.

Ismeretes, hogy az anyag anizotrópiájának a jellemzésére már a FINSLER-geometria is alkalmas, [2], [9] amennyiben a tér geometriai objektumai egy metrikus alapfüggvényből levezethetők. Ha azonban a tér geometriai szerkezetét közvetlenül a tér metrikus alaptenzorával jellemezzük, amely alaptenzor azonban nem vezethető le egy alapfüggvényből — mint a FINSLER-térben —, akkor egy általánosabb geometriát kapunk, amely a FINSLER-geometriát mint speciál esetet tartalmazza.

* Bemutatta prof. J. A. SCHOUTEN, a Holland Akadémia 1955. május 21-én tartott ülésén.

1. §. A bilokális terek és a vonalelemsokaságok közötti összefüggés meghatározása

A tér-idő kontinuum, amelyben az erőtér által létrehozott fizikai folyamatok lejátszódnak, egy négydimenziós tér-idő-sokaság, amelyben a teret meghatározó mennyiségek (mint pl. a térpotenciálok, ill. térerősség) skalárisokkal és tenzorokkal vannak ábrázoiva. A szokásos „lokális“ terekben ennek a négydimenziós tér-idő sokaságnak pszeudo-euklideszi metrikája van. A térelméletet ebben az esetben *tágabb értelemben vett térelméletnek* nevezzük.

Ezzel szemben *szűkebb értelemben vett térelmélet* alatt azon térelméleteket értjük, amelyek az erőtér fizikai hatását a még RIEMANNtól származó gondolatnak megfelelően, az eredeti tér geometriai struktúrájával magyarázzák. (Egy ilyen típusú térelméletre egy jól ismert példa az EINSTEIN-féle relativitáselmélet).

H. YUKAWA elméletében a teret meghatározó mennyiségek a négydimenziós tér-idő kontinuum pontpárjának függvényei, ami által a tér-idő kontinuum geometriai szempontból kibővítődik pontpárok sokaságává. Ez azt jelenti, — a fentebbiek szerint — hogy *a bilokális terek* YUKAWA-*féle elmélete a pontpárok terében egy tágabb értelemben vett térelmélettel azonos.*

A következőkben *a $\mathfrak{B}$ bilokális tér alapelemét* $(\underset{(1)}{x}, \underset{(2)}{x})$*-vel fogjuk jelölni.**

Az $(\underset{(1)}{x}, \underset{(2)}{x})$ pontpárt térszerűnek, fényszerűnek, ill. időszerűnek nevezzük, aszerint, hogy

$$(\underset{(1)}{x^\mu}-\underset{(2)}{x^\mu})(\underset{(1)}{x_\mu}-\underset{(2)}{x_\mu}) = g^*_{\mu\nu}(\underset{(1)}{x^\mu}-\underset{(2)}{x^\mu})(\underset{(1)}{x^\nu}-\underset{(2)}{x^\nu}) =$$
$$= (\underset{(1)}{x^0}-\underset{(1)}{x})^2-(\underset{(1)}{x^1}-\underset{(2)}{x^1})^2-(\underset{(1)}{x^2}-\underset{(2)}{x^2})-(\underset{(1)}{x^3}-\underset{(2)}{x^3})^2 \lesseqgtr 0$$

áll fenn. Amint ezen formulából közvetlenül látható, $g^*_{\mu\nu}$ a pszeudo-euklideszi tér konstans metrikus alaptenzorát jelenti. Így tehát fennáll, hogy

$$g^*_{00} = -g^*_{11} = -g^*_{22} = -g^*_{33} = +1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu.$$

Minthogy azok a fizikai jelenségek, amelyek a tér-idő kontinuum térszerű pontjaiban játszódnak le, nem befolyásolhatják egymást, célszerű feltételezni, hogy térszerű pontpárokban fennáll az

$$(\underset{(1)}{x}, \underset{(2)}{x}) = (\underset{(2)}{x}, \underset{(1)}{x}) \tag{1, 1}$$

összefüggés.

* x most és a következőkben mindig a négy pontkoordinátát: x^0, x^1, x^2, x^3-at fogja jelenteni.

Ezek után bevezetjük az ún. YUKAWA-*féle változókat* az

$$(1,2) \qquad x = \frac{1}{2}(\underset{(1)}{x} + \underset{(2)}{x}), \quad r = (\underset{(1)}{x} - \underset{(2)}{x})$$

definíciós-egyenletek segítségével.

A YUKAWA-féle elméletben az $(\underset{(1)}{x}, \underset{(2)}{x})$ pontpárok helyett mindig csak az (1, 2) képletben meghatározott (x, r) koordináták lépnek fel. Az (x, r) elemek sokaságát $\mathfrak{Y}$-*féle* YUKAWA-*térnek,* röviden $\mathfrak{Y}$-*térnek fogjuk nevezni.*

Mivel a YUKAWA-elméletben az r^μ koordináták az

$$r^\mu r_\mu = -\lambda^2$$

feltétellel normirozva vannak, következésképpen r^μ négy komponense nem független egymástól; ez másképpen azt jelenti, hogy az r^μ komponensek csak egy irányt határoznak meg. A $\mathfrak{Y}$ tér alapeleme tehát lényegileg *vonalelemnek* tekinthető.

Az r^μ-re tett normirozó feltétel azonban könnyen látható módon elejthető, ha feltételezzük, hogy *az egyes mennyiségek, ill. a tér geometriai objektumai az* r^μ-*ben nulladfokú homogén függvények.* A következőkben mindig ilyen jellegű mennyiségeket fogunk vizsgálni.

Éppen ezért célszerűnek látszik az $\mathfrak{Y}$-teret egy vele ekvivalens térrel, mégpedig az (x, r') *vonalelemek* $\mathfrak{L}$ *terével* helyettesíteni, ahol a r'^μ-kre fennáll:

$$r'^\mu = \varrho r^\mu.$$

Ebben az összefüggésben ϱ egy tetszés szerinti pozitív konstanst jelent.

Ezzel meghatároztuk a $\mathfrak{Y}$-tér és az $\mathfrak{L}$-tér közötti összefüggést, úgy hogy a következő §-okban most már rátérhetünk az $\mathfrak{L}$-terek geometriájának kiépítésére. A soron következő vizsgálatokat most már a YUKAWA-féle bilokális tárgyalásmódtól függetlenül fogjuk végezni.

2. §. Az $\mathfrak{L}$-tér metrizálása

Az általános differenciálgeometriai terekben a metrikát valamilyen metrikus alapfüggvénnyel szokás definiálni. Így pl. a FINSLER-geometriában az alapfüggvény segítségével görbék ívhosszát, a CARTAN-geometriában hiperfelületek felszínét lehet meghatározni. Mindkét esetben az alapfüggvényből származtatható egy kétindexű szimmetrikus tenzor, amely a tér metrikus alaptenzorának tekinthető és amelynek segítségével definiálható a tér vektorainak hossza és a hajlásszöge.

A RIEMANN-*geometriában a metrikát közvetlenül a tér metrikus alaptenzora határozza meg.* Ez az alaptenzor nem vezethető le a térben definiált műveletekkel valamilyen más alapfüggvényből, mint pl. a már említett FINSLER- és CARTAN-geometriákban. Mindazonáltal a RIEMANN-geometria nem általánosabb, mint a FINSLER-, vagy a CARTAN-féle geometria. Ennek oka abban áll, hogy a RIEMANN-geometria alapeleme a pont, míg a FINSLER-, ill. a CARTAN-geometriáé a vonalelem, ill. hiperfelületelem. Sőt a RIEMANN-geometria direkt speciál-esete ezen két utóbbinak. Ha ugyanis a FINSLER-, vagy a CARTAN-geometria alapfüggvényét alkalmasan választjuk, akkor ezen utóbbi terek metrikus alaptenzora csak a helytől fog függni, tehát a vonalelemnek, ill. hiperfelületelemnek a centruma, más szóval egy pont a metrikus alaptenzort már definiálja. Minthogy azonban mind a FINSLER-, mind a CARTAN-geometriában a metrikus alaptenzor a helynek még tetszész szerinti függvénye lehet, és csak a vonal-, ill. hiperfelületelemtől való függése nem tetszés szerinti, éppen ezért világos, hogy ezen két utóbbi geometria a legáltalánosabb RIEMANN-geometriát is magában foglalja [14—15].

A következőkben egy oly vonalelem geometriát fogunk kiépiteni, amely a FINSLER-geometriát speciálesetként tartalmazza. A metrikus vonalelemtér definíciója [14] munkában már megtörtént, az elmélet azonban a továbbiakban csak a FINSLER-geometria esetével foglalkozott. Az általánosítást azáltal érjük el, hogy a tér metrikus alaptenzorát nem egy alapfüggvényből származtatjuk, mint ahogy az a FINSLER-geometriában történik, hanem közvetlenül megadjuk, hasonlóan mint az a RIEMANN-geometriában szokásos. Természetesen *a jelen esetben a $g_{\mu\nu}$ metrikus alaptenzor az (x, v) alapelem függvénye lesz*, míg a RIEMANN-geometriában, mint ismeretes, egyedül csak az x-től függ.

Ezen általános geometria kiépítése éppen fizikai szempontból látszik indokoltnak, tekintve, hogy a FINSLER-geometriának *a* metrikus alaptenzorra vonatkozó relációja ti., hogy

$$(2, 1) \qquad g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\partial_{\dot{\mu}}\,\partial_{\dot{\nu}}(f^2)$$

alakú, ahol f a FINSLER-tér alapfüggvénye, a fizikai alkalmazások szempontjából egy elég szigorú és nehezen kezelhető feltételt jelent.

Geometriánk teljes kiépítéséhez mi is fogunk a metrikus alaptenzorra egy kikötést tenni, amely azonban gyengébb a FINSLER-térben tett kikötésnél, sőt a (2, 1) feltételt magában foglalja.

Mielőtt rátérnénk az $\mathfrak{L}$-tér metrikájának definiálására, megvizsgáljuk a *görbe fogalmát* az egyes tereinkben, ami a fizikai jelentősége miatt elméletünkben nagyfontosságú probléma. A görbék ívhosszának meghatározásánál azután az $\mathfrak{L}$-tér metrikája is levezethető.

A pontterekben a görbe differenciálgeometriai szempontból egy

$$(2, 2) \qquad x^{\alpha} = x^{\alpha}(t), \qquad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

egyparaméteres pontsorozatot jelent. Ezen fogalomnak a $\mathfrak{B}$-térben az alapelemeknek egy $(\underset{(1)}{x}(t), \underset{(2)}{x}(t))$ egyparaméteres sorozata felel meg; (2, 2) ugyanis egyúttal úgy tekinthető, mint a ponttér alapelemeinek valamilyen egyparaméteres sorozata. *Az* $(\underset{(1)}{x}(t), \underset{(2)}{x}(t))$ *sorozatot nevezzük a* $\mathfrak{B}$*-tér görbéjének.* Nyilvánvaló, hogy ekkor a megfelelő $(x(t), r(t))$ Yukawa*-féle változók is az* $\mathfrak{Y}$*-térben egy egyparaméteres sorozatot definiálnak, amelyet az* $\mathfrak{Y}$*-tér görbéjének tekintünk az* $r(t)$ *iránymezőre nézve.* Az $\mathfrak{L}$-tér ezzel analóg fogalma az $(x(t), v(t))$ vonalelemeknek egyparaméteres sorozatával egyenlő. *Az* $x(t)$ *sorozat az* $\mathfrak{L}$*-tér egy görbéjét jelenti a* $v(t)$ *iránymezőre nézve.* A görbe fogalma tehát úgy az $\mathfrak{Y}$-, mint az $\mathfrak{L}$-térben — a pontterekben szokásos fogalomtól eltérően — csak egy iránymezőre nézve van definiálva.

Ezen utóbbi terekben tehát a definíció a görbéknek azt a sajátságát emeli ki, hogy azok egyparaméteres pontsorozatok, míg az $\mathfrak{L}$-térben a görbét az alapelemek egyparaméteres sorozataként definiáltuk. Pontterekben a két eltérő definíció, amint az (2, 2)-ből közvetlenül látható, egybeesik. Úgyszintén az $\mathfrak{L}$-térben is egybeeső pontpárok esetében, a görbe fogalma megegyezik a (2, 2) által adott szokásos fogalommal.

A következőkben definiáljuk a transzformáció fogalmát a különböző tereinkben.

Definíció: *Valamely*

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x)$$

transzformáció koordinátatranszformációt jelent, ha a megadott függvények legalább 3-szor folytonosan differenciálhatók és

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial(\tilde{x})}{\partial(x)}\right| \neq 0.$$

Ennek megfelelően az $\mathfrak{Y}$-, ill. $\mathfrak{L}$-térben az alapelemek transzformációja

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x), \tilde{r}^{\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\varrho}} r^{\varrho}, \quad \text{ill.} \quad \tilde{x} = \tilde{x}(x), \tilde{v}^{\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\varrho}} v^{\varrho} \tag{2, 3}$$

képletekkel van definiálva.

Definíció: *Az* $\mathfrak{Y}$*- ill.* $\mathfrak{L}$*-tér tenzorai oly mennyiségek, amelyeknek* $T_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ *komponensei a* (2, 3) *transzformációra nézve a*

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} T_{\varkappa\lambda}^{\ \ \mu}$$

transzformációs törvénynek tesznek eleget.

Legyen ezek után adva az $\mathfrak{L}$-térben egy $g_{\mu\nu}(x, v)$ szimmetrikus tenzor, amelyet *metrikus alaptenzor*nak fogunk nevezni.

DEFINÍCIÓ: *Az $x^\mu = x^\mu(t)$ görbe hossza a $v^\mu = v^\mu(t)$ iránymezőre nézve:*

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \{g_{\mu\nu}(x, v)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\}^{1/2} dt, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}.$$

A metrikus alaptenzorral vektorok skaláris szorzata és hajlásszöge a szokásos módon értelmezhető. Ennek megfelelően a ξ^α, η^β vektorok skaláris szorzata:

$$(\xi, \eta) = \{g_{\mu\nu}\xi^\mu \xi^\nu\}^{1/2},$$

hajlásszöge pedig:

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{g_{\alpha\beta}\xi^\alpha \eta^\beta}{\{g_{\alpha\beta}\xi^\alpha \xi^\beta\}^{1/2}\{g_{\varrho\sigma}\eta^\varrho \eta^\sigma\}^{1/2}}.$$

Ha a $g_{\mu\nu}$ alaptenzor előállítható egy f alapfüggvényből a (2, 1) alakban, akkor az $\mathfrak{L}$ terünk éppen egy FINSLER-térrel azonos. A következőkben azonban a már mondott okokból *egy ilyen f függvény létezését nem fogjuk feltételezni.*

Bevezetjük a következő skaláris függvényt:

$$F(x, v) = \{g_{\mu\nu}(x, v)v^\mu v^\nu\}^{1/2}.$$

$F(x, v)$, amint az közvetlenül látható, v-ben elsőfokú homogén függvény ($g_{\mu\nu}$ ugyanis, mint az $\mathfrak{L}$-tér egy mennyisége nulladfokú homogén). Ennek segítségével könnyen definiálható a v^μ irányba mutató egységvektor; azonkívül az egyes mennyiségek homogenizálására is felhasználható. (Mint már említettük, az $\mathfrak{L}$-tér minden jellemző mennyiségének v-ben nulladfokú homogénnek kell lenni).

DEFINÍCIÓ: *Az l^μ egységvektor, amelynek iránya megegyezik támasztóelemének irányával a következő*

$$l^\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{v^\mu}{F}.$$

A FINSLER-térhez hasonlóan itt is értelmezhető [7] egyrészt az

$$F(x, l) = 1$$

egyenlettel az $\underset{(0)}{x}$ ponthoz tartozó CHARATHÉODORY-*féle indikátrix*, másrészt a

$$g_{\mu\nu}(x, v)\underset{(0)}{X^\mu}\underset{(0)}{X^\nu} = 1$$

egyenlettel az $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$ vonalelemhez tartozó ún. *oszkuláló indikátrix*. Mindkét indikátrixnak bizonyos fizikai alkalmazásoknál van nagy jelentősége [5].

3. §. Az invariáns differenciál meghatározása

Az általános differenciálgeometriai terekben a parallel eltolás az invariáns differenciállal van meghatározva. Az $\mathfrak{L}$-terünkben is a parallel eltolást az invariáns differenciál megadásával definiáljuk a szokásos módon:

DEFINÍCIÓ: *Egy ξ vektor invariáns differenciálja a következő:*

$$D\xi^\mu = d\xi^\mu + C_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}\xi^\varkappa dv^\lambda + \Gamma_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}\xi^\varkappa dx^\lambda. \tag{3, 1}$$

Abból a követelményből, hogy $D\xi^\mu$-nek a v^μ-ben nulladfokú homogénnek kell lennie következik, hogy $C_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}$, ill. $\Gamma_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}$ a v^μ-ben (-1)-fokú ill. nulladfokú homogén függvény. Minthogy v^μ és ϱv^μ azonos vonalelemet jelentenek, fenn kell még állni a

$$C_{\varkappa.0}^{\;\mu} = 0 \tag{3, 2}$$

relációnak is, ahol a „0" index az l^α egységvektorral való kontrakciót jelenti.

A $C_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}$ és a $\Gamma_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}$ mennyiségek transzformációs törvénye ugyanaz, mint az affinösszefüggő vonalelem terekben [8]:

$$\bar{C}_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\varkappa}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\lambda} C_{\alpha.\gamma}^{\;\beta}$$

$$\bar{\Gamma}_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\varkappa}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\lambda}\Gamma_{\alpha.\gamma}^{\;\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\varkappa}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \bar{x}^\varrho \partial \bar{x}^\lambda}\frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial x^\tau} v^\tau C_{\alpha.\gamma}^{\;\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\varkappa \partial \bar{x}^\lambda}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}.$$

Minthogy a tér metrikus, azért a szóban forgó mennyiségeket a tér metrikus alaptenzorából kell levezetni. E cél elérése érdekében először az invariáns differenciál képletét fogjuk átalakítani.

A $C_{\varkappa.\lambda}^{\;\mu}$ paraméterre nézve még a következő követelményt tesszük:

$$C_{0.\lambda}^{\;\mu} = p\frac{1}{F}l^\mu A_\lambda, \tag{3, 3}$$

ahol p egy természetes számot és A_λ egy kovariáns vektort jelent.

Ha az l^ϱ vektor invariáns differenciálját $\omega^\varrho(d)$-vel jelöljük, tehát fennáll a

$$Dl^\varrho = \omega^\varrho(d)$$

reláció, akkor valamely ξ^μ vektor invariáns differenciálja a

$$D\xi^\mu = \xi^\mu|_\varkappa dx^\varkappa + \xi^\mu;_\varkappa \omega^\varkappa(d) \tag{3, 4}$$

alakban adható meg, ahol

$$\xi^\mu|_\varkappa \overset{\text{def}}{=} \partial_\varkappa \xi^\mu - \xi^\mu\|_\varrho \Gamma_{0.\varkappa}^{\;\varrho}\xi^\sigma, \quad \partial_\varkappa \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} \tag{3, 5}$$

$$\xi^\mu;_\varkappa \overset{\text{def}}{=} \xi^\mu\|_\varkappa + A_{\sigma.\varkappa}^{\;\mu}\xi^\sigma \tag{3, 6}$$

és

(3, 6*) $$A_{\sigma.\varkappa}^{\mu} \overset{\text{def}}{=} F \cdot C_{\sigma.\varkappa}^{\mu}, \quad \Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\varkappa} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{\sigma.\varkappa}^{\mu} - A_{\sigma.\lambda}^{\mu} \Gamma_{0.\varkappa}^{\lambda},$$

a „$\|_{\varkappa}$" szimbólum pedig a

$$\|_{\varkappa} \overset{\text{def}}{=} F \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma^{\varkappa}}$$

operációt jelenti.

A (3, 2) és a (3,3) feltételek az $A_{\sigma.\varkappa}^{\mu}$-val a következő alakban adhatók meg:

(3, 7) $$A_{\varkappa.0}^{\mu} = 0,$$

ill.

(3, 8) $$A_{0.\varkappa}^{\mu} = -p l^{\mu} A_{\varkappa}.$$

(3, 7) és (3,8) relációk alapján közvetlenül igazolható a

$$A_{\sigma.\lambda}^{\mu} \Gamma_{0.\varkappa}^{\lambda} = A_{\sigma.\lambda}^{\mu} \Gamma^{*\,\lambda}_{0.\varkappa}$$

összefüggés és így fennáll, hogy

(3, 9) $$\Gamma_{\sigma.\varkappa}^{\mu} = \Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\varkappa} + A_{\sigma.\lambda}^{\mu} \Gamma^{*\,\lambda}_{0.\varkappa}.$$

Ebből az egyenletből látható, hogy a $\Gamma_{\sigma.\lambda}^{\mu}$ eltolási paraméter kifejezhető a $\Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\lambda}$ mennyiségekkel; az $\mathfrak{L}$-térben tehát $\Gamma_{\sigma.\lambda}^{\mu}$ és $\Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\lambda}$ egyenlő jogosultságúak. Az eltolás teljes meghatározása céljából elegendő tehát az $A_{\sigma.\varkappa}^{\mu}$ és a $\Gamma_{\sigma.\varkappa}^{\mu}$ mennyiségeket a $g_{\mu\nu}$ metrikus alaptenzorból kiszámítani.

Az eddigi fejtegetéseinkben a (3, 8) vagy a vele egyenértékű (3, 2) feltétellel biztosítottuk a $\Gamma_{\sigma.\lambda}^{\mu}$ és $\Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\lambda}$ mennyiségek egyenlő jogosultságát, értve ezalatt azt, hogy ezek a mennyiségek egymásból kiszámíthatók. (Lásd a (3, 6) és (3, 9) képleteket.) Megjegyezzük azonban, hogy a (3, 8), illetve (3, 3) feltétel nem az egyedüli, amelynek a segítségével $\Gamma_{\sigma.\varkappa}^{\mu}$ és $\Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\varkappa}$ egyenlő jogosultsága biztosítható. (3, 8) relációt más egyenlettel pótolva az itt tárgyalt geometriánál általánosabb geometriák is kiépíthetők, amint azt a szerzők egyike még nem publikált dolgozatában [16] megmutatta. A következőkben tárgyalt fizikai probléma számára azonban a (3, 8) feltevés is elegendő, azonkívül még a tér geometriai szerkezetét is nagy mértékben egyszerűsíti.

Most rátérünk az $A_{\sigma.\varkappa}^{\mu}$ és a $\Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\varkappa}$ mennyiségeknek az alaptenzorból való származtatására. E célból a definiált eltolástól a következő követelmények teljesítését kívánjuk meg:

1. *Az eltolás legyen metrikus.*
2. *Az $A_{\sigma\mu\varkappa}$ tenzor legyen σ- és μ-ben szimmetrikus.*
3. *$\Gamma^{*\,\mu}_{\sigma.\varkappa}$ legyen σ- és $\varkappa$-ban szimmetrikus.*

Az 1. követelményünk analytikusan a (3, 5) és (3, 6) egyenletek alapján a következő két egyenlet fennállását jelenti:

(3, 10) $$g_{\sigma\varkappa;\mu} = g_{\sigma\varkappa}\|_{\mu} - 2A_{(\sigma\varkappa)\mu} = 0$$

és

$$g_{\sigma\varkappa}|_\mu \equiv \partial_\mu g_{\sigma\varkappa} - g_{\sigma\varkappa}\|_\varrho \Gamma^{*}{}_{0.\mu}^{\varrho} - 2\Gamma^{*}{}_{(\sigma\varkappa)\mu} = 0. \tag{3, 11}$$

A 2. követelményből (3, 10) alapján következik, hogy

$$A_{\sigma\varkappa\mu} = \frac{1}{2} g_{\sigma\varkappa}\|_\mu .$$

A (3, 8) reláció a metrikus alaptenzor számára a következő fontos identitást adja:

$$\frac{1}{2} g_{\sigma\varkappa}\|_\mu l^\sigma = p l_\varkappa A_\mu . \tag{3, 12}$$

Ezen egyenletek alapján már meghatároztuk az $A_{\sigma.\varkappa}^{\ \mu}$, ill. a $C_{\sigma.\varkappa}^{\ \mu}$ eltolási paramétereket kifejezve a $g_{\mu\nu}$ alaptenzorral. Ennél a módszernél, és a következőkben is, J. A. SCHOUTEN és J. HAANTJES [6] módszerét használjuk, amellyel ők az ún. általános metrikus terekben — amelyeknek alapeleme ko-, ill. kontravariáns vektorsűrűség — határozták meg a megfelelő eltolási paramétereket. A (3, 11) egyenletből következik, hogy

$$\Gamma^{*}{}_{\sigma\varkappa\mu} \equiv \Gamma^{*}{}_{(\sigma\varkappa)\mu} + \Gamma^{*}{}_{[\sigma\varkappa]\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\sigma\varkappa} - A_{\sigma\varkappa\varrho}\Gamma^{*}{}_{0.\mu}^{\varrho} + \Gamma^{*}{}_{[\sigma\varkappa]\mu}, \tag{3, 13}$$

ahol $\Gamma^{*}{}_{(\sigma\varkappa)\mu}$, ill. $\Gamma^{*}{}_{[\sigma\varkappa]\mu}$ a $\Gamma^{*}{}_{\sigma\varkappa\mu}$ eltolási paraméter szimmetrikus, ill. ferdén szimmetrikus részét jelenti.

$\Gamma^{*}{}_{[\sigma\varkappa]\mu}$-t a következő alakban határozzuk meg:

$$\Gamma^{*}{}_{[\sigma\varkappa]\mu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\varkappa\mu} - \partial_\varkappa g_{\sigma\mu}) - A_{\varkappa\mu\varrho}\Gamma^{*}{}_{0.\sigma}^{\varrho} + A_{\sigma\mu\varrho}\Gamma^{*}{}_{0.\varkappa}^{\varrho} + \Lambda_{\sigma\varkappa\mu} . \tag{3, 14}$$

A $\Lambda_{\sigma\varkappa\mu}$ mennyiségek egy tenzort határoznak meg. Ez rögtön adódik a $\Gamma^{*}{}_{\sigma.\mu}^{\ \varkappa}$ transzformációs törvényéből, amely ugyanaz, mint a FINSLER-geometriában, azaz:

$$\Gamma^{*}{}_{\sigma.\varkappa}^{\ \mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\sigma}\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\varkappa}\Gamma^{*}{}_{\alpha.\gamma}^{\ \beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\sigma \partial \tilde{x}^\varkappa}\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} .$$

A (3, 14) egyenletből még közvetlenül látható, hogy $\Lambda_{\sigma\varkappa\mu}$ a σ és a $\varkappa$ indexekben ferdén szimmetrikus. Ha $\Gamma^{*}{}_{[\sigma\varkappa]\mu}$ értékét a (3, 14) egyenletből (3, 13) egyenletbe helyettesítjük és a 3. követelményünket figyelembe vesszük, akkor azt kapjuk, hogy a $\Lambda_{\sigma\varkappa\mu}$ tenzor a σ és μ indexekben szimmetrikus. E két tulajdonságból következik, hogy

$$\Lambda_{\sigma\varkappa\mu} = 0,$$

ugyanis

$$\Lambda_{\sigma\varkappa\mu} = -\Lambda_{\varkappa\sigma\mu} = -\Lambda_{\mu\sigma\varkappa} = \Lambda_{\sigma\mu\varkappa} = \Lambda_{\varkappa\mu\sigma} = -\Lambda_{\mu\varkappa\sigma} = -\Lambda_{\sigma\varkappa\mu} ,$$

ami éppen az állításunkat igazolja. Így a (3, 13) formulánk a (3, 14) egyenlet alapján

$$(3, 15) \qquad \Gamma^{*}{}_{\sigma.\mu}^{\;\varkappa} = \left\{ \begin{matrix} \varkappa \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} - A_{\sigma.\varrho}^{\;\varkappa}\, \Gamma^{*\varrho}_{0.\mu} - A_{\mu.\varrho}^{\;\varkappa}\, \Gamma^{*\varrho}_{0.\sigma} + A_{\mu\sigma\varrho}\, \Gamma^{*\varrho\varkappa}_{0..}$$

alakba írható, ahol:

$$\left\{ \begin{matrix} \varkappa \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\varkappa} \{\partial_\mu g_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\sigma\mu}\}.$$

Ha a (3, 15) egyenletet l^σ-val, majd azután l^μ-vel kontraháljuk, akkor kapjuk, hogy

$$(3, 16) \qquad \Gamma^{*\varkappa}_{0.\mu} = \left\{ \begin{matrix} \varkappa \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} - p l^{\varkappa} A_\varrho \Gamma^{*}{}_{0.\mu}^{\;\varrho} - A_{\mu.\varrho}^{\;\varkappa} \Gamma^{*}{}_{0.0}^{\;\varrho} + p l_\mu A_\varrho \Gamma^{*\varrho\varkappa}_{0..},$$

ill.

$$\Gamma^{*}{}_{0.0}^{\;\varrho}(\delta^{\varkappa}_{\varrho} + 2 p l^{\varkappa} A_\varrho) = \left\{ \begin{matrix} \varkappa \\ 00 \end{matrix} \right\} + p A_\varrho \Gamma^{*}{}_{0..}^{\;\varrho\varkappa},$$

ahol $\delta^{\varkappa}_{\varrho}$ a Kronecker-féle szimbólumot jelenti

$$\delta^{\varkappa}_{\varrho} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \varkappa = \varrho \\ 0 & \text{ha } \varkappa \neq \varrho \end{cases}.$$

Ha ezen utolsó egyenletünket kontraháljuk $(\delta^{\lambda}_{\varkappa} - 2 p l^{\lambda} A_\varkappa)$-val, akkor kapjuk, hogy:

$$(3, 17) \qquad \Gamma^{*}{}_{0.0}^{\;\lambda} = (\delta^{\lambda}_{\varkappa} - 2 p l^{\lambda} A_\varkappa) \left\{ \begin{matrix} \varkappa \\ 00 \end{matrix} \right\} + p A_\sigma \Gamma^{*\sigma\lambda}_{0..} - 2 p^2 A_\varrho A_\varkappa l^{\lambda} \Gamma^{*}{}_{0..}^{\;\varrho\varkappa}$$

és most (3, 16)-ot $A_\varkappa$-val kontrahálva, továbbá $\Gamma^{*}{}_{0.0}^{\;\varrho}$ képletét (3, 17)-ből behelyettesítve a kapott egyenletünkbe, kisebb átalakítások után nyerjük:

$$(3, 18) \qquad A_\varrho \Gamma^{*\varrho}_{0.\tau} (H_{\mu.}^{\;\tau} - p l_\mu A^\tau) = \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ 0\tau \end{matrix} \right\} (\delta^{\tau}_{\mu} A_\varrho - l^\tau A_\varkappa A_{\mu.\varrho}^{\;\varkappa}),$$

ahol

$$(3, 19) \qquad H_{\mu.}^{\;\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{\tau}_{\mu} + p A_\sigma A_{\mu..}^{\;\sigma\tau}.$$

A (3, 18) egyenletből most már kifejezhető az $A_\varrho \Gamma^{*\varrho}_{0.\tau}$ mennyiség, ha létezik egy $K_{\gamma.}^{\;\mu}$ tenzor, amelyre fennáll a

$$H_{\mu.}^{\;\tau} K_{\gamma.}^{\;\mu} = \delta^{\tau}_{\gamma}$$

reláció. Egy ilyen reláció fennállásának biztosítására fel kell még tételeznünk, hogy

$$(3, 20) \qquad \mathrm{Det}\,|H_{\mu.}^{\;\tau}| \neq 0.$$

A (3, 19) egyenletből látható, hogy ez a feltétel a mértéktenzorra egy további, habár nem erős, megszorítást jelent. Minthogy a

$$H_{0\cdot}^{\;\tau} = l^{\tau}, \quad H_{\mu\cdot}^{\;0} = l_{\mu}, \quad K_{\gamma\cdot}^{\;0} = l_{\gamma}$$

relációk könnyen igazolhatók, következik (3, 18)-ból egy $K_{\gamma\cdot}^{\;\mu}(\delta_{\beta}^{\gamma} + p l_{\beta} A^{\gamma})$-val való kontrakció után:

$$(3,21) \qquad A_{\varrho} \Gamma^{*}{}_{0\cdot\beta}^{\;\varrho} = K_{\gamma\cdot}^{\;\mu}(\delta_{\beta}^{\gamma} + p l_{\beta} A^{\gamma}) \Big\}{}_{0\cdot\tau}^{\;\varrho}\Big\{ (\delta_{\mu}^{\tau} A_{\varrho} - l^{\tau} A_{\varkappa} A_{\mu\cdot\varrho}^{\;\varkappa}).$$

Helyettesitjük $A_{\varrho} \Gamma^{*}{}_{0\cdot\beta}^{\;\varrho}$ ezen értéket (3, 17)-be, akkor kapjuk:

$$(3,22) \qquad \begin{aligned} \Gamma^{*}{}_{0\cdot 0}^{\;\lambda} = (\delta_{\varkappa}^{\lambda} - 2 p l^{\lambda} A_{\varkappa}) \Big[\Big\}{}_{0\,0}^{\;\varkappa}\Big\{ &+ \\ + p K_{\gamma\cdot}^{\;\mu}(g^{\gamma\varkappa} + p l^{\varkappa} A^{\gamma}) \Big\}{}_{0\cdot\tau}^{\;\varrho}\Big\{ (\delta_{\mu}^{\;\tau} A_{\varrho} - l^{\tau} A_{\sigma} A_{\mu\cdot\varrho}^{\;\sigma}) \Big]&. \end{aligned}$$

(3, 21) és (3, 22) alapján kifejezhetők a (3, 16) egyenletből a $\Gamma^{*\varkappa}_{0\cdot\mu}$ mennyiségek az $\mathfrak{L}$ tér alapmennyiségeivel, és akkor (3, 15)-ből $\Gamma^{*}{}_{\sigma\cdot\mu}^{\;\varkappa}$ mennyiségek is meghatározhatók. A számítások elvégzése és a $\varkappa$ index lehúzása után $\Gamma^{*}{}_{\sigma\varkappa\mu}$-re a következő explicit kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \Gamma^{*}{}_{\sigma\varkappa\mu} = [\sigma\varkappa\mu] - \Big\} A_{\sigma\varkappa\lambda} \Big\} {}_{0\,\varrho}^{\;\beta} \Big\{ [(\delta_{\mu}^{\;\varrho} - l^{\varrho} l_{\mu}) \delta_{\beta}^{\;\lambda} &+ \\ + K_{\alpha}^{\;\iota}(l^{\varrho} g_{\beta\iota} + p \delta_{\iota}^{\;\varrho} A_{\beta})(l_{\mu} g^{\lambda\alpha} - A_{\mu}^{\;\lambda\alpha})] \Big\{ &- \{\sigma\varkappa\mu\}_{z} \end{aligned}$$

$$[\sigma\varkappa\mu] = \frac{1}{2}(\partial_{\mu} g_{\sigma\varkappa} + \partial_{\sigma} g_{\mu\varkappa} - \partial_{\varkappa} g_{\sigma\mu})$$

és $\{\sigma\varkappa\mu\}$ még két hasonló tagot jelent, ahol azonban a $\sigma, \varkappa, \mu$ indexek ciklikusan permutálva vannak, az utolsó tagban még egy előjelváltozással. Ezzel az általános metrikus vonalelemterünk eltolási paramétereit teljesen meghatároztuk.

4. §. $\mathfrak{L}$-terek egzisztenciájának igazolása és a Finsler-geometriával való összefüggésük

Az $\mathfrak{L}$-terek struktúráját a $g_{\mu\nu}$ metrikus alaptenzor megadásával határoztuk meg. A $g_{\mu\nu}$ tenzornak azonban még ki kell elégítenie a (3, 8) és a (3, 20) feltételi egyenleteket, amelyeket most a következő, az előbbiekkel ekvivalens alakban adunk meg:

$$(4,1) \qquad \frac{1}{2} g_{\sigma\mu|\varkappa} l^{\sigma} = p l_{\mu} A_{\varkappa},$$

ill.

$$\mathrm{Det}\,|\delta_{\mu}^{\tau} + p A_{\sigma} A_{\mu\cdot\cdot}^{\;\sigma\tau}| \neq 0.$$

Nyilván az utóbbi egyenlet nem jelent a térre lényeges megszorítást. A (4, 1) egyenlet teljesíthetőségét egy explicit példán mutatjuk meg.

Legyen $\gamma_{\mu\nu}(x, v)$ egy FINSLER-tér metrikus alaptenzora, amelyre tehát szükség szerint fennáll a

$$v^\mu \partial_{\nu\varrho} \gamma_{\mu\nu} = 0$$

reláció. Ha $A(x, v)$ egy skalár függvényt jelent, amely természetesen v^μ-ben nulladfokú homogén, akkor a

$$g_{\mu\nu} = A(x, v)\gamma_{\mu\nu}(x, v) \tag{4, 2}$$

tenzor kielégíti a (4, 1) feltételt. Fennáll ugyanis, hogy

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\|^\varrho l^\mu = \frac{1}{2} v^\mu \partial_{\nu\varrho} g_{\mu\nu} = \frac{1}{2A} A\|_\varrho l_\nu = \frac{1}{2} p (\log A^{1/p})\|_\varrho l_\nu.$$

Ezt az egyenletet (4, 1)-gyel összehasonlítva kapjuk:

$$A_\varrho = \frac{1}{2} (\log A^{1/p})\|_\varrho. \tag{4, 3}$$

Megjegyezzük azonban, hogy a (4, 1) feltételből az A_ϱ vektorra nem következik szükségszerűen a (4, 3) egyenlet, minthogy a $g_{\mu\nu}$ tenzort nemcsak a (4, 2) egyenlettel lehet jellemezni.

A FINSLER-terek (4, 1) szerint $p = 0$, vagy $A_\mu = 0$ relációval jellemezhetők. Megjegyezzük még, hogy (4, 1)-ben a pA_ϱ vektor helyett egyetlen B_ϱ vektor is bevezethető.

5. §. Az $\mathfrak{L}$-tér görbülete és torziója

A tér torzió és görbületi tenzorainak meghatározása céljából először a vektorok parallel eltolásának (3, 4) formuláját fogjuk átalakítani. A (3, 5) és (3, 6) egyenletek alapján ugyanis (3, 4) a következő alakban adható meg:

$$D\xi^\mu = d\xi^\mu + \omega_{\varkappa}{}^{\mu}_{\cdot}(d)\xi^\varkappa, \tag{5, 1}$$

ahol

$$\omega_{\varkappa}{}^{\mu}_{\cdot} \overset{\text{def}}{=} A_{\varkappa}{}^{\mu}_{\cdot\varrho}\,\omega^\varrho(d) + \Gamma^*{}_{\varkappa}{}^{\mu}_{\cdot\varrho}\,dx^\varrho. \tag{5, 2}$$

A tér torziótenzora a következő alternáló formulából adódik:[1]

$$\Omega^\mu \overset{\text{def}}{=} (\Delta D - D\Delta)x^\mu.$$

Minthogy x^μ skaláris, ezért $Dx^\mu = dx^\mu$ és $\Delta x^\mu = \delta x^\mu$ vektormennyiség; ha $\Gamma^*{}_{\varkappa}{}^{\mu}_{\cdot\varrho}$ szimmetriáját a $\varkappa$ és a ϱ indexekben figyelembe vesszük, akkor (5, 1) és (5, 2)-ből adódik, hogy

$$\Omega^\mu(d, \delta) = [dx^\varrho \omega_{\varrho}{}^{\mu}_{\cdot}] = A_{\varrho}{}^{\mu}_{\cdot\sigma}[dx^\varrho \omega^\sigma]. \tag{5, 3}$$

[1] Az itt használt módszer és a CARTAN-féle ω-szimbolikát röviden a függelékben állítottuk össze. Részletesebben lásd [3] 209—210. o.

Ebből az egyenletből látható, hogy a tér egyetlen torziótenzora az $A_{\varrho.\sigma}^{\mu}$ tenzor.

A tér görbületi tenzorai a

$$(\Delta D - D\Delta)\xi^{\mu} = \Omega_{\varkappa.}^{\mu}(d\cdot\delta)\xi^{\varkappa}, \quad \Omega_{\varkappa.}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} [\omega_{\varkappa.}^{\sigma}\,\omega_{\sigma.}^{\mu}] - (\omega_{\varkappa.}^{\mu})'$$

alternáló formulából vezethetők le. Az $\Omega_{\varkappa.}^{\mu}$ kifejezés (5, 1) és (5, 2) formulákból számítható ki. Ez a számítás a következő eredményt adja:

$$\Omega_{\varkappa.}^{\mu} = \frac{1}{2} R_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu}[dx^{\varrho}dx^{\tau}] + P_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu}[dx^{\varrho}\omega^{\tau}] + \frac{1}{2} S_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu}[\omega^{\varrho}\omega^{\tau}], \tag{5, 4}$$

ahol az $R_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu}$, $P_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu}$ és $S_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu}$ görbületi tenzorok explicit alakja a következő:

$$R_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{R}_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu} + A_{\varkappa.\sigma}^{\mu}\bar{R}_{0.\varrho\tau}^{\sigma}$$

$$P_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^{*\mu}_{\varkappa.\varrho}\|_{\tau} - A_{\varkappa.\tau}^{\mu}|_{\varrho} + A_{\varkappa.\sigma}^{\mu}\Gamma^{*\sigma}_{\nu.\varrho}\|_{\tau}\, l^{\nu},$$

$$S_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} 2A_{\varkappa.[\tau}^{\sigma}A_{|\sigma|\ .\varrho]}^{|\mu|},$$

ahol

$$\bar{R}_{\varkappa.\varrho\tau}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} -2\partial_{[\varrho}\Gamma^{*\mu}_{\tau].\varkappa} + 2\Gamma^{*\sigma}_{0.[\varrho}\Gamma^{*\mu}_{\tau].\varkappa}|_{\sigma} - 2\Gamma^{*\mu}_{\sigma.[\varrho}\Gamma^{*\sigma}_{\tau].\varkappa}.$$

A görbületi tenzorok levezetésénél felhasználtuk a következő két formulát:

$$l^{\varkappa}|_{\tau} = 0,$$

$$l^{\varkappa}\|_{\tau} = \delta_{\tau}^{\varkappa} - l^{\varkappa}(l_{\tau} + pA_{\tau}).$$

Mindkét formula könnyen levezethető a $l^{\varkappa}$ vektor definíciós képletéből, ha figyelembe vesszük a (3, 11), ill. (3, 8) összefüggéseket.

A görbületi tenzorok $\bar{R}_{\varkappa\mu\varrho\tau}$ kivételével az első két indexükben ferdén szimmetrikusak, ami a

$$(D\Delta - \Delta D)g_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0, \quad \Omega_{\mu\nu} = g_{\nu\varrho}\Omega_{\mu.}^{\varrho}$$

képletből közvetlenül adódik, tekintve, hogy dx^{μ}, δx^{μ}, $\omega^{\mu}(d)$, $\omega^{\mu}(\delta)$ egymástól függetlenül választhatók. A görbületi tenzoraink két utolsó indexükben a $P_{\varkappa\mu\varrho\tau}$ tenzor kivételével szintén ferdén szimmetrikusok.

A görbületi tenzorok az $\mathfrak{L}$-térben még bizonyos identitásokat elégítenek ki, amelyek éppen az ún. BIANCHI-identitások analogonjai. Ezek az identitások fizikai szempontból a megmaradási törvényeknél bírnak jelentőséggel.

Ezeket az identitásokat könnyen megkaphatjuk, ha az (5, 3) és (5, 4) relációk külső differenciáljait képezzük. Így a következő formulák adódnak:

$$(\Omega^{\mu})' - [dx^{\varkappa}\Omega_{\varkappa.}^{\mu}] + [\omega_{\varkappa.}^{\mu}\Omega^{\varkappa}] = 0,$$

ill.

$$(\Omega_{\mu.}^{\varkappa})' - [\omega_{\varkappa.}^{\varrho}\Omega_{\nu\varrho}] + [\omega_{\mu.}^{\varrho}\Omega_{\varkappa\varrho}] = 0$$

Ha pl. $\omega^{\mu} = 0$ értéket helyettesítünk ezen képletbe, és a

$$(\omega^{\mu})' = -\Omega_{0.}^{\mu} + [\omega^{\varkappa}\omega_{\varkappa.}^{\mu}] \tag{5, 5}$$

relációt figyelembe vesszük, akkor a következő fontos identitásokat kapjuk az $R_{\nu\varkappa\lambda\mu}$ tenzorra:

$$R_{\nu\varkappa\lambda\mu} + A_{\nu\varkappa\sigma} R_{0}{}^{\sigma}{}_{.\lambda\mu} + \{\text{cikl}\}_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

$$R_{\nu\varkappa\lambda\mu}|_{\varrho} + P_{\nu\varkappa\lambda\sigma} R_{0}{}^{\sigma}{}_{\cdot\mu\varrho} + \{\text{cikl}\}_{\lambda\mu\varrho} = 0.$$

6. §. Autoparallel görbék és extremálisok

A 2. §-ban a görbét egy $v^{\varrho}(t)$ iránymezőre nézve definiáltuk. Ez az iránymező ebben a §-ban egyezzék meg minden esetben a görbe érintővektorának irányával. Ez analitikusan azt jelenti, hogy az $\dot{x}^{\varrho}$ értékek aránya megegyezik a v^{ϱ} értékek arányával. Megjegyezzük még, hogy paraméternek mindig az s ívhosszt választjuk. Akkor fennáll az

$$l^{\varkappa} = \frac{dx^{\varkappa}}{ds}$$

összefüggés.

DEFINÍCIÓ: *Az $x^{\varkappa} = x^{\varkappa}(s)$ görbe az $\mathfrak{L}$-tér autoparallel görbéje, ha kielégíti a*

(6, 1) $$\frac{dl^{\varkappa}}{ds} + \Gamma^{*}{}_{0}{}^{\varkappa}{}_{\cdot 0} = \frac{d^2x^{\varkappa}}{ds} + \Gamma^{*}{}_{\mu}{}^{\varkappa}{}_{\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

egyenletet.

A következőkben az autoparallel görbék egyenletét $\omega^{\varrho}(d)$ segitségével fejezzük ki. A (3, 1) és (3, 2) formula szerint $\omega^{\varrho}(d)$ a következő képlettel adható meg:

(6, 2) $$\frac{\omega^{\mu}(d)}{ds} = (\delta_{\varkappa}^{\mu} + p\,l^{\mu} A_{\varkappa}) \frac{dl^{\varkappa}}{ds} + \Gamma_{0}{}^{\mu}{}_{\cdot\varkappa} \frac{dx^{\varkappa}}{ds}.$$

Ha (3, 9) egyenletet l^{ϱ}-val kontraháljuk, és a kapott $\Gamma_{0}{}^{\mu}{}_{\cdot\varkappa}$ értéket (6, 2)-be helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

(6, 3) $$\frac{\omega^{\mu}(d)}{ds} = (\delta_{\varkappa}^{\mu} + p\,l^{\mu} A_{\varkappa}) \left(\frac{dl^{\varkappa}}{ds} + \Gamma^{*}{}_{0}{}^{\varkappa}{}_{\cdot\sigma} \frac{dx^{\sigma}}{ds} \right).$$

Ebből az egyenletből közvetlenül látható, hogy egyrészt: autoparallel görbe mentén $\omega^{\varrho} = 0$ fennáll; másrészt $\omega^{\varrho} = 0$-ból következik a (6, 1) egyenlet fennállása is, ami rögtön adódik, ha (6, 3) egyenletet $(\delta_{\mu}{}^{\varrho} - p\,l^{\varrho} A_{\mu})$-vel kontraháljuk. A (6, 1) egyenlet tehát az

(6, 4) $$\omega^{\varrho}(d) = 0$$

egyenlettel ekvivalens. Ez más szóval azt jelenti, hogy az autoparallel görbék definíciója a (6, 4) egyenlettel is elvégezhető. A (6, 4) egyenlet egyúttal azt is nyilvánvalóvá teszi, miért jogos a (6, 1) differenciálegyenleteket kielégítő görbéket autoparallel görbéknek nevezni.

Most rátérünk a tér extremálisainak a meghatározására. Ezek, mint látni fogjuk, az $\mathfrak{L}$-terünkben általában különböznek az autoparallel görbéktől. A

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \{g_{\mu\nu}(x, \dot{x})\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\}^{1/2} ds = 0$$

variációs-probléma EULER—LAGRANGE egyenletei a következők:

$$-\frac{1}{2}(\partial_\varrho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{d}{ds}\partial_{\dot{x}^\varrho} F = 0. \tag{6,5}$$

Ezeket az egyenleteket $\dot{x}^\mu = l^\mu$ és

$$\partial_{\dot{x}^\varrho} F = l_\varrho + p A_\varrho,$$

ill.

$$\frac{1}{2}(\partial_\varrho g_{\mu\nu}) l^\mu l^\nu = \Gamma^*_{\varrho 00} + p A_\sigma \Gamma^{*\,\sigma}_{\varrho.0}$$

egyenletek figyelembevételével a következő alakba írhatjuk át:

$$-(\Gamma^*_{\varrho 00} + p A_\sigma \Gamma^{*\,\sigma}_{\varrho.0}) + \frac{d}{ds}(l_\varrho + p A_\varrho) = 0. \tag{6,6}$$

Az invariáns differenciál definíciója alapján azonban:

$$\omega_\iota = dl_\iota - p l_\iota A_\varkappa dl^\varkappa - \Gamma^{0}_{\iota.\varkappa} dx^\varkappa. \tag{6,7}$$

Ha a (6, 3) egyenletet $(\delta_\mu^\varrho - p l^\varrho A_\mu)$-vel kontraháljuk, akkor a

$$dl^\varkappa = \omega^\sigma(\delta_\sigma^\varkappa - p l^\varkappa A_\sigma) - \Gamma^{*\,\varkappa}_{.0.\sigma} dx^\sigma \tag{6,8}$$

egyenleteket kapjuk. Ha figyelembe vesszük még a (3, 9)-ből következő

$$\Gamma^{0}_{\iota.\varkappa} = \Gamma^{*\,0}_{\iota.\varkappa} + p l_\iota A_\varrho \Gamma^{*\,\varrho}_{k.\varkappa} \tag{6,9}$$

relációt, akkor (6, 7), (6, 8) és (6, 9) egyenletek alapján kapjuk, hogy

$$dl_\varrho = \omega_\varkappa(\delta_\varrho^\varkappa + p l_\varrho A^\varkappa) + \Gamma^*_{\varrho 0\sigma} dx^\sigma = 0. \tag{6,10}$$

Írjuk az invariáns differenciált az (5, 1) és (5, 2) alatt megadott alakba, akkor fennáll, hogy

$$\frac{dA_\varrho}{ds} = \frac{DA_\varrho}{ds} + A^{\sigma}_{\varrho.\tau}\frac{\omega^\tau(d)}{ds} + \Gamma^{*\,\sigma}_{\varrho.\tau} A_\sigma \frac{dx^\tau}{ds}. \tag{6,11}$$

Helyettesítjük most (6, 10) és (6, 11)-et a (6, 6) egyenletbe, akkor (3, 19) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{\omega_\varkappa(d)}{ds}(H_\varrho^\varkappa + p l_\varrho A^\varkappa) + p\frac{DA_\varrho}{ds} = 0.$$

$K_{\beta\cdot}^{\varrho}(\delta_\gamma^{\beta} - p l_\gamma A^\beta)$-val való kontrakció és a γ index felhúzása után ez a következő alakba írható:

$$\text{(6, 12)} \qquad \frac{\omega^\mu(d)}{ds} + p K_{\beta\cdot}^{\varrho}(g^{\beta\mu} - p l^\mu A^\beta)\frac{DA_\varrho}{ds} = 0$$

Ez az egyenlet már az extremálisok differenciálegyenletének tekinthető, azonban még áttekinthetőbb alakban is megadjuk. Helyettesítsük ezért ω^μ képletét (6, 3)-ból a (6, 12) egyenletbe, akkor $(\delta_\mu^{\tau} - p l^\tau A_\mu)$-vel való kontrakció után (figyelembe véve, hogy s az ívhossz paramétert jelenti):

$$\text{(6, 13)} \qquad \frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \Gamma^{*}{}_{\varrho\cdot\sigma}^{\,\tau}\frac{dx^\varrho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} + p K_{\beta\cdot}^{\varrho}(g^{\beta\tau} - 2 p l^\tau A^\beta)\frac{DA_\varrho}{ds} = 0.$$

Ebből az egyenletből látható, hogy az extremálisok az autoparallel görbékkel csak

$$\text{(6, 14)} \qquad p K_{\beta\cdot}^{\varrho}(g^{\beta\tau} - 2 p l^\tau A^\beta)\frac{DA_\varrho}{ds} = 0$$

feltételi egyenlet teljesülése esetén egyeznek meg.

7. §. A téregyenletek

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{L}$-terünkben egy $\psi = \psi(x, v)$ mennyiség van definiálva minden (x, v) vonalelemben. $\psi(x, v)$ lehet skaláris vagy általánosabban tenzor, amely a fizikai értelemben vett teret határozza meg. A következőkben két esetet fogunk behatóbban vizsgálni, amikor is ti. a fizikai tér egy $\psi(x, v)$ skalárral, ill. egy $\psi_\mu(x, v)$ vektorral van jellemezve.

Legyen tehát a fizikai értelemben vett tér LAGRANGE-féle skalársűrűsége

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x, v, \psi, \psi_\mu) = L(\psi, \psi_\mu)\sqrt{-g(x, v)},$$

ahol:

$$\psi_\mu \overset{\text{def}}{=} \psi|_\mu = \partial_\mu \psi - \psi||_\varrho \Gamma^{*}{}_{0\cdot\mu}^{\,\varrho}$$

és

$$g = g(x, v) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Det}|g_{\mu\nu}|$$

Az $\mathfrak{L}$-térben még egy további követelmény fennállását kívánjuk meg:

KÖVETELMÉNY: *Létezzék az $\mathfrak{L}$-térben a vonalelemek abszolút parallelizmusa.*

Ez analitikusan azt jelenti, hogy a (6, 4) differenciálegyenletek teljesen integrálhatók. FROBENIUS [4] elmélete alapján ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy (6, 4) figyelembevételével fennálljon az

$$\text{(7, 1)} \qquad (\omega^\mu)' = 0$$

egyenlet. (5, 5) és (5, 4) alapján a (7, 1) egyenlet ekvivalens az

$$R_{0\cdot\varrho\tau}^{\;\mu} = \bar{R}_{0\cdot\varrho\tau}^{\;\sigma}(\delta_\sigma^{\mu} + p l^\mu A_\sigma) = 0$$

egyenlettel. Ebből az egyenletből $(\delta_\mu{}^\nu - p l^\nu A_\mu)$-vel való kontrakció után közvetlenül következik, hogy

$$\bar{R}_{0.\varrho\tau}^{\;\nu} \equiv -2\partial_{[\varrho} \Gamma^{*}{}_{\tau]\cdot 0}^{\;\nu} + 2\Gamma^{*}{}_{0.[\varrho}^{\;\sigma} \Gamma^{*}{}_{\tau]\cdot 0}^{\;\nu}\|_\sigma = 0. \tag{7, 2}$$

Ezek az egyenletek tehát a (7, 1) differenciálegyenletrendszer integrálhatósági feltételei.

A következőkben legyen egy $v^\nu = v^\nu(x)$ iránymező meghatározva úgy, hogy fennálljanak a

$$\frac{dl^\nu}{dx^\varrho} + \Gamma^{*}{}_{0.\varrho}^{\;\nu} = 0, \quad \frac{dl^\nu}{dx^\varrho} = \partial_\varrho l^\nu(x, v(x)) \tag{7, 3}$$

egyenletek. Ilyen $v^\nu(x)$ iránymező mindig létezik, mert a (7, 3) egyenletek integrálhatósági feltételeit éppen a (7, 2) egyenletek adják, amelyek pedig a követelményünk folytán a terünkben mindig fennállnak.

MEGJEGYZÉS. Ha v^ν a $v^\nu(x)$ mező egy eleme, akkor

$$\psi_\mu = \frac{d\psi}{dx^\mu}. \tag{7, 4}$$

A $\frac{d}{dx^\mu}$ szimbólum most és a következőkben a

$$\frac{d}{dx^\mu}(\cdots) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu(\cdots) - (\cdots)\|_\varrho \Gamma^{*}{}_{0,\mu}^{\;\varrho}$$

műveletet fogja jelenteni. Ez tehát megegyezik a BERWALD-féle „(μ)" művelettel [1].

A megjegyzés bizonyítása. (7, 3)-ból következik, hogy

$$\partial_\mu v^\nu = -F\Gamma^{*}{}_{0.\mu}^{\;\nu} + v^\nu f_\mu, \quad \left(f_\mu = \frac{d \log F}{dx^\mu}\right) \tag{7, 5}$$

s igy ψ_μ definiciója szerint, tekintettel a nulladfokú homogenitására a v^μ-ben következik:

$$\psi_\mu = \partial_\mu \psi - (\partial_{v\varrho} \psi) F\Gamma^{*}{}_{0.\mu}^{\;\varrho} = \partial_\mu \psi + (\partial_{v\varrho} \psi)(\partial_\mu v^\varrho) = \frac{d\psi}{dx^\mu}$$

qu. e. d.

Ezen előkészületek után rátérünk a téregyenletek levezetésére. Legyen adva egy $v^\varrho(x)$ iránymező, amelyre fennáll a (7, 3), ill. (7,5) egyenlet. Képezzük a következő hatásintegrált:

$$I = \int_V \mathfrak{L}(x, v(x), \psi, \psi_\mu)\, d^4x, \quad d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

A téregyenletek I-nek ψ szerinti variációjával vezethetők le:

$$\delta I = 0.$$

δI explicite a következőképpen adható meg:

$$\delta I = \int_V \{\partial_\psi \mathfrak{L} \delta\psi + \partial_{\psi_\mu} \mathfrak{L} \cdot \psi_\mu\} \, d^4x = 0.$$

Ha feltételezzük — amint az szokásos —, hogy $\delta\psi$ a V integrációs tartomány határán eltűnik, akkor parciális integrálás után (7, 4) alapján kapjuk, hogy

$$\int_V \left\{ \partial_\psi \mathfrak{L} - \frac{d}{dx^\mu} (\partial_{\psi_\mu} \mathfrak{L}) \right\} \delta\psi \, d^4x = 0.$$

Minthogy ψ variációja tetszés szerinti lehet, fennáll a

$$\partial_\psi \mathfrak{L} - \frac{d}{dx^\mu} (\partial_{\psi_\mu} \mathfrak{L}) = 0$$

egyenlet, amelyet (7, 5)-re tekintettel és figyelembe véve $\mathfrak{L}$-nek v^ϱ-ban való nulladfokú homogenitását, még a következő alakban adhatunk meg:

(7, 6) $$\partial_\psi \mathfrak{L} - \partial_\mu (\partial_{\psi_\mu} \mathfrak{L}) + (\partial_{\psi_\mu} \mathfrak{L}) \|_\varrho \Gamma^*{}_{0}{}^{\varrho}{}_{\mu} = 0.$$

Ezek az egyenletek éppen a ψ skalártér téregyenletei.

A ψ_μ vektortér esetében a LAGRANGE-féle skalársűrűség

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x, v, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu}) = L(\psi_\mu, \psi_{\mu\nu}) \sqrt{-g}$$

alakú, ahol

$$\psi_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \psi_\mu|_\nu .$$

A $v^\varrho(x)$ iránymező mentén (7, 5) miatt

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{d\psi_\mu}{dx^\nu} - \Gamma^*{}_{\mu}{}^{\varrho}{}_{\nu} \psi_\varrho .$$

Az előbbihez hasonlóan a téregyenletek levezethetők a

$$\delta \int_V \mathfrak{L} d^4x = 0$$

variációselvből, ha a variáció ψ_μ szerint történik:

(7, 7) $$\partial_{\psi_\mu} \mathfrak{L} - \partial_\varrho (\partial_{\psi_{\mu\varrho}} \mathfrak{L}) + (\partial_{\psi_{\mu\varrho}} \mathfrak{L}) \|_\sigma \Gamma^*{}_{0}{}^{\sigma}{}_{\varrho} - (\partial_{\psi_{\sigma\varrho}} \mathfrak{L}) \Gamma^*{}_{\sigma}{}^{\mu}{}_{\varrho} = 0.$$

(7, 6) és (7, 7) baloldalán álló kifejezések transzformációs formuláinak meghatározása mutatja, hogy ezek a kifejezések (+1)-edsúlyú skalár ill. vektorsűrűségek.

Függelék

Alternáló differenciálformák elméletének összefoglalása

Valamely $x^\varkappa$ koordinátákra vonatkoztatott ponttérben a π_ϱ PFAFF-féle formula

$$\pi_\varrho(d) = a_{\varrho\varkappa}(x)\, dx^\varkappa$$

típusú kifejezést jelent. Vonalelemterekre való általánosítás esetén a $dx^\varkappa$ differenciálok mellett még a $dv^\varkappa$ differenciálok is fellépnek, azonban $dv^\varkappa$ helyett a vektorjellegű $\omega^\varkappa(d)$ kifejezéseket szokás bevezetni. Vonalelem térben a PFAFF-féle formulák általános alakja tehát a következő:

$$\pi_\varrho(d) = a_{\varrho\varkappa}(x, v)\, dx^\varkappa + b_{\varrho\varkappa}(x, v)\, \omega^\varkappa(d).$$

Jelentsen $d_1, \ldots, d_m$ felcserélhető differenciális szimbólumokat; ezek segítségével a $\underset{(1)}{\pi}, \ldots, \underset{(m)}{\pi}$ PFAFF-féle formák külső szorzata a következő kifejezést jelenti:

$$[\underset{(1)}{\pi}, \underset{(2)}{\pi}, \ldots, \underset{(m)}{\pi}] = \begin{vmatrix} \underset{(1)}{\pi}(d_1) & \ldots & \underset{(1)}{\pi}(d_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{(m)}{\pi}(d_1) & \ldots & \underset{(m)}{\pi}(d_m) \end{vmatrix}.$$

Valamely $\pi(d)$ külső differenciálját a következőképpen definiáljuk:

$$\pi'(d, \delta) = d\pi'(\delta) - \delta\pi(d),$$

ahol d, δ felcserélhető differenciálási szimbólumok. π''-t a következő formula határozza meg:

$$(*) \qquad \pi''(d, \delta, \vartheta) = \vartheta\pi'(d, \delta) + d\pi'(\delta, \vartheta) + \delta\pi'(\vartheta, d).$$

π' értéke nulla, ha π teljes differenciál, π'' pedig mindig eltűnik, amint ez π'' explicit kiszámításával könnyen igazolható. A $\pi''(d, \delta, \vartheta)$ formulája különben rögtön megadja azon PFAFF-féle formák külső deriváltját, melyekben a PFAFF-formulában két d és δ differenciálási szimbólum szerepel, ha $(*)$ képletben $\pi'(d, \delta)$ helyett az általános $\pi(d, \delta)$ formulát írjuk. Ennek megfelelően természetesen $\pi''(d, \delta, \vartheta)$ helyett $\pi'(d, \delta, \vartheta)$ áll.

A külső szorzatoknál még a következő számolási szabályokat használtuk fel: Legyen τ, π és ϱ három PFAFF-féle forma, legyen továbbá

$$\omega(d, \delta) \overset{\text{def}}{=} [\pi\varrho],$$

akkor

$$[\tau\,\omega] = [\tau\pi\varrho];$$

$$[\pi\varrho]' = [\pi'\varrho] - [\pi\varrho'].$$

Ha $A(x, v)$ egy skaláris függvényt jelent, akkor

$$(A\pi)' = A\pi' + [dA\pi].$$

Elméleti Fizikai Intézet, Szeged.

IRODALOM

[1] L. Berwald, On Finsler and Cartan Geometry. III. *Ann. of Math.* **42**, 84—112. (1941).

[2] W. Blaschke, Integralgeometrie 12. Über vollkommene optische Instrumente. *Abh. aus dem math. Sem. Hamburg.* **11**, 409—412. (1936).

[3] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. (Paris, Gauthier-Villars, 1928.) 273.

[4]. E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et la géométrie differentielle traitées par la méthode du repère mobile. *Fasc.* **18**, *des Cahiers scientifiques, Paris,* 1938. Gauthier-Villars. 193.

[5] J. I. Horváth, Eine relativistische Feldtheorie in engerem Sinne des Dielektrikums. (Megjelenőben.)

[6] J. A. Schouten und J. Haantjes, Über die Feststellung von allgemeinen Massbestimmungen und Übertragungen in Bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten. *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 43, 161—176. (1936).

[7] O. Varga, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen. *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **50**, 165—175. (1941).

[8] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz. *Publ. Math. Debrecen.* **1**, 7—17. (1949).

[9] O. Varga, Az integrálgeometria alkalmazása a geometriai optikában. *Magyar Tudományos Akadémia III. o. Közleményei.* **1**, 192—201. (1951).

[10] H. Yukawa, On the Radius of the Elementary Particle. *Phys. Rev.* **76**, 300. (1949).

[11] H. Yukawa, Remarks on Non-Local Spinor Field. *Phys. Rev.* **76**, 1731. (1949).

[12] H. Yukawa, Structure and Mass Spectrum of Elementary Particles I. *General Consideration, Phys. Rev.* **91**, 415. (1953).

[13] H. Yukawa, Structure and Mass Spectrum of Elementary Particles II. Oscillator Model. *Phys. Rev.* **91**, 416. (1953).

[14] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles,* **79**, *Paris* 1934. *Herman et Cie.* 42.

[15] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartenschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.* **71**, 191—248. (1939).

[16] A. Moór, Entwicklug der Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume. (Megjelenőben.)

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA LEOLVASÁSA A POINCARÉ-FÉLE KÖRMODELLRŐL*

SZÁSZ PÁL

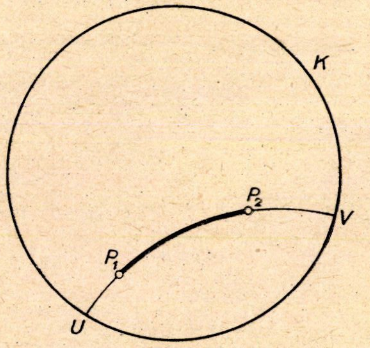
Bemutatta Hajós György r. tag az 1956. február 24-én tartott felolvasó ülésen

A hiperbolikus síkgeometriának ismert megvalósítása az euklideszi geometria keretében az alábbi *pszeudogeometria,* vagy *képgeometria,* amely H. POINCARÉ [1] munkái révén terjedt el s amelyet e geometria *Poincaré-féle körmodelljének* szokás nevezni.

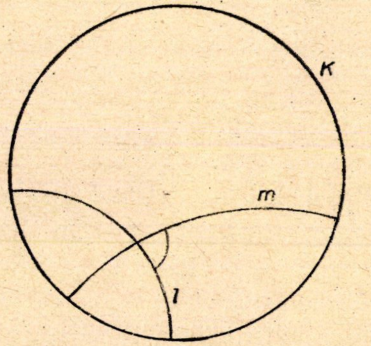
Legyen az euklideszi síkon valamely K kör mint *alapkör* megadva. E K kör belső pontjait nevezzük *pszeudopontoknak,* a K-t derékszögben metsző köröknek, ill. egyeneseknek (amelyeket közös néven *ortogonális köröknek* akarunk nevezni) a K belsejébe eső részeit mondjuk *pszeudoegyeneseknek.* A P_1 és P_2 pszeudopontokon átmenő ortogonális kör $\widehat{P_1P_2}$ ívét nevezzük *pszeudoegyenesdarabnak.* Ennek *karakterisztikája* legyen az

$$(UVP_2P_1) = \frac{UP_2}{P_2V} : \frac{UP_1}{P_1V}$$

kettősviszony, ahol U és V az említett ortogonális kör K-val való metszéspontjai, úgy jelölve, hogy P_2 az $\widehat{UV}$ íven P_1 és V között van (1. ábra). Két pszeudo-



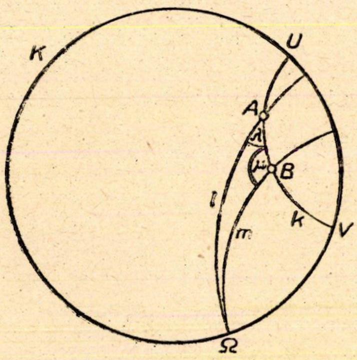
1. ábra



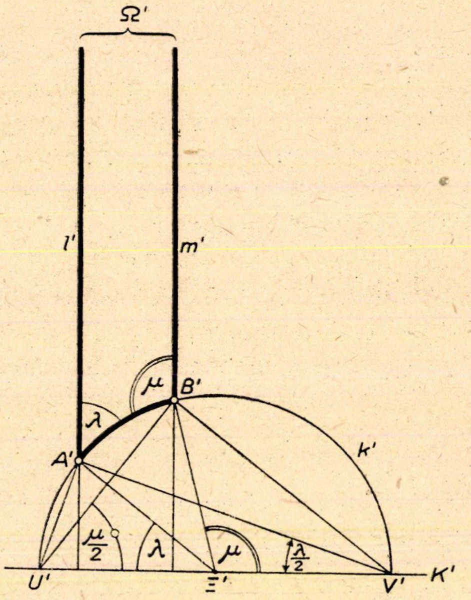
2. ábra

* Német nyelvű más változata: Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Hung.* **5** (1954), 29—34.

egyenesdarabot akkor mondjunk *pszeudokongruensnek*, vagy *pszeudoegyenlőnek*, ha a karakterisztikáik egyenlők. Ezzel szemben az l, m pszeudoegyenesek *pszeudoszöge* az őket képező ortogonális körök szögével legyen karakterizálva (2. ábra) s egyenlő karakterisztikájú pszeudoszögeket nevezzünk *pszeudokongruenseknek (pszeudoegyenlőknek)*. Könnyen meggyőződhetünk, hogy az ezen megállapodásokkal értelmezett pszeudogeometriában a hiberbolikus síkgeo-



3. *ábra*



4. *ábra*

metria minden axiómája teljesül. Megállapodásainkból már következik, hogy a P_1, P_2 pszeudopontok $\overline{P_1 P_2}$ *pszeudotávolsága* a fenti jelölések mellett

(1) $$\overline{P_1 P_2} = \log (U V P_2 P_1),$$

amennyiben *pszeudohosszegységnek* azt a pszeudoegyenesdarabot választjuk, amelynek karakterisztikája a természetes logaritmusok e alapszámával egyenlő.

Ez a POINCARÉ-féle körmodell azonban nemcsak modellje a hiperbolikus síkgeometriának, hanem ekvivalens is vele: a hiperbolikus síkot kölcsönösen egyértelműen leképezhetjük e körmodellre. Ezt könnyen megmutathatjuk, mégpedig a hiperbolikus trigonometria felhasználása nélkül [2]. Ennélfogva e körmodell trigonometriájának előállítása egyben a hiperbolikus trigonometria képleteinek bebizonyítását jelenti.

Ezen az úton igen elegánsan állította elő a hiperbolikus trigonometriát J. HJELMSLEV [3]. Meggondolásának lényege a következő. Tekintsünk olyan

$AB\Omega$ *elfajuló pszeudoháromszöget*, amelyben A és B pszeudopontok, míg Ω az alapkör kerületén fekvő pont (3. ábra). Legyen mint pszeudotávolság $\overline{AB}=c$, továbbá az A és B csúcsú pszeudoszögek legyenek $BA\Omega_{\sphericalangle}=\lambda$, $AB\Omega_{\sphericalangle}=\mu$. Az A és B pontokon átmenő k ortogonális kör K-val való U, V metszéspontjai jelölését válasszuk úgy, hogy az $\widehat{UV}$ íven B az A és V közé essék. Az ábrát Ω mint inverziócentrumra vonatkozólag invertálva, a K alapkör valamely K' egyenesbe, K belseje e K' egyenes egyik oldalán fekvő félsíkba, a k ortogonális kör e K' egyenesre merőleges k' körbe, az A és Ω ill. B és Ω pontokon átmenő l, ill. m ortogonális körök pedig K'-re merőleges l', resp. m' egyenesekbe mennek át (4. ábra). Az A, B, Ω, U, V pontok inverzei legyenek rendre A', B', Ω', U', V'; ezek közül Ω' a végtelenben van. Minthogy ez inverziónál a szögek nagysága megmarad, azért

$$B'A'\Omega'_{\sphericalangle}=\lambda, \quad A'B'\Omega'_{\sphericalangle}=\mu.$$

A k' kör középpontját Ξ'-vel jelölve, nyilván $A'\Xi'U'_{\sphericalangle}=\lambda$, $B'\Xi'V'_{\sphericalangle}=\mu$, tehát mint e középponti szögeknek megfelelő kerületi szögek

$$A'V'U'_{\sphericalangle}=\frac{\lambda}{2}, \quad B'U'V'_{\sphericalangle}=\frac{\mu}{2}.$$

Ennélfogva

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}=\frac{A'V'}{U'A'}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\mu}{2}=\frac{U'B'}{B'V'}$$

s így

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu}{2}=(U'V'B'A')=(UVBA),$$

miután ez inverziónál a kettősviszony is megmarad. De $\overline{AB}=c$ folytán az (1) alatti távolságképletre tekintettel

$$(UVBA)=e^{c},$$

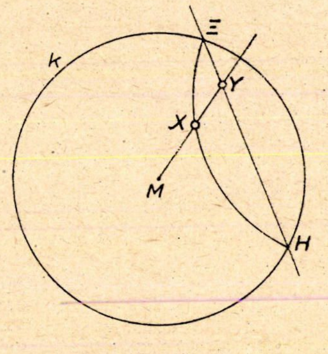
tehát látjuk, az $AB\Omega$ elfajuló pszeudoháromszög alkatrészeire fennáll az,

$$e^{c}=\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu}{2}$$

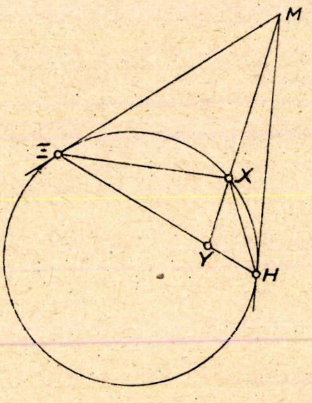
alapképlet. Ez a mondottak szerint a hiperbolikus síkon is érvényes. Amint J. HJELMSLEV [4] idézett könyvében megmutatja, ez alapképletből már egyszerűen előállíthatók a derékszögű háromszög hiperbolikus trigonometriai képletei. Ezt az előállítást más helyen [5] már ismertettem. Sokkal bonyodalmasabban állították elő a hiperbolikus trigonometriát a POINCARÉ-féle körmodellből HOWARD EVES és V. E. HOGGATT [6].

Az alábbiakban bizonyos elemigeometriai segédtételek alapján, amelyeket egy előbbi dolgozatomban [7] már bebizonyítottam, a POINCARÉ-féle körmodellről közvetlenül leolvassuk a derékszögű *pszeudoháromszög* trigonometriájának két alapképletét, amelyekből az egész hiperbolikus trigonometria következik. E segédtételek a következők:

1. Segédtétel. Ha X az M középponttól különböző pont a k kör belsejében és X-en át olyan kört fektetünk, amely k-t a Ξ, H pontokban derékszögben metszi, akkor a ΞH és MX egyenesek Y metszéspontja független az X-en át fektetett kör választásától (5. ábra).



5. ábra



6. ábra

2. Segédtétel. Ha valamely körnek $\widehat{\Xi H}$ a félkörnél kisebb íve és M a kör Ξ ill. H-beli érintőinek metszéspontja, akkor bárhogyan választva a $\widehat{\Xi H}$ ív közbülső X pontját, a ΞH és MX egyenesek Y metszéspontjára

$$\left(\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}}\right)^2 = \frac{\Xi Y}{Y\mathrm{H}}$$

(6. ábra).

3. Segédtétel. Ha X az M középponttól különböző pont a k kör belsejében és Ξ_0, H_0 az MX egyenesnek k-val való metszéspontjai, úgy jelölve, hogy X az M és H_0 között fekszik, akkor az X pontnak az 1. segédtétel szerint megfelelő Y pontra

$$\left(\frac{\Xi_0 X}{X\mathrm{H}_0}\right)^2 = \frac{\Xi_0 Y}{Y\mathrm{H}_0}$$

(7. ábra).

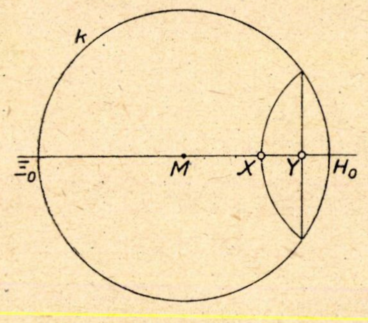
Legyen a K alapkör középpontja O, sugara r. Valamely $X \neq O$ pszeudopontnak az 1. segédtétel szerint megfelelő Y pontra nézve az OY távolságot könnyen kifejezhetjük a $t = \overline{OX}$ pszeudotávolsággal. Legyenek ugyanis U, V

az OX egyenes és K metszéspontjai, úgy jelölve, hogy X az O és V közé essék (8. ábra). Akkor az (1) távolságképlet értelmében $UO = OV$ folytán

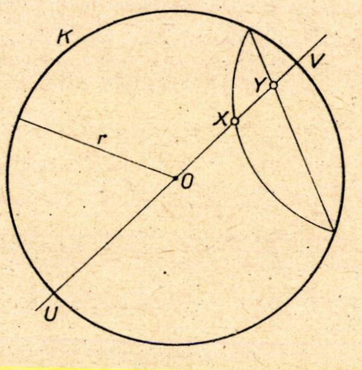
$$e^t = (UVXO) = \frac{UX}{XV}.$$

Ennélfogva a 3. segédtétel felhasználásával

$$e^{2t} = \left(\frac{UX}{XV}\right)^2 = \frac{UY}{YV} = \frac{r+OY}{r-OY}$$



7. ábra



8. ábra

s innen

$$(2) \qquad OY = r\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = r \operatorname{th} t.$$

Tekintsünk mármost valamely ABC derékszögű pszeudoháromszöget, amelyben $C_{\sphericalangle} = 90^\circ$ s amelynek alkatrészei

$$(3) \qquad \overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, A_{\sphericalangle} = \lambda, B_{\sphericalangle} = \mu.$$

Ha $A \neq O$, akkor a K alapkört, valamint annak belsejét önmagába átvivő inverzióval A mindig O-ba vihető [8]: az A-ban OA-ra állított merőlegesnek K-val való egyik metszéspontját S-sel, a K kör S-beli érintőjének OA-val való metszéspontját pedig O'-vel jelölve (9. ábra), az O' középpontú és $O'S$ sugarú körre vonatkozó inverzióval K valamint annak belseje önmagába megy át s A éppen O-ba kerül. Ez inverziónál a szögek nagysága, valamint a kettősviszony megmarad [9], tehát az ABC pszeudoháromszögből származó $A_1B_1C_1$ pszeudoháromszög (amelyben $A_1 = O$), rendre ugyanazokkal az alkatrészekkel bír, tekintettel a pszeudokongruenciára tett fenti megállapodásainkra.*

* Ez észrevételre szükség van már akkor, midőn a pszeudokongruenciát illetően a Hilbert-féle III_5 egybevágósági axiómát bizonyítjuk be.

Ennélfogva az ABC pszeudoháromszögre vonatkozó hiperbolikus trigometriai képletek megállapításánál feltehetjük, hogy $A = O$ (10. ábra).

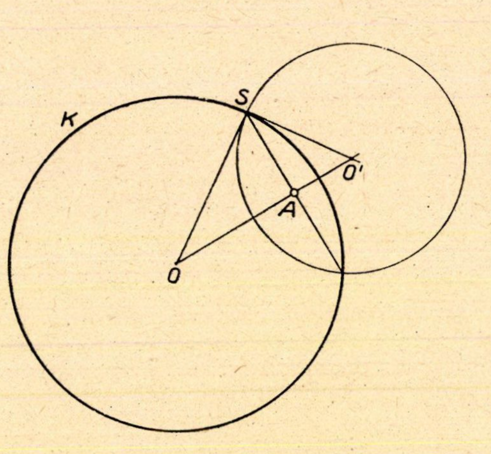
Legyenek a B és C pontokon átmenő ortogonális körnek a K alapkörrel való metszéspontjai U és V, úgy jelölve, hogy az $\widehat{UV}$ íven C az U és B közé essék. Akkor (1) értelmében az ABC pszeudoháromszög $\overline{BC} = a$ oldalára $UC = CV$ folytán

$$(4) \qquad e^a = (UVBC) = \frac{UB}{BV}.$$

S ha az AB, AC egyenesek UV-vel való metszéspontjait B' és C'-vel jelöljük, a 2. segédtétel szerint

$$(5) \qquad \left(\frac{UB}{BV}\right)^2 = \frac{UB'}{B'V} = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\lambda},$$

ahol $\beta = COV_{\sphericalangle} = UOC_{\sphericalangle}$ az $\overline{OC} = b$ pszeudotávolságnak megfelelő úgynevezett *elpattanási szög.*



9. ábra

Mármost (4)-ből (5) alapján

$$e^{2a} = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\lambda},$$

honnan

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}\operatorname{tg}\beta = \operatorname{th} a \operatorname{tg}\beta.$$

De (2) felhasználásával $\overline{OC} = b$ folytán

$$(7) \qquad r\cos\beta = OC' = r \operatorname{th} b,$$

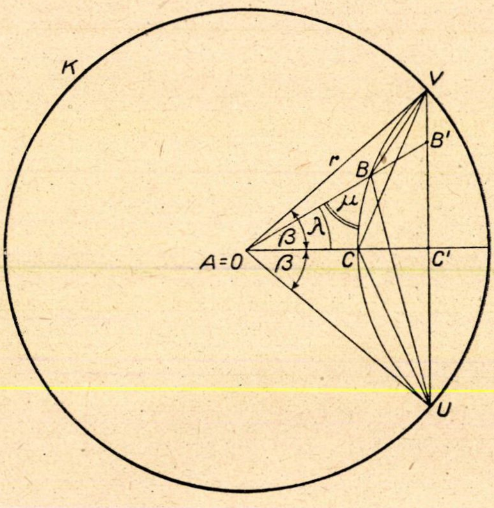
vagyis $\cos\beta = \text{th}\, b$ s így

$$\text{tg}\,\beta = \frac{1}{\text{sh}\, b}.$$

Ezt (6) alatt behelyettesítve, előáll a

$$\text{(I)} \qquad \text{tg}\,\lambda = \frac{\text{th}\, a}{\text{sh}\, b}$$

alapképlet, amely a derékszögű háromszög alkatrészei közül az egyik hegyesszög és a két befogó között állapít meg összefüggést a hiperbolikus síkon.



10. ábra

Minthogy (10. ábra)

$$\cos\lambda = \frac{OC'}{OB'}$$

és (2) értelmében $\overline{AB} = c$ folytán (7) mellett még

$$OB' = r\,\text{th}\, c,$$

ily módon nyerjük a

$$\text{(II)} \qquad \cos\lambda = \frac{\text{th}\, b}{\text{th}\, c}$$

második alapképletet, amely a hiperbolikus síkon a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge, a mellette fekvő befogó és az átfogó közötti összefüggést fejezi ki.

E (I) és (II) alapképletekből, melyeket itt a POINCARÉ-féle körmodellről leolvastunk, már folyik a hiperbolikus síkon a derékszögű háromszög (3) alatti alkatrészei közül három-három között még fennálló további négy egyenlet s ezzel az egész hiperbolikus trigonometria.

IRODALOM

[1] H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica* (Stockholm), 1 (1882), 1—62, speciálisan § 2, 6—8 és § 12, 58—61; Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *ugyanott* 193—294, speciálisan 201—202; Mémoire sur les groupes kleinéens, *ugyanott* 3 (1883), 49 92, speciálisan 55—56.

[2] V. ö. SZERZŐTŐL, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Hung.* 4 (1953), 243—250, speciálisan § 1, 244—247.

[3] J. HJELMSLEV, Grundlag for den projektive Geometri, Kobenhavn, 1943, § 8, 38—39.

[4] J. HJELMSLEV [3], i. h. § 7, 36—37.

[5] SZERZŐTŐL: A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel, *MTA Mat. és Fiz. O. Közleményei* 3 (1953), 527—533, speciálisan 531—532.

[6] HOWARD EVES and V. E. HOGGATT, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *American Math. Monthly* 58 (1951), 469—474.

[7] SZERZŐTŐL: Elementargeometrische Herstellung des Klein-Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes, *Acta Scientiarum Mathematicarum* 16 (1955) 1—8, speciálisan 4—5.

[8] E fogást illetően v. ö. HOWARD EVES and V. E. HOGGATT [6], i. h. 470—471.

[9] A kettősviszony megmaradásának elemigeometriai bebizonyítását illetően lásd pl. SZERZŐTŐL, [7], i. h. 7, 9) lábjegyzet.

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA ELŐÁLLÍTÁSA A POINCARÉ-FÉLE FÉLSÍK ÚTJÁN*

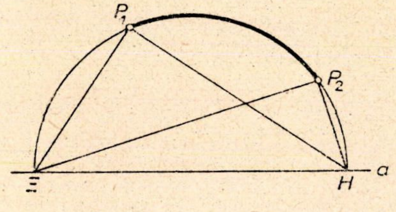
SZÁSZ PÁL

H. POINCARÉ [1] a hiperbolikus síkgeometria megvalósításaképp az alábbi modellt, mondhatnók *pszeudogeometriát* vagy *képgeometriát* adta meg, ha némileg más alakban is. Ezt röviden *Poincaré-féle félsíknak* nevezzük.

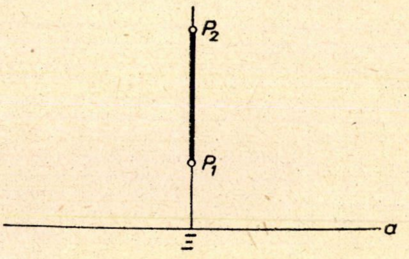
Legyen az euklideszi síkon valamely a egyenes mint *alapegyenes* megadva. Az általa meghatározott két félsík egyikének belső pontjait nevezzük *pszeudopontoknak*, az e félsíkban fekvő és az alapegyenest derékszögben metsző félköröket és félegyeneseket (amelyeket *ortogonális félköröknek*, ill. *ortogonális félegyeneseknek* akarunk a továbbiakban nevezni), mondjuk *pszeudoegyeneseknek*, természetesen nem számítva ezekhez az a-ra eső végpontjaikat. Ha a P_1 és P_2 pszeudopontok nem ortogonális félegyenesen feküsznek, akkor a rajtuk átmenő ortogonális félkör $\widehat{P_1P_2}$ ívét, ellenkező esetben a P_1P_2 egyenesdarabot nevezzük *pszeudoegyenesdarabnak*. Ennek *karakterisztikája* legyen az első esetben a

$$(\Xi \mathrm{H} P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{P_2 \mathrm{H}} : \frac{\Xi P_1}{P_1 \mathrm{H}}$$

kettősviszony, ahol Ξ és H a P_1, P_2 pontokon átmenő ortogonális félkör végpontjai, úgy jelölve, hogy P_2 a $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ félkörön a P_1 és H között van (1. ábra).



1. ábra



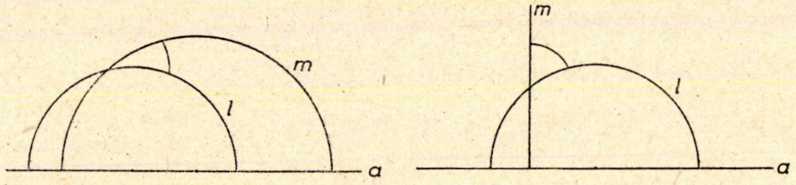
2. ábra

A második esetben a *karakterisztika* legyen a

$$(\Xi P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}$$

* Német nyelvű változata: Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **15** (1954), 126—129.

osztóviszony, ha Ξ a P_1 és P_2-t tartalmazó ortogonális félegyenes kezdőpontja s P_1 a Ξ és P_2 közé esik (2. ábra). Két pszeudoegyenesdarabot nevezzünk *pszeudokongruensnek* vagy *pszeudoegyenlőnek*, ha a karakterisztikáik egyenlők. Ezzel szemben az l, m pszeudoegyenesek *pszeudoszöge* az ezeket képező ortogonális félkörök (esetleg ortogonális félkör és ortogonális félegyenes) szögével legyen karakterizálva (3. ábra) s egyenlő karakterisztikájú pszeudoszögeket nevezzünk *pszeudokongruenseknek (pszeudoegyenlőknek).* Meggyőződhetünk, hogy az ezen megállapodásokkal értelmezett pszeudogeometriában a hiperbolikus síkgeometriának minden posztulatuma ki van elégítve. Megállapodásainkból már következik, hogy amennyiben *pszeudohosszegységnek* azt a pszeudoegyenesdarabot választjuk, amelynek karakterisztikája a természetes loga-



3. *ábra*

ritmusok e alapszámával egyenlő, a nem egy ortogonális félegyenesben fekvő P_1, P_2 pszeudopontok $\overline{P_1P_2}$ *pszeudotávolsága* a fenti jelölések mellett

(1) $$\overline{P_1P_2} = \log(\Xi \mathrm{H} P_2 P_1),$$

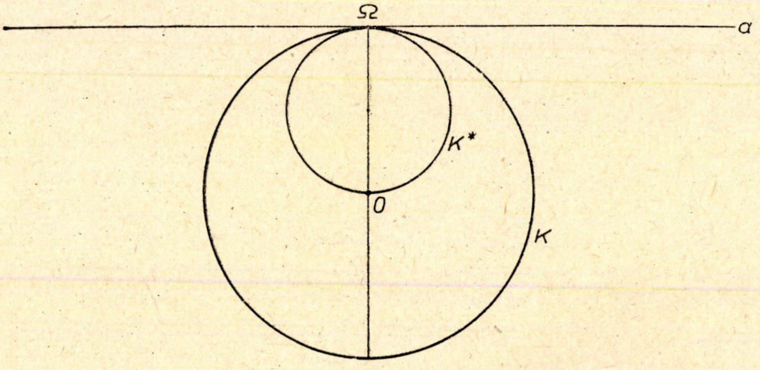
míg ellenkező esetben ez (1) képletnek megfelelően

(2) $$\overline{P_1P_2} = \log \frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}.$$

Ez a Poincaré-féle félsík azonban nemcsak modellje a hiperbolikus síkgeometriának, hanem ekvivalens is vele: a hiperbolikus síkot kölcsönösen egyértelműen leképezhetjük a Poincaré-féle félsíkra. Ezt igen egyszerűen megtehetjük, mégpedig a hiperbolikus trigonometria felhasználása nélkül [2]. Ennélfogva a hiperbolikus trigonometria képleteit bebizonyítandó, elegendő a a Poincaré-féle félsík trigonometriáját előállítanunk.

Lényegében ugyanez a feladat a hiperbolikus sík *Poincaré-féle körmodellje* trigonometriájának előállítása, amivel előbbi dolgozatunk is foglalkozik [3]. Ugyanis a Poincaré-féle félsík kölcsönösen egyértelműen leképezhető e körmodellre. Ez elemigeometriai úton következőképp történhet. A Poincaré-féle félsíkot az a alapegyenest Ω-ban érintő és annak másik oldalán fekvő O középpontú K körre vonatkozó inverzióval leképezzük az $O\Omega$ átmérőjű K^* kör belsejére, majd e körbelsőt Ω mint hasonlósági centrumra vonatkozólag kétszeresen nagyítjuk (4. ábra). Ezzel nyilván megkapjuk a K-beli körmodellt, tekintve, hogy e transzformációnál kör vagy egyenes körbe (az inverzió O középpontján átmenő kör vagy egyenes egyenesbe) megy át és a szögek nagysága, valamint a kettősviszony megmarad. E megfelelkezés révén a körmodell trigonometriájának előállításával a Poincaré-féle félsík trigonometriáját is megkapjuk.

Nem látszik érdektelennek azonban a Poincaré-féle félsík trigonometriájának közvetlen előállítása sem. Ez többféle módon lehetséges, ezek egyikét



4. ábra

mutatjuk be az alábbiakban. Részben hasonló módszerrel élt már H. MESCHKOWSKI [4] is.

*

Legyen ABC derékszögű *pszeudoháromszög* ($C_{\sphericalangle} = 90°$) a

$$\overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ \overline{AB} = c,\ BAC_{\sphericalangle} = \lambda,\ CBA_{\sphericalangle} = \mu$$

alkatrészekkel. Hozzuk ezt a B pont körüli *pszeudoforgással* olyan helyzetbe, hogy B a rajta átmenő ortogonális félegyenes Ω kezdőpontja és C közé essék (5. ábra). Az $\Omega B = 1$ hosszegységválasztás mellett (2) szerint

$$a = \overline{BC} = \log \Omega C,$$

vagyis

$$\Omega A = \Omega C = e^a. \tag{3}$$

Az A és B pontokon átmenő ortogonális félkör középpontját Γ-val jelölve, nyilván $\Omega \Gamma B_{\sphericalangle} = \mu$ és így

$$\Gamma A = \Gamma B = \frac{1}{\sin \mu},\quad \Omega\Gamma = \operatorname{ctg} \mu. \tag{4}$$

De mivel evidenter $\Omega A \Gamma_{\sphericalangle} = \lambda$, az $A\Omega\Gamma$ háromszögben a cosinus-tétel szerint

$$\Omega\Gamma^2 = \Omega A^2 + \Gamma A^2 - 2\Omega A \cdot \Gamma A \cos \lambda,$$

azaz (3) és (4)-re tekintettel

$$\operatorname{ctg}^2\mu = e^{2a} + \frac{1}{\sin^2\mu} - \frac{2e^a}{\sin\mu}\cos\lambda,$$

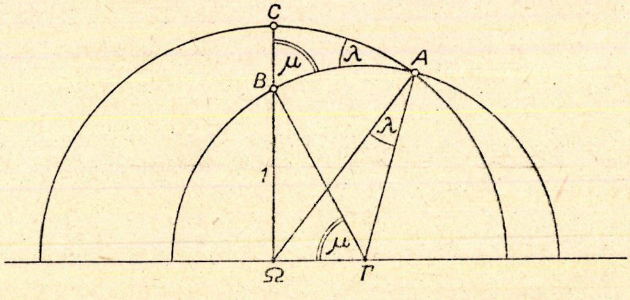
amiből következik

$$2e^a\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = e^{2a}+1,$$

vagy

(I) $$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch} a,$$

a derékszögű pszeudoháromszög λ, μ, a alkatrészei között fennálló egyenlet.



5. ábra

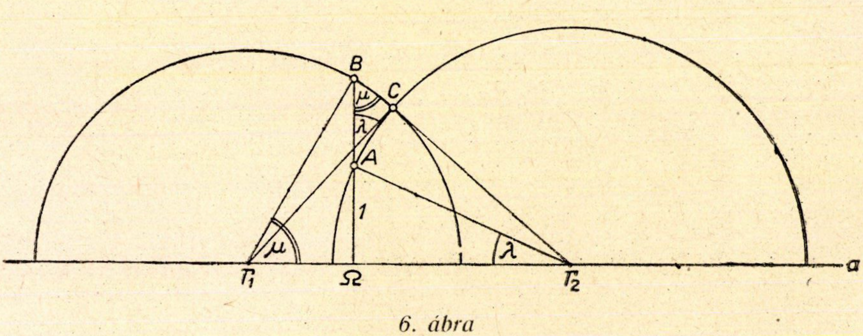
A λ, μ, c közötti egyenletet H. MESCHKOWSKI [5] meggondolásával következőképp kaphatjuk meg. Hozzuk a háromszöget B körüli pszeudoforgással olyan helyzetbe, hogy A a B és az előbbi Ω pont közé essék (6. ábra). Most az $\Omega A = 1$ választással (2) értelmében

$$c = \overline{AB} = \log \Omega B,$$

vagyis

(5) $$\Omega B = e^c.$$

Jelöljük a B, C pontokon átmenő ortogonális félkör középpontját Γ_1-gyel, az



6. ábra

A és *C*-n átmenőét Γ_2-vel. Akkor nyilván $\Omega\Gamma_1 B\sphericalangle = \mu$, $\Omega\Gamma_2 A\sphericalangle = \lambda$, tehát (5)-re tekintettel

(6) $$\Omega\Gamma_1 = e^c \operatorname{ctg}\mu, \quad \Omega\Gamma_2 = \operatorname{ctg}\lambda,$$

továbbá

(7) $$\Gamma_1 C = \Gamma_1 B = \frac{e^c}{\sin\mu}, \quad \Gamma_2 C = \Gamma_2 A = \frac{1}{\sin\lambda}.$$

Minthogy azonban a feltevés szerint a két ortogonális félkör *C*-ben egymást derékszög alatt metszi, azért a $\Gamma_1 C\Gamma_2\sphericalangle$ derékszög, tehát PYTHAGORAS tétele értelmében

$$\Gamma_1\Gamma_2^2 = \Gamma_1 C^2 + \Gamma_2 C^2,$$

vagyis (6) és (7) alapján

$$(e^c \operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\lambda)^2 = \frac{e^{2c}}{\sin^2\mu} + \frac{1}{\sin^2\lambda}.$$

Innen adódik

$$2e^c \operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu = e^{2c} + 1,$$

vagy

(II) $$\operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu = \operatorname{ch} c,$$

a derékszögű pszeudoháromszög λ, μ, c alkatrészei között fennálló egyenlet.

E (I) és (II) képletekből már folyik az egész hiperbolikus trigonometria. Ennek tehát a Poincaré-féle félsík útján való előállítását ezzel befejezettnek tekinthetjük.

IRODALOM

[1] V. ö. H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica* (Stockholm) **1** (1882), 1—62, speciálisan § 2, 6—8.

[2] Lásd SZERZŐTŐL, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Hung.* **4** (1953), 243—250, speciálisan § 1, 244—247.

[3] Lásd itt közölt első cikkünket, 73—80.

[4] H. MESCHKOWSKI, Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie, *Elemente der Mathematik* **7** (1952), 130—132.

[5] H. MESCHKOWSKI,[4] i. h.

A KLASSZIKUS ORTOGONÁLIS POLINOMRENDSZEREK EGY JELLEMZÉSÉRŐL

FELDMANN LÁSZLÓ

Klasszikus ortogonális polinomrendszereknek nevezzük a Jacobi, Laguerre és Hermite polinomokat; illetőleg azokat a polinomokat, amelyek ezekből lineáris transzformációval nyerhetők. A klasszikus ortogonális polinomrendszerek közös tulajdonsága, hogy mindegyikhez található olyan

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = \lambda y \tag{1.1}$$

alakú differenciálegyenlet, melynek az illető polinomrendszer megoldása. Ez úgy értendő, hogy létezik $\{\lambda_n\}$ számsorozat, melynek $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ elemét λ helyébe helyettesítve, az illető polinomrendszer $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ *pontosan* nulla, első, ..., n-edfokú tagjai kielégítik (1.1) egyenletet.

Más ortogonális polinomrendszer, mely az említett módon kielégít (1.1) alakú differenciálegyenletet, nem ismeretes. Jelen dolgozatban bebizonyítjuk, hogy ilyen ortogonális polinomrendszer — a három klasszikuson kívül — nem is található.

Eljárási módot is adunk annak megállapítására, hogy adott (1.1) differenciálegyenletnek van-e ortogonális polinomrendszer megoldása (a már említett értelemben) és ha van, akkor melyek a polinomrendszer azon jellemző adatai, melyek segítségével a polinómrendszer megkonstruálható.

Annak lehetőségét, hogy a klasszikus ortogonális polinómrendszerek jellemezhetők, mint (1.1) egyenlet egyedüli megoldásai az ortogonális polinomrendszerek között, ACZÉL JÁNOS vetette fel.*

2. Közelebbről meghatározzuk azon (1.1) egyenletet melynek megoldásai, valamely klasszikus polinomrendszer tagjai.

*J. ACZÉL: Eine Bemerkung über die Charakterisierung der „klassischen" orthogonalen Polynome. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953). A probléma még így is felvethető: Keresendők (1.1) egyenlet megoldásai, a szokásos peremfeltételek helyett azon feltétellel, hogy „legyen a megoldás polinóm". Mikor található ekkor megfelelő $\{\lambda_n\}$-hez olyan $\{p_n\}$ rendszer, mely ortogonális rendszer nemnegatív súlyfüggvénnyel?

Hasonló témájú L. FELDMANN: Über durch Sturm—Liouvillesche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polinomsysteme. Publ. Math. 3. (1954) cikke. Jelen dolgozat 1. és 2. tétele azonban más bizonyítási eljárásokkal és többet mond ki, mint az említett cikk.

1. LEMMA. *Legyen* (1.1) *egyenletnek* p_0, p_1 *és* p_2 *pontosan nulla-, első- és másodfokú polinommegoldása, különböző* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ *paraméterértékek mellett. Ekkor* $a(x)$ *legfeljebb másodfokú,* $b(x)$ *pontosan elsőfokú polinom és* $c(x)$ *állandó. Így alkalmas lineáris helyettesítéssel* (1.1) *egyenlet*

$$Qy'' + xy' = \lambda y \tag{2.1}$$

alakra hozható, hol

$$Q = ax^2 + bx + c \tag{2.2}$$

legfeljebb másodfokú polinom és ha van — pontosan n-edfokú — polinommegoldás, akkor a hozzátartozó λ *érték*

$$\lambda_n = n\cdot(n-1)a + n. \qquad (n \geqq 2) \tag{2.3}$$

BIZONYÍTÁS. p_0-t behelyettesítve (1.1) egyenletbe, kapjuk

$$c(x)p_0 = \lambda_0 p_0$$

Ebből $c(x) = \lambda_0$. Behelyettesítve p_1-et

$$b(x)p_1' + \lambda_0 p_1 = \lambda_1 p_1$$

lesz, melyből

$$b(x) = \frac{1}{p_1'}(\lambda_1 - \lambda_0)p_1$$

ami pontosan elsőfokú polinom, mivel $\lambda_0 \neq \lambda_1$.

Végül p_2 behelyettesítve és $b(x)$, $c(x)$ helyébe a már meghatározott értékeket téve

$$a(x)p_2'' + \frac{1}{p_1'}(\lambda_1 - \lambda_0)p_1 p_2' + \lambda_0 p_2 = \lambda_2 p_2$$

lesz, melyből

$$a(x) = \frac{1}{p_2''}\left\{(\lambda_2 - \lambda_0)p_2 - \frac{1}{p_1'}(\lambda_1 - \lambda_0)p_1 p_2'\right\}$$

legfejebb másodfokú polinom. $b(x)$ főegyütthatójával végigosztva (1.1) egyenletet, majd $x' = x + \delta$ lineáris helyettesítést alkalmazva és az állandó együtthatókat egybeolvasztva kapjuk (2.1)-et. Hátra van még (2.3) igazolása. Ezt p_n pontosan n-edfokú polinom (2.1)-be helyettesítésével és x^n-hez tartozó együtthatók összehasonlításával kapjuk.

2. LEMMA. *A Jacobi, Laguerre és Hermite polinómok differenciálegyenlete olyan* (2.1) *alakú egyenletbe transzformálható — megfelelő lineáris transzformációval — melyben* $a \geqq 0$ *és* $c < 0$.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy a megfelelő klasszikus polinómrendszer lineáris transzformációjával elérhető, hogy olyan polinomokba mennek át, melyek Jacobi polinomok esetén a

$$(2.4)\qquad (x^2-1)y''+[(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]y'=n(\alpha+\beta+n+1)y \qquad \alpha>-1 \text{ és } \beta>-1$$

differenciálegyenletet; Laguerre polinomok esetén a

$$(2.5)\qquad -xy''+(x-\alpha-1)y'=ny \qquad \alpha>-1$$

differenciálegyenletet; végül Hermite polinomoknál a

$$(2.6)\qquad -y''+2xy'=2ny$$

differenciálegyenletet elégítsék ki. (Pl. Jacobi polinomokra ez az a lineáris transzformáció, mely az ortogonalitási intervallumát a szokásos $(-1, +1)$ intervallumba viszi át.)

Elegendő a bizonyítást tehát ezekre elvégezni. Végrehajtva (2.4) egyenletben

$$x=\frac{1}{\alpha+\beta+2}x'+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$$

helyettesítést; (2.5) egyenletben

$$x=x'+\alpha+1$$

és (2.6) egyenletben

$$x=\frac{1}{2}x'$$

helyettesítést, közvetlenül belátható a lemma állítása.

3. Rátérünk a célul kitűzütt probléma megoldására, annak bizonyítására, hogy az eddig tárgyalt három klasszikus polinomrendszeren kívül nincsen más ortogonális polinomrendszer megoldása az (1.1) differenciálegyenletnek.

Nyilván elegendő lesz ehhez azt megmutatni, hogy ha van *ortogonális* $\{p_n\}$ megoldásrendszer, akkor 1. és 2. lemma feltételei is teljesülnek (1.1) egyenletben.

1. TÉTEL. *Az ortogonális polinomrendszerek közül a klasszikus polinomrendszerekhez és csakis ezekhez rendelhető* (1.1) *alakú differenciálegyenlet, oly módon, hogy a polinomrendszer minden tagja megoldása legyen ugyanazon differenciálegyenletnek, különböző λ értékek mellett.*

E tétel helyett, egy nálánál *erősebb* tételt fogunk bizonyítani.

2. TÉTEL. *Legyen $p_0, p_1, \ldots, p_n$ pontosan nulla, első, ..., n-edfokú polinom. Legyenek továbbá ezen $\{p_n\}$ rendszer nullahelyei különbözők, valósak és szétválasztottak. Ez utóbbi azt jelentse, hogy — jelölve p_n k-ik nullahelyét*

α_{nk}-val —

(3.1) $$\alpha_{n+1,1} < \alpha_{n,1} < \alpha_{n+1,2} < \alpha_{n,2} < \ldots < \alpha_{nn} < \alpha_{n+1,n+1}$$

álljon fenn.

Ekkor, ha $\{p_n\}$ rendszer minden egyes tagja megoldása (1.1) *differenciálegyenletnek megfelelő $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paraméterérték mellett, akkor p_n rendszer csak a három klasszikus polinomrendszer egyike lehet.*

BIZONYÍTÁS. Figyelembe véve 1. és 2. lemmát, elegendő lesz azt bizonyítani, hogy a megfelelő tulajdonságú $\{p_n\}$ rendszer olyan (2.1) alakú differenciálegyenletet elégít ki, melyben $a \geqq 0$ és $c < 0$.

Először $a \geqq 0$ feltételt bizonyítjuk. $c < 0$ ebből közvetlenül következik majd.

A (2.1) egyenlet

(2.1)'' $$a(x)y'' + b(x)y' = \lambda c(x)y$$

alakú differenciálegyenlet. Ha $a(x), b(x)$ és $c(x)$ együtthatókat úgy akarjuk meghatározni, hogy adott $p_1 = x + a_{10}$, $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k$ $(a_{nn} = 1)$ és $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k} x^k$ $(a_{n+1,n+1} = 1)$ 1-főegyütthatós polinomok, megoldásai legyenek (2.1'')-nek, úgy járhatunk el, hogy az *adott* p_1, p_n és p_{n+1} függvényeket (2.1'')-be rendre behelyettesítjük és az így $a(x), b(x)$ és $c(x)$-re kapott homogén lineáris egyenletrendszert megoldjuk. Ennek — mint ismeretes — akkor és csak akkor van triviálistól külömböző megoldása, ha

(3.2) $$D(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 p_1 \\ p_n'' & p_n' & -\lambda_n p_n \\ p_{n+1}'' & p_{n+1}' & -\lambda_{n+1} p_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Mivel (2.1) is (2.1'') típusba tartozik, így (2.1) megoldására is fennáll (3.2).

A szereplő polinómok mindegyikére *ugyanazt* az $x' = x + \delta$ alakú helyettesítést végrehajtva, nem fog megváltozni a nullahelyek száma és kölcsönös helyzete, pusztán az egész „gyökrendszer" fog δ-val eltolódni. Továbbá mivel λ_n pusztán a és n függvénye és ez utóbbiak ilyen helyettesítésre invariánsok, így λ_n értéke is változatlan marad a helyettesítés végrehajtása után.

Az említett helyettesítéssel — $\delta = -\alpha_{n+1,1}$ választással — elérhető, hogy p_{n+1} első nullahelye

(3.3) $$\alpha_{n+1,1} = 0$$

legyen. Ekkor

$$D(\alpha_{n+1,1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 a_{10} \\ 2a_{n2} & a_{n1} & -\lambda_n a_{n0} \\ 2a_{n+1,2} & a_{n+1,1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebből*

$$\lambda_n = \frac{a_{10}}{a_{n+1,2}\cdot a_{n0}}\,(a_{n1}a_{n+1,2} - a_{n2}a_{n+1,1}). \tag{3.4}$$

Tekintettel arra, hogy (2.3) kifejezésből következik, hogy $a \geq 0$ ekvivalens $\lambda_n > 0$ (ha $n \geq 2$) feltétellel, csak azt kell bebizonyítanunk, hogy (3.4) kifejezés pozitív.

Célszerű lesz a_{nk} együtthatókat gyöktényezős alakban felírni. Ismeretes, hogy a_{nk} felírható mint p_n gyökeinek $(n-k)$-ad osztályú kombinációinak öszszege; pozitív vagy negatív előjellel aszerint, hogy $n+k$ páros vagy páratlan szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$a_{nk} = (-1)^{n+k} \sum_{\binom{n}{n+k}} \overbrace{\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}}^{n-k}$$

Mivel — tekintettel (3.1) és (3.3)-ra — esetünkben minden α_{nk} nullahely pozitív, így a_{nk} előjele pusztán $n+k$ párosságától függ. Így (3.4) jobboldalának első tényezője biztosan pozitív, mert $a_{n+1,2}a_{n0} < 0$ (mivel $n+1+2$ és $n+0$ párossága különböző) és $a_{10} < 0$, mert az indexösszeg páratlan.

Ezért elegendő a második tényező vizsgálata, mely gyökös alakban felírva (figyelembe véve már az előjeleket is és azt, hogy $\alpha_{n+1,1} = 0$)

$$\sum_{\binom{n}{n-1}} \overbrace{\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}}^{n-1} \cdot \sum_{\binom{n}{n-1}} \overbrace{\alpha_{n+1,2}\ldots\alpha_{n+1,n+1}}^{n-1} - \alpha_{n+1,2}\ldots\alpha_{n+1,n+1}\cdot \sum_{\binom{n}{n-2}} \overbrace{\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}}^{n-2}. \tag{3.5}$$

Így látható be, hogy (3.5) pozitív:

Jelöljük I-gyel a pozitív előjelű tagokat és II-vel a negatívokat. Megfeleltetést létesítünk II és I tagjai között a következőképpen: Felírjuk p_n és p_{n+1} szereplő nullahelyeit:

$$\alpha_{n1},\ldots,\alpha_{nn},\alpha_{n+1,2},\ldots,\alpha_{n+1,n+1}. \tag{3.6}$$

Ebből II valamely tagját megkapjuk, ha töröljük α_{nk} és α_{ni} elemeket $(k < i)$ és a maradék tagok szorzatát képezzük. Rendeljük hozzá II ezen tagjához I-ből azt a tagot, mely (3.6)-ból α_{nk} és $\alpha_{n+1,i}$ $(i \neq 1)$ törlésével és a megmaradt tagok összeszorzásával keletkezett.

Figyelembe véve (3.1) egyenlőtlenség sorozatot, $\alpha_{nk} > \alpha_{n+1,k}$ miatt, az egymásnak megfelelő tagok közül, a pozitív előjelű a nagyobb abszolút értékű. Így (3.5) valóban pozitív.

* $D(a_{n+1,1})$ determinánsból látható, hogy $\lambda_1 = 0$ feltételezve $\lambda_n a_{n0} a_{n+1,2} = 0$ lenne, ami α_{nk} gyökök pozitív volta miatt $\lambda_n = 0$ egyenlőségre vezet, ami lehetetlen. Így feltételezhetjük, hogy $\lambda_1 = 1$.

Ezzel $\lambda_n > 0$ és a vele ekvivalens $a \geqq 0$ bizonyítását befejeztük.

Végül $c < 0$ bizonyítása a következő:

(2. 1) egyenletnek $\lambda_1 = 1$ paraméterérték melletti elsőfokú megoldása: $p_1 = x$. Behelyettesítve $p_2 = x^2 + \beta x + \gamma$ megoldást (2. 1) egyenletbe és az állandó tagokat mindkét oldalon egyenlővé téve lesz

$$2c = \lambda_2 \gamma$$

Így $\lambda_2 > 0$ miatt $\operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} \gamma$. Viszont $\gamma < 0$, ami úgy látható be, hogy p_1 nullahelye, $(x = 0)$ *szétválasztja* p_2 nullahelyeit és ez csak $\beta^2 < \beta^2 - 4\gamma$ esetén lehetséges.

4. A bebizonyított tételek követekezményeképpen, eljárási módot adunk meg annak megállapítására, hogy (1. 1) differenciálegyenletnek mikor van ortogonális polinomrendszer megoldása és melyek ennek jellemző adatai.

I. Szükséges, hogy a differenciálegyenlet

$$Qy'' + Ly' = \lambda y \tag{4.1}$$

alakú legyen, hol Q legfeljebb másodfokú és L pontosan elsőfokú polinóm.

II. (4. 1) alakú differenciálegyenlet akkor és csak akkor vihető át lineáris művelettel olyan (2. 1) egyenletbe, melyben $a \geqq 0$ és $c < 0$, ha a következő három típus egyikébe tartozik. Ezek:

a) Q másodfokú és két különböző valós gyöke van, olyan, melyet L nullahelye *szétválaszt*.

b) Q elsőfokú és *vagy* L nullahelye megelőzi Q nullahelyét, ha Q és L főegyütthajtójának előjele megegyezik; *vagy* Q nullahelye előzi meg L nullahelyét, ha Q és L főegyütthajtójának előjele különböző. Az első esetben — α-val jelölve Q nullahelyét — az ortogonalitási intervallum $(\alpha, -\infty)$; a második esetben pedig $(\alpha, +\infty)$.

c) Q állandó és előjele különbözik L főegyütthatójától. Ekkor az ortogonalitási intervallum $(+\infty, -\infty)$.

MEGJEGYZÉS. A tárgyalt tétellel kapcsolatban FREI TAMÁS és FREUD GÉZA felvetették. Lehetnek-e a klasszikus polinómok több súlyfüggvénnyel és több intervallumban ortogonálisok? *Véges intervallumban* (tehát a Jacobi polinómok) *nem*. Ez könnyen belátható, egyrészt abból, hogy a polinómrendszer nullahelyei az ortogonalitási intervallum belsejében mindenütt sűrűn helyezkednek el; másrészt abból, hogy az ortogonalitási intervallum és a polinómrendszer egyértelműen meghatározza a súlyfüggvény nyomatékait (konstans szorzó erejéig). Az előbbiből az ortogonalitási intervallum, utóbbiból a súlyfüggvény unicitása következik.

Célszerű lenne ezeket végtelen intervallum esetén is belátni.*

*A kérdésre adott válasz a kérdést feltevőkkel kialakult megbeszélés eredménye.

A KOPERNIKUSZI TAN ÉS HATÁSA A TUDOMÁNYOS GONDOLKODÁSRA*

NÁDOR GYÖRGY

1. Kopernikus tudománytörténeti helye

Az újkori tudománytörténetnek hatásában, világszemléleti vonatkozásaiban talán legjelentősebb eseménye a kopernikuszi heliocentrikus rendszer felállítása. KOPERNIKUS (1473—1543) tana forradalmi módon alakította át az európai ember világképét, új szemléleti módra és gondolatműveletekre kényszerítette rá a tudományt. EINSTEIN is éppen e *kettős* vonatkozásban jelölte meg KOPERNIKUS tudománytörténeti jelentőségét: „KOPERNIKUS — írta EINSTEIN — nemcsak lefektette a tökéletes csillagászathoz vezető utat, hanem elősegítette azt is, hogy az ember álláspontja gyökeresen megváltozzék a világegyetemmel kapcsolatban." [1]

Nem véletlenül hivatkozunk éppen EINSTEIN értékelésére. Újabban ugyanis egyes tudománytörténészek különböző érvelések alapján kisebbíteni igyekeznek KOPERNIKUS jelentőségét; egyesek a relativitás-elméletére hivatkoznak és azt állítják, hogy a relativitás-elmélet fényében a kopernikuszi rendszer elveszítette igényét az abszolút igazságra és a mai szemlélet szerint a ptolemeuszi rendszer egyenrangú a kopernikuszival. E mellé a felfogás mellé áll a Vatikán is, ami nagyon is érthető hiszen a ptolemeuszi rendszer „rehabilitálásától" várja a kopernikuszi világkép hirdetőivel szemben elkövetett multbéli brutalitásainak „igazolását." [2] — Éppen ezért fontos annak hangsúlyozása, hogy EINSTEIN, INFELD [3] és a relativitás-elmélet más neves képviselői határozottan elutasították az elmélet ilyen értelmezését és rámutattak arra, hogy az egyedül helyes világképet, amelynek alapján érvényes csillagászati törvényeket lehetett feltárni, a kopernikuszi tan adja.

* Részlet a szerzőnek *A természettörvény-fogalom kialakulása az ókortól Newtonig* című sajtó alatt levő könyvéből.

[1] EINSTEIN levele a Columbia egyetem lengyel nyelvészeihez (Közli: *Szabad Nép* 1953. dec. 16.)

[2] A Vatikán álláspontjára nézve l. Osservatore Romano 1954. júl. 19.—20.

[3] V. ö. INFELD cikkét a Nouvelle Critique 1955. áprilisi számában: Remarques sur la théorie de la relativité.

Mások KOPERNIKUS tudományos eredetiségét vonják kétségbe és hivatkoznak a heliocentrikus világkép *ókori* előzményeire, valamint arra, hogy NICOLAUS ORESMIUSNÁL (Oresme) a 14. században és CUSANUS-nál a kopernikuszi rendszerhez hasonló elgondolásokkal találkozunk. Ezek az előfutárok és gondolati előzmények azonban nemcsak, hogy nem csökkentik, hanem még jobban kiemelik KOPERNIKUS tudományos teljesítményének értékét, jelentőségét. Hiszen, mint WOLF a jeles tudománytörténész rámutatott, KOPERNIKUS nemcsak általánosságban vetette fel a heliocentrikus világkép eszméjét, hanem e koncepció alapján összefüggő, matematikai apparátussal alátámasztott csillagászati elméletet dolgozott ki.[4] A kopernikuszi rendszer lett az elméleti bázisa a csillagászat hatalmas lendületű további fejlődésének (KEPLER, GALILEI stb.) és még ellenfelei is számos vonatkozásban hatása alatt állottak.[5]

2. A kopernikuszi rendszer lényege

Az emberiség csillagászati világszemléletét évezredeken keresztül a PTOLEMAIOS ókori csillagász elmélete által megalapozott geocentrikus világkép határozta meg. PTOLEMAIOS (i. u. 2. sz) azon feltevés alapján magyarázta az égitestek mozgását, amely szerint a Föld a világmindenség mozdulatlan középpontja, körülötte keringenek a Nap és a bolygók. PTOLEMAIOS korában a heliocentrikus világkép részletes kidolgozásához még hiányoztak a tudományos előfeltételek: bár maga a heliocentrikus világkép gondolata az ókor több tudósánál megtalálható. PTOLEMAIOS, a *maga korának* nagy tudósa,' ha mesterkélt módon is, de megmagyarázta a csillagvilág mozgásait és az évszázadok csillagászati ismereteit egységes rendszerbe foglalta.

PTOLEMAIOS rendszerének alapgondolata — a Föld a mindenség középpontjában és a körülötte keringő égitestek — nemcsak a közönséges érzéki szemlélettel vágott egybe, de megfelelt az arisztoteleszi és a bibliai világképnek is. Ezért az egyházak PTOLEMAIOS világképét tűzön-vízen keresztül védelmezték. Amikor KOPERNIKUS *merész tudományos fantáziával* (INFELD)[6] leküzdötte az évezredes geocentrikus tévhitet és felállította a heliocentrikus rendszerét, szembekerült a tekintélyekkel, a bibliai elképzeléssel, az évezredes megszokással és ellene szólt mindezeken túl a közönséges érzéki látszat, a „józan ész“ is.

[4] V. ö. WOLF: A History of Science, Technology and Philosophy in the 16. and 17. Centuries (London 1950) 24.

[5] V. ö. a ZINNER által közölt anyagot. E. ZINNER: Entstehung und Ausbreitung der coppernicanischen Lehre. (Erlangen 1943). 236.

[6] INFELD: Kopernikus elmélete és a gravitáció kérdése a mai fizikában (Természet és társadalom 1954. jan.)

1543-ban jelent meg KOPERNIKUS korszakalkotó műve, a *De revolutionibus orbium coelestium*, amelyben a lengyel csillagász „odadobta a kesztyűt — noha félénken és úgyszólván csak halálos ágyán — az egyház tekintélyének a természet kérdéseiben".[7] De KOPERNIKUS alapgondolatai már csaknem negyven évvel előbb készen voltak egy kis műben, a *Commentariolus*-ban összefoglalva, amelyet kéziratban terjesztett barátai körében. A rendszer alapgondolatait itt a következő hét alaptételben foglalja össze:

„1. Az égitesteknek és az égi szféráknak nincs közös középpontjuk"

„2. *A Föld középpontja nem középpontja a világmindenségnek,* hanem csak a nehézkedésnek és a Hold mozgásának."

„3. *Minden körmozgás a Nap körül történik, mintha ez lenne a világmindenség központja, ezért is a világmindenség központja a Nap körül van.*"

„4. *A Nap s a Föld távolságának az aránya* a csillagos égbolt távolságához képest kisebb, mint a földgömb rádiuszának aránya a Nap távolságához, úgyhogy *a csillagos égbolthoz képest elhanyagolható.*"

„5. *Mindaz, amit az állócsillagok égboltján mint mozgást észlelünk, nem olyannak mutatkozik, mint amilyen ténylegesen, hanem olyan, mint amilyennek a földről látszik. A Föld tehát a rajta levő tárgyakkal együtt naponta megfordul változatlan pólusa körül.* Ezzel szemben az állócsillagok szférája, mint a legkülső égbolt mozdulatlan."

„6. Mindaz, amit a Nap mozgásában megfigyelhetünk, nem önmagától áll elő, hanem a *Föld mozgása* révén, mely mozgás *éppúgy a Nap körül történik, mint a többi bolygó mozgása.* Még más mozgásokat is végez ezeken kívül a Föld."

„7. Ami pedig a bolygók mozgásánál, mint direkt és rektrográd mozgás látszik, nem önmagától van így, hanem csak a Földről nézve. Csak a Föld mozgása révén magyarázható az égbolt sokféle jelensége."[8] (Saját kiemeléseim. N. Gy.)

KOPERNIKUS zseniális tette tehát abban állott, hogy

a) nem elégedett meg a csillagok *látszólagos* mozgásának leírásával, hanem a látszat által eltakart *tényleges* mozgásokat igyekezett felderíteni.

b) A bonyolult, mesterkélt és a fejlődést immár gátló geocentrikus világkép helyébe az egyszerűbb, a további fejlődést lehetővé tevő, *helyes* világképet dolgozta ki.

[7] ENGELS: A természet dialektikája (Szikra 1952) 35.

[8] *Commentariolusra* vonatkozó adatokat és a belőle való szövegrészt HERCZEG TIBOR: Kopernikus (Művelt Nép 1954) című könyve alapján közöljük.

c) Az a gondolata, hogy a nap- földtávolság a csillagos égbolthoz képest elhanyagolható — feltárta a világegyetem hatalmas távlatait és a *végtelen világ* koncepciója felé mutatott.[9]

Amikor KOPERNIKUS merészen szakított a geocentrizmus évezredes előítéletével *egy* tudományos előítéletnek ő is rabja maradt: szilárdan hitt abban az arisztoteleszi tanításban, hogy az ideális mozgás a körmozgás és hogy a bolygók egyenletes mozgással körpályákon keringenek. Sőt úgy vélte, hogy a heliocentrikus elmélet segítségével újabb bizonyítékot lehet szolgáltatni ezen arisztoteleszi felfogás számára.[10] Ezt a téves tételt csak KEPLERnek sikerült — KOPERNIKUS eredményeit továbbvive — kiküszöbölnie.

Hogyan jutott el KOPERNIKUS korszakalkotó tudományos felfedezéséhez?

3. A világ harmóniájának tana és a természettörvények

KOPERNIKUS nagy érdeklődéssel kutatta a heliocentrikus felfogás ókori előzményeit és közben több, a *pythagoreuszi iskolához* tartozó csillagász tanítására lett figyelmes.[11]

A pythagoreusok nevezetes felfogása volt a világ harmóniájának gondolata is. Ez a gondolat KOPERNIKUSt végigkiséri egész kutatói pályáján. Főművének első könyvében pl. így ír:

„Mindeneknek közepén helyezkedik el a Nap. Hol is lehetne e fényességnek az Universum gyönyörű templomában méltóbb helye, mint ahonnan mindent egyszerre megvilágíthat? Nem hiába nevezik a világ világosságának, mások a világ értelmének, ismét mások irányítójának. Hermes Trismegistos a látható Istennek, SOPHOKLES Elektrája a mindent átpillantónak. Így mintegy királyi székben uralkodik a Nap és irányítja az égitestek körülötte keringő családját... A Föld a Naptól fogamzik meg, lesz terhessé, és szül évről-évre. *Ebben a rendben tehát a világnak bámulatraméltó harmóniáját vesszük észre, a mozgásoknak és a pályák méreteinek harmónikus összefüggését, amilyent másutt hiába keresnénk.*“ [12] (Saját kiemelésem. N. Gy.)

Lehet-e mármost, hogy KOPERNIKUS egész rendszere, az a törekvése, hogy rendet, szabályszerűséget, törvényeket keressen a csillagvilágban, végeredményben egy pythagoreus színezetű vallásos meggyőződésben gyökerezett

[9] V. ö. WOHLWILL: Galilei und sein Kampf für die Coppernicanische Lehre (Hamburg—Leipzig 1904) I. 6.

[10] V. ö. INFELD: Kopernikus (id. cikk).

[11] V. ö. COPERNICUS: De Revolutionibus Orbium Coelestium. — Norimbergae 1543. — III. r. — IV. r.

[12] COPERNICUS: De Revolutionibus (Német kiadása: Über die Kreisbewegungen der Weltkörper. — Leipzig 1939. — 28.)

és nem más mint annak lecsapódása, tudományos köntösbe való öltöztetése?[13] E kérdés mélyen érinti a tudományos kategóriák genezisének problémáját is.

Ha túlságosan szószerint akarnók értelmezni KOPERNIKUS mondatait, nem lenne nehéz akár azt is rábizonyítani, hogy a csillagászat nagy forradalmára napimádó volt, vagy legalábbis közel állott a napisten kultuszához. Hiszen KOPERNIKUS így ír a Napról: „Látható, lenyügöző fenségessége miatt a legtöbb filozófus Istennek nevezte".[14]

Mindenki előtt nyilvánvaló azonban, hogy ha KOPERNIKUS a napról mint istenről, az égi család királyáról,[15] a föld megtermékenyítőjéről[16] beszél, akkor ez csak arról tanúskodik, hogy a nap középponti helyzete rendkívül élénken foglalkoztatta gondolkodását és erre vonatkozó tudományos álláspontjához megkereste az antik és a mitológiai „párhuzamokat". Olaszországi diákoskodásának ideje alatt persze hallhatott FICINO firenzei platonista filozófus felfogásáról, aki a Napot királyhoz és a mindenség szívéhez hasonlította és az isteni mértéknek, az égbolt mozgási irányítójának nevezte.[17] Az ilyen elképzelésekből azonban az olasz platonistáknál misztika született és nem csillagászat. A heliocentrikus világkép tudományos megalapozásában a fantázia és a messzire vezető analógiák is szerepet játszhattak, de a döntő mozzanat mégis az volt, hogy KOPERNIKUS egzakt kutatásokkal tárta fel és bizonyította be a Nap központi szerepét a mindenségben. Hasonló a helyzet a világ harmóniájára vonatkozó „pythagoreus" gondolattal is, amely KOPERNIKUSnál teljesen racionális értelmet nyer. Hiszen KOPERNIKUS távol állott mindenfajta számmisztikától, mindenfajfa pythagoreusi számspekulációktól; *a világ harmóniájának fogalmát a bolygók szabályos egymásrakövetkezésének törvényével szinonim értelemben használja.*[18] Bizonyítja a világ rendjére vonatkozó kopernikuszi eszmének teljesen racionális jellegét tanítványának RHETICUSnak beszámolója is, amely feltárja KOPERNIKUS kutatási módszerét:

„Mesterem gondosan összehasonlította a régebbi idők megfigyeléseit saját megfigyelésével és meghatározott rendben raktározta el őket úgy, hogy azok mindig készen állanak az alkalmazásra. És ha valamit biztosan meg kell állapitani, a tudományba vagy egy elfogadott elméletbe valami újat kell bevezetni, akkor átnézi a megfigyeléseket, az elsőkkel kezdve és végezve a saját megfigyeléseivel, gondosan megfontolva, hogy milyen törvény alapján hozhatók összhangba egymással... És ha — mindent a legalaposabban mérle-

[13] Így vélekedik pl. AUGUST FAUST (Kantstudien 1943. 1—2.)

[14] COPERNICUS op. cit.

[15] „Ita profecto tamquam in solio regali sol residens circumagentem gubernat astrorum familiam".

[16] „Concipit interea a sole terra et impregnatur annuo partu".

[17] V. ö. HERCZEG i. m. 28.

[18] V. ö. COPERNICUS: De Revolutionibus. — Német kiadás 23.

gelve — úgy találja, hogy a pontosság *(az asztronómiai ἀνάγκη)* megköveteli a régi hipotézisek elvetését, akkor isteni sugallat segítségével kidolgozza az új hipotézist és a matematika segítségével, szigorú geometriai bizonyításokkal levezeti ezen hipotézis konzekvenciáit. Végül pedig megvizsgálja, menynyire egyeznek meg a régi megfigyelések és az ő észlelései ezzel a hipotézissel. *Csak ekkor, miután e nagy munkát végbe vitte, fogalmazott meg végül asztronómiai törvényeket* (leges astronomiae)[19] RHETIKUS beszámolójából nemcsak KOPERNIKUS rendkívül tudományos lelkiismeretességére, körültekintő kritikai módszerére derül fény, nemcsak arra, hogy megfigyelésektől haladt hipotézisek felállításán keresztül az asztronómiai törvények megfogalmazása felé, hanem egyben arra is — ami ebből természetszerűen következik —, hogy *a világ törvényszerűségének elvét* KOPERNIKUS *egzakt módszerekkel igazolja.* A világ harmóniájának kopernikuszi gondolata tehát nagymértékben különbözik a pythagoreusi felfogástól és KEPLER erre vonatkozó gondolatával rokon.

A világ harmóniájának és *rendjének* KOPERNIKUS-képviselte felfogása forradalmian új volt az uralkodó arisztoteleszi-tomista világnézettel szemben, gyökeresen mást jelentett, mint az a „rend" amelyről a skolasztika beszélt. A skolasztikus felfogás szerint a földi és az égi jelenségek és történések *radikálisan* különböznek egymástól: A földi és az égi testek más anyagból valók, következésképp más törvényeknek engedelmeskednek, *más rendnek vannak alávetve:* a földi testek rendje alacsonyabbrendű, mivel a földi testek romlandó anyagból állanak.[20] A középkor dualizmusával, hierarchikus rendképzetével szemben KOPERNIKUS egy olyan *természeti rendfogalmat* alapoz meg, amely nem ismer el elvi különbséget égi és földi jelenségek között. A kopernikuszi elméletből folyó ezen világnézeti konzekvenciákat GIORDANO BRUNO fogalmazta meg *monista* filozófiájában. De nemcsak BRUNO, hanem a 17. század valamennyi nagy természettudósa, akik *általános érvényű* természeti törvényeket kutattak, gyakorlatilag egy ilyen monista világnézet talajára helyezkedtek: a skolasztika dualizmusának alapján nem volt lehetséges egyetemes érvényű törvényeket megfogalmazni.

[19] RHETICUS: Narratio prima c. műve alapján közli LEOP. PROWE: Nicolaus Copernicus. — Berlin. 1884. — II. 344. — Magyarul HERCZEG i. m. 29. (A magyar szöveg fordítását néhány helyen korrigáltam.)

[20] V. ö. AQUINOI TAMÁS: Summa theol. III. 57.—art 4: „Quanto aliqua corpora perfectius participant bonitatem divinam, tanto sunt superiora *corporali ordine,* quia est ordo localis".

4. A kopernikuszi rendszer hatása a világszemléletre

GOETHE nagyszerűen érzékelteti a kopernikuszi tanok világnézeti következményeit és hatásukat: „Az összes felfedezések és meggyőződések közül (az újkorban) semmi sem tett nagyobb hatást az emberi szellemre, mint Kopernikus tana. Mihelyt elismerték, hogy a Föld gömbölyű és önmagába zárt, le kellett mondania arról a hatalmas előnyről, hogy a világegyetem középpontjának tartsák. Talán még soha nem támasztottak nagyobb követelményeket az emberiséggel szemben; hiszen mi minden nem ment füstbe ennek elismerésével: egy második paradicsom, az ártatlanság, költészet és jámborság birodalma, az érzékek tanúságtétele, egy költői-vallásos hit meggyőződése; nem csoda, hogy mindezt nem akarták tovatűnni hagyni, hogy minden módon szembeszálltak egy ilyen tannal, amely hiveit egy addig ismeretlen, sőt nem is sejtett gondolatszabadságra és érzelmi nagyságra tette képessé, sőt szólitotta fel." [21]

A kopernikuszi tanok persze csak lassan hódítottak teret: át kellett törniök a megszokotthoz való makacs ragaszkodás és a vallás egyházi ellenállás ércfalát.[22] A kezdeti erőviszonyokat mutatja, hogy 1543—1595-ig KOPERNIKUS nagy műve Németországban összesen hét kiadást ért meg, míg ugyanakkor 100 kiadásra megy fel a ptolemeuszi álláspontot képviselő csillagászati művek száma.[23] KOPERNIKUS ellenfelei igen „erélyesek": nem maradnak meg egy higgadt tudományos vitatkozás keretei között. Egy olasz matematikus, MAUROLICO, 1575-ben megjelenő csillagászati munkája bevezetésében így ír: „Pusztuljon KOPERNIKUS, aki szerint a Nap nyugalomban van és a Föld úgy forog, mint egy pörgettyű és aki inkább ostort, mint figyelmeztetést érdemel." [24] A párizsi egyetem teológiai kara 1578-ban így nyílatkozott: „Ezen új, ordas eszmék hirdetőihez számítja a fakultás az új csillagászokat is; közvetlenül a LUTHER, CALVIN és BEDA-féle csalások után azok ellen fordítja vallási buzgalmát, akik az ég forgáspontjaival foglalkoznak, és félreismerik önönmagukat, akik eget és földet felcserélve azzal szórakoznak, hogy az egész földet mozgásban levőnek tüntetik fel. Az eretnekek tanával együtt kell kiirtani ezt az új tanítást." [25]

[21] GOETHE: Zur Farbenlehre (Historischer Teil). — GOETHE: Sämmtliche Werke. — G. Müller Verlag. München. — 22. Bd. — 126.

[22] A kopernikuszi tan elterjedésére vonatkozóan ZINNER i. művén kívül Franciaországra vonatkozóan v. ö. PLATTARD: Le Système de Copernic dans la littérature francaise au XVI. siècle (Revue du Seizième Siècle. Tom I. (1913); Angliára vonatkozóan MEISSNER: England im Zeitalter von Humanismus, Renaissance und Reformation (Heidelberg 1952).

[23] Az adatokat közli ZINNER i. m. 278.

[24] ZINNER i. m. 279.

[25] ZINNER i. m. 282.

A *protestantizmus* vezető ideológusai (LUTHER, MELANCHTON) súlyosan elitélték a kopernikuszi tanokat; a *katolikus egyház* álláspontját BRUNO és GALILEI sorsa jellemzi. KOPERNIKUS főműve 1835-ben került csak le végleg a pápai indexről. De KOPERNIKUS eszméi az ellenállás és az üldözések ellenére terjedtek és a világszemléletben, a gondolkodás módjában gyökeres átalakulást eredményeztek.

Milyen kérdésekre terjedt ki e világszemléleti forradalom?

a) A Föld centrális helyzetének tanával együtt megdőlt vagy legalábbis halálra ítéltetett az anthropocentrikus szemlélet, amely mindent az emberre vonatkoztatott és az ember kicsinyes céljaihoz mérte a természet jelenségeit.

JOHANNES BAPTISTA BENEDETTI olasz természettudós (16. század végén) GALILEI egyik előfutára egy levelében arra a kérdésre válaszolva: *milyen célból teremtődtek az égitestek,* így ír egyik előkelő pártfogójának: „Bizonyára nem gondolod, hogy az égitestek csak azért jöttek létre, hogy egy olyan alárendelt testnek, mint a vízáztatta Föld, állatait és növényeit befolyásolják; hiszen az égitestek isteniek, megszámlálhatatlanok, rendkívüli nagysággal és igen nagy sebességgel vannak felruházva. *Még kevésbé fogják ezt gondolni azok, akik a samosi* ARISTARCHOS *és* NICOLAUS COPPERNICUS *véleményét követik,* kiknek felfogása szerint lehetetlen azt gondolni, hogy az egész világnak nincsen más célja, mint — hogy az ő szavukat használjam — a Hold epiciklusnak ezt a középpontját irányítsák.“ [26] (Saját kiemelésem. N. Gy.)

A kopernikuszi világkép hívei — BRUNO, GALILEI, HOBBES, SPINOZA stb. — a régi világképpel együtt a teleológiát is elutasítják, nevetségessé teszik. A vallás hívei ezzel szemben egy egészen primitív teleológiát védelmeznek. A párizsi egyetem előbb említett nyilatkozata KOPERNIKUS tanával, és az új csillagászattal együtt a naptárreformot is elutasítja, mint az ortodox hitre nézve veszélyes intézkedést: mert azáltal, hogy a szent húsvét idejét a csillagok járása szerint meg akarják változtatni, megsértik az isteni fenséget, amely egyedül képes azt megismerni és megváltoztatni, sőt, felfordítják mindenestől a dolgok rendjét, hiszen *isten a napot és a holdat az egyház hasznára teremtette, nempedig az egyházat az égitestek szolgálatára.*“ [27] (Az én kiemelésem. N. Gy.) A kopernikuszi világkép által létrehozott világnézeti forradalom egyik döntő eleme, hogy kihúzta a talajt az alól a felfogás alól, amely az embernek kitüntetett szerepet tulajdonított a mindenségben. Ezzel *döntő csapást mért a középkori tudományokban elterpeszkedő teleologikus szemléletmódra és lökést adott a valóság tárgyilagos, oksági szempontú kutatásnak.*

[26] Idézi: WOHLWILL i. m. I. 20.
[27] Közli: ZINNER i. m. 282.

b) Gyógyithatatlan csapás érte a középkor bibliai alapon nyugvó szakrális természetszemléletét, amely az eget különleges vallási funkciókkal ruházta fel. Ha CH. CLAVIUS jezsuita csillagász még a 17. század elején is mint abszurdumot utasítja el a kopernikuszi elméletet és tizenkét égről, közte az empireumról és a boldogok egéről[28] beszél, ez csak az egyházi befolyás alatt álló elfogult „tudomány" szava. A kor valóban kiemelkedő csillagászai — kevés kivétellel — elfogadják a kopernikuszi elméletet, és ezzel a vallásos-hierarchikus természetszemlélet alól kicsúszik a tudományos alap.

c) A kopernikuszi világkép elreteszeli az asztrológia fejlődésének útját. Ez annál jelentősebb, mert a reneszánsz korában az asztrológia ismét divatos.[29] KOPERNIKUS teljesen mentes marad a kor e káros divatjának hatásától.[30] De túl e személyes állásfoglaláson: a heliocentrikus rendszer az asztrológiai spekulációk elvi alapját semmisítette meg. Hiszen az asztrológia egy olyan világképet feltételezett, amelynek a Föld, az ember áll a középpontjában és az egész csillagvilág az emberre vonatkozik. A heliocentrikus világkép fokozatos térhódítása a közgondolkodásban, tömegmértékben renditette meg az asztrológiai tévképzetekben való hitet. Ennek eredményeképpen a 18. századtól fogva az asztrológiai hiedelmek már csak egyes valóban babonás emberek tudatában élnek tovább.[31]

5. A gondolkodásmód forradalma: támadás a „józan ész" ellen

KOPERNIKUS működése nemcsak a világszemlélet tartalmi vonatkozásaiban hatott forradalmasítóan, hanem a *gondolkodásmód* tekintetében is, különösen a közvetlen szemlélet, a „józan ész" megismerő értékének megítélésében.

A közvetlen szemléletre és mindennapos tapasztalatra támaszkodó „józan ész"-t a reneszánsz korában bizony nem egy nagy meglepetés érte. Gondoljunk csak a salamancai egyetem professzorának a józan észre apelláló meggondolására; az egyetem tanácsa megvalósíthatatlannak tartotta KOLUMBUS tervét, mert nem tudta elképzelni, hogy a görbült felületű földről le ne essen s attól félt, hogy esetleg nem tud visszajönni. Így érveltek: „senki sem járkálhat fölfelé tartott lábakkal, s lelógó fejjel, s a fák nem növekedhetnek lefelé, de nem eshet és nem is havazhat felfelé, végre pedig: teljes lehetet-

[28] CLAVIUS csillagászati munkája először 1570-ben jelent meg Rómában és 1618-ig a könyv legalább 19 kiadást ért meg (V. ö. ZINNER i. m. 277).

[29] V. ö. JACOB BURKHARDT: Die Kultur der Renaissance in Italien. VI. Abschnitt.

[30] V. ö. P. LABÉRENNE cikkét (Pensée 1953 IX—X.)

[31] V. ö. BOLL: Kleine Schriften zur Sternkunde des Altertums (Leipzig 1950) 276

lenség, hogy „oly népek is legyenek, melyek Noé leszármazási táblájában elő nem fordulnak“.[32]

A közönséges emberi észre támaszkodó ezen aggályok feleslegeseknek, megalapozatlanoknak bizonyultak. De azért korántsem szűnt meg a „józan ész“, a közvetlen szemlélet megismerő értékébe vetett bizalom. Maga KOPERNIKUS is jól tudta ezt, amikor rendszerét az olvasók elé terjesztette. Nagy műve III. Pál pápához intézett híres előszavában írja:

„Szentséged... bizonyára azt akarja hallani, hogyan jutott eszembe a matematikusok elfogadott nézete ellenében, sőt *úgyszólván a közönséges emberi ész ellenében (contra communem sensum)* a Föld mozgását feltételezni.“ [33]

A közvetlen szemlélet álláspontja, a közönséges emberi ész álláspontja csakugyan az antikopernikánusok ismeretelméleti pozíciójává vált. MELANCHTON arra hivatkozik, hogy *szemmel látható* az ég körmozgása és ennek alapján a kopernikuszi tant *abszurd állításnak* bélyegzi.[34] GALILEI ellenfeleinek egyik kedvelt érve a kopernikuszi felfogással szemben: a közvetlen érzéki szemlélet tanúsága. Nemcsak az ellenség érvelt így. PAOLO GUALDO, egy GALILEIvel szemben jóindulatú római barát levelében óvja GALILEIt attól, hogy a kopernikuszi tanokat propagálja és többek között ezeket írja:

„Úgy tűnik nekem, hogy Ön elegendő hírnevet szerzett a Hold és a négy bolygó megfigyelésével és más hasonlókkal, úgyhogy *nincs szüksége, hogy egy olyan ügy védelmét vállalja, amely olyannyira ellentétben van az emberek belátásával és felfogóképességével;* hiszen csak nagyon kevesen vannak, akik az égi jelek és aspektusok megfigyeléséből valamit is megértenek“.[35]

Ugyanez a levél arra is figyelmezteti GALILEIt, hogy vele *„szemben egy olyan vélemény áll, amelyet úgyszólván a világ teremtése óta vall az egész emberiség.“* [36]

KOPERNIKUS és hívei tehát *hadat üzentek* a közvetlen érzéki szemléletnek, a „józan“ emberi észnek, a kor közmeggyőződésének.[37] E gondolkodásbeli forradalom ismeretelméleti alapja a *látszat* és a *valóság* elvi megkülönböztetése volt. A közönséges ész, amely a közvetlen szemléletre épít, csak a látszatig hatol. A valóság mélyebben fekszik és olykor éppen ellentétes a lát-

[32] Közli: ZEMPLÉN JOLÁN: A háromezeréves fizika (Franklin 1950) 51.

[33] COPERNICUS: De Revolutionibus. — Előszó.

[34] V. ö. ZINNER: i. m. 272.

[35] Gualdo levele Galileihez 1611. május 6-án (Közli WOHLWILL i. m. 389.)

[36] Uo.

[37] PIERRE DE MESME az első szerző Franciaországban, aki említést tesz KOPERNIKUSról 1567-ben megjelent *Les institutions astronomiques* című munkájában. Ebben a kopernikuszi tant abszurd (paradox) jellegét hangsúlyozza és hozzáfűzi: „Megelégszem tehát a természetes észre és a közvéleményre való hivatkozással, hogy bebizonyítsam: a Föld nyugalomban van a levegőég közepén. (Közli PLATTARD i. cikkében 232.)

szattal, a *valóságos* mozgások ellentétesek a *látszólagos* mozgásokkal. A kopernikuszi rendszer ezen ismeretelméleti alapját MAESTLIN (1550—1631), KEPLER mestere, a kopernikuszi tanok híve elég világosan meg is fogalmazza. Elmondja, hogy kezdetben nem szívesen tért el az uralkodó felfogástól, de — fűzi hozzá — „nem maradt más lehetőség, mivel a hagyományos felfogás eltér az igazságtól; hiszen még a Nap és az állócsillagok mozgására nézve sem nyújt biztos felvilágosítást, míg ama másik teljesen megfelel ezen kívánalmaknak és bolygónk *látszólagos* eltéréseit csodálatos módon vezeti vissza *valóságos* mozgásának tökéletes azonosságára. Így inkább választottam, hogy egyesek kárhoztassanak, mintsem, hogy elmulasszam azt, hogy hitet tegyek az igazság mellett." [38]

KOPERNIKUS támadását az érzéki látszat ellen, a „józan" ész ellen a 17. század folyamán több más támadás követte. Csak ezen az alapon volt lehetséges pl. a *kvantitatív szempont* és vizsgálati módszer diadalra juttatása a 17. század tudományában az arisztotelikus fizikával szemben, amely az érzékek tanúságára hivatkozott. A modern természettudomány a közvetlen érzéki szemlélettel való szembefordulás eredményeként született meg. Ezért mondotta GALILEI:

„Nem tudom eléggé csodálni azoknak a szellemi emelkedettségét, akik eleven szellemükkel *erőszakot követtek el saját érzékeiken* oly módon, hogy egészséges értelmüket követve a *látszattal a legnyilvánvalóbban ellentétes dolgokat mertek elképzelni.*" [39]

A régi felfogás hívei, mint MELANCHTON *abszurdnak* bélyegezték az érzéki szemlélettel való szembefordulást. Az új tudományos irány hívei, mint GALILEI rámutattak arra, hogy éppen a közvetlen érzéki látszatnál való megrekedés vezet abszurd, tarthatatlan konzekvenciákhoz.[40]

Így született meg nemcsak egy új, széles, csaknem a végtelenbe tekintő világkép, hanem egy új tudományos attitüd és kritikai gondolkodásmód, amely a felszín, a látszat helyett a valóságot, a lényeget kutatja, amely nem bízik vakon a közvetlen szemléletben, a közönséges észben, hanem keresi a valóság vizsgálatának, a természeti törvények feltárásának helyes *módszereit.*

6. Hipotézis vagy elmélet

KOPERNIKUS nagy műve korrekturáit halálos ágyán olvasta. OSIANDER protestáns teológus — akire a mű kiadását bízta — a Mester tudta nélkül

[38] Közli WOHLWILL i. m. 19.

[39] GALILEI: Dialogo dei massimi sistemi del mondo (GALILEI: Opere. — Milano—Roma 1936. — I. kötet 435.)

[40] V. ö. GALILEI: i. m. 79. lap.

változtatásokat eszközölt az eredeti szövegen és egy új előszót írt hozzá, amely a kopernikuszi világképet egyszerű *matematikai hipotézisnek* tüntette fel:

„Senki ne várjon a hipotézisek tekintetében valami biztosat az asztronómiától, hiszen az ilyent nem nyújthat; nehogy valaki azt amit másféle elképzelések alapján kitaláltak, igaznak vélve, tudatlanabbul távozzon ettől a tudománytól, mint ahogyan hozzáfordult.“ [41]

Hangsúlyozta: a kopernikuszi hipotézis nem lép fel objektív igazság igényével:

„Ugyanis nem szükséges, hogy e hipotézisek igazak, sőt az sem, hogy az igazsághoz hasonlók legyenek, hanem elégséges az, hogy a megfigyelésekkel egybevágó kalkulust alkalmazzanak“. (Neque enim necesse est eas hypotheses esse veras, imo ne verisimiles quidem, sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant.)

Az olvasókat azonban nem lehetett megtéveszteni; csakhamar rájöttek, hogy az előszó nem származhat KOPERNIKUStól. „Szájról-szájra adták erre vonatkozó nézetüket, értesüléseiket. Egyes olvasók egyszerűen áthúzták az előszót, mások föléírták: „Andreas Osiander“, ismét mások azt írták be példányukba, hogy RHETICUS követelte OSIANDERtől, ismerje el nyilvánosan az előszó szerzőségét“.[42]

OSIANDER eljárása nem hiába váltott ki közfelháborodást; törekvése az volt, hogy irodalmi hamisítás útján a kopernikuszi tanok objektív igazságra való igényét támadja meg. A tannak matematikai hipotézissé való szűkítése nem kevesebbet jelentett ennél.

Hipotézisnek minősítve az elméletet, OSIANDER *belülről* igyekezett a kopernikuszi világképet aláásni.

A kritikai szemlélet nem jelent szkepticizmust, agnoszticizmust. Az újkori tudomány nagyszerű eredményei nem születhettek volna meg, a hagyományos, dogmatikus tudásanyaggal nem lehetett volna leszámolni, ha az újkor nagy tudósait nem tölti el a tudományos tételek, elméletek, törvények *objektív igazságértékébe vetett bizalom.* Az újkor tudománya felismerte, hogy az igazságok, elméletek, törvények nem készen születnek, hanem *hipotéziseken keresztül vezet* az út elméletek felállítása felé.[43] De azt is felismerték, hogy a kutatásnak nem kell megrekednie a hipotézisek színvonalán, hanem el lehet jutni — megfelelő módszerrel — az *abszolút bizonyosság* színvonalára: elméletek, törvények megfogalmazásához.

[41] Közli HERCZEG i. m. 71.

[42] ZINNER i. m. 271.

[43] A hipotézisek szerepéről a modern természettudományok megalapitóinál l. PRANTL: Galilei und Kepler als Logiker (Sitzungsberichte der bayer. Akad. der Wissenschaften 1875) valamint FOGARASI: Logiká-jában (3. kiadás) a hipotézisről szóló fejezetet.

OSIANDER éppen a kopernikuszi rendszer igazságigényét igyekezett aláásni, amikor azt egyszerű matematikai hipotézisnek minősítette. Az újkori tudomány megalapozói — KEPLER, GALILEI, DESCARTES — gyökeresen másként, a meg nem hamisított KOPERNIKUShoz hasonlóan, fogják megoldani a *fizikai elmélet* és *matematikai apparátus* viszonyát. A matematikai apparátus számukra nem pusztán külső eszköz, vagy olyan hipotézis, amely nem érinti a dolgok lényegét; nem *egy* lehetséges magyarázatot ad a sok közül, hanem a dolgok *lényegét* tárja fel az *egyetlen* lehetséges adekvát módon. Ezt a gondolatot fejezi ki GALILEInek ismert mondása, hogy a *természet könyve* a *matematika nyelvén íródott.* A matematikai apparátus tehát *nem-hipotetikus* igényű, hanem az objektív igazságra, a lényeg megismerésére igényt tartó ismeretet nyújt.

Éppen ezért nem a győzelmes modern tudomány igazi szellemét fejezi ki MERSENNE páter álláspontja, aki a 17. század első felében nagy lelkesedéssel és buzgalommal munkálkodik ugyan a tudományos ismeretek terjesztésén és a tudósok közötti kapcsolat megteremtésén, de ismeretelméletileg egy fenomenalisztikusagnosztikus álláspontot vall, amely szerint: „Sohasem fogunk eljutni arra a pontra, hogy értelmünk hasonló legyen a dolgok természetéhez..."[44] Ezért írja MERSENNE 1644-ben, hogy a csillagok mozgására nézve a matematikai számítások a fontosak, annak a kérdésnek eldöntése viszont, hogy a világ PTOLEMAIOS, TYCHO, PYTHAGORAS, PHILOLAOS vagy ARISTARCHOS szerint mozog — már nem a mi dolgunk.[45]

Az új tudomány megalapozói és a kor nagy filozófusai ezzel szemben a tudományos elméletek *objektív* igazságértékét vallották és hirdették.

[44] MERSENNE: La Vérité des Sciences. Közli ROBERT LENOBLE: Quelques aspects d'une revolution scientific. — Revue d'Historie des Sciences. 1948. július—dec.)

[45] MERSENNE: Universae Geometriae Synopsis alapján. (Közli: LENOBLE id. cikk. 72.)

KÖNYVISMERTETÉSEK

I. G. Petrovszkij „Előadások a parciális differenciálegyenletekről" című könyvének ismertetése

I. G. PETROVSZKIJnak „Előadások a parciális differenciálegyenletekről" című műve az első könyv, amely erről az alkalmazások szempontjából fontos tárgykörről magyar nyelven megjelent. A könyv értékes és világos bevezetést nyújt a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Ezenfelül megismertet ennek az elméletnek modernebb részeivel is, részben azon a tankönyvekben nem nagyon szokásos, de igen célszerű módon, hogy az egyes fejezetek végén áttekintést nyújt — nem bizonyított tételek formájában — újabb eredményekről, ill. problémákról. A könyv értékes voltát mutatja, hogy 1950-ben történt megjelenése óta több nyelvre, köztük angolra is lefordították.

A mű egy bevezető fejezettől eltekintve három részre tagozódik és ezekben rendre a hiperbolikus, elliptikus és parabolikus típusú másodrendű parciális differenciálegyenleteket tárgyalja.

A bevezető fejezet az egész könyvnek talán legnehezebb része; ennek nagyobb felében a szerző a Cauchy-féle feladattal foglalkozik. A tárgyalást Sz. KOVALEVSZKAjának ezzel kapcsolatos tételével kezdi, melyet lineáris parciális differenciálegyenletekre bizonyít. Később általánosítja a Cauchy-féle feladatot arra az esetre, amikor egy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ független változókat tartalmazó differenciálegyenletrendszer kezdeti feltételeit egy $S(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ egyenlettel jellemzett elég sima n-dimenziós felületen írjuk elő. A szerző ennek az általánosított feladatnak a megoldását is a lineáris differenciálegyenletrendszereken mutatja be. Utána ismerteti a karakterisztikák, karakterisztikus irányok, ill. karakterisztikus egyenlet fogalmát. A továbbiakban röviden kitér a Cauchy-féle feladat megoldásának unicitására a nem-analitikus függvények körében. Végül az egy ismeretlen függvényt tartalmazó másodrendű differenciálegyenletek kanonikus redukcióját és ez egyenletek osztályozását ismerteti, továbbá a két független változós elsőrendű rendszereknél bevezeti az ellipticitás és hiperbolicitás fogalmát.

A hiperbolikus differenciálegyenletekről szóló fejezet — amely terjedelmesebb, mint az elliptikus és parabolikus típusúakat ismertető fejezetek együttesen — két részre oszlik. Az első rész a Cauchy-féle feladatot tárgyalja a nem-analitikus függvények körében. Ezzel kapcsolatban nagy gondot fordít a szerző annak megvilágítására, hogy a Cauchy-féle feladat kitűzése mikor korrekt. Ezen — nagyjából — a következőket kell érteni. Legyen adott egy $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóktól függő differenciálegyenletrendszer és legyenek a kezdeti feltételek megadva a $t=t_0$ sík és valamely G $(n+1)$-dimenziós összefüggő zárt tartomány G_0 metszetén. Ha a kezdeti feltételek egyrészt biztosítják a megoldásrendszer egyértelműségét, másrészt pedig a kezdeti feltételek csekély megváltoztatása következtében a megoldásrendszer az egész G tartományban szükségképpen csak keveset változhatik, akkor a feladat kitűzése korrekt. Ezzel kapcsolatban említi HADAMARD azon példáját, amely mutatja, hogy a síkbeli Laplace-egyenletnél a Cauchy-féle feladat kitűzése nem korrekt. Ehhez azt az érdekes megjegyzést fűzi, hogy nem véletlen az, hogy semmilyen fizikai feladat nem vezet a Laplace-egyenlet Cauchy-féle feladatára. Ugyanebben a részben tárgyalja a szerző a hullámegyenletek Cauchy-féle feladatának megoldásait (Kirchhoff-, Poisson-formula stb.). Utána a Lorentz-transzformációval kapcsolatosan kitér a speciális relativitás elvének néhány matematikai vonatkozására.

A hiperbolikus differenciálegyenletekről szóló fejezet II. része a „Véges kiterjedésű testek rezgései" címet viseli. Ez a rész a peremértékproblémák ismertetésével, továbbá az ezzel kapcsolatos unicitási és folytonossági kérdésekkel kezdődik. Ezután a húrrezgés egyenletével kapcsolatban bemutatja Fourier módszerét, majd a sajátértékek és sajátfüggvények tulajdonságainak elég részletes tárgyalása után a Fourier-módszer szigorú megalapozását adja. A szerző itt is (mint a könyv számos egyéb helyén) szivesen hivatkozik közvetlen munkatársai eredményeire. Tárgyalja továbbá a sajátértékproblémáknak az integrálegyenletekkel való kapcsolatát a Green-függvényen keresztül. A sorbafejtési tételnek két bizonyítása is megtalálható a könyvben, mégpedig a variációs úton és az integrálegyenletek elmélete segítségével történő bizonyítás.

Az „Elliptikus differenciálegyenletek" című fejezet az n-dimenziós Laplace-egyenlet tárgyalására szorítkozik, ill. a záróparagrafusban áttekintést ad általánosabb típusú eredményekkel kapcsolatosan. Tárgyalja a maximum-minimum tulajdonságot, DIRICHLET és NEUMANN feladatát. A Dirichlet-feladat megoldásának egzisztenciáját Poincaré módszerével (szuper- és szubharmonikus függvények) és a rácsmódszerrel (differenciálegyenletek sorozata megoldásainak konvergenciája) igazolja. Bár kétségtelenül előny az, hogy a gyakorlati alkalmazások szempontjából rendkívül fontos rácsmódszer konvergenciájának bizonyítása megtalálható ebben a tankönyvben, meg kell említeni, hogy itt az unicitás bizonyítása (260—261. o.) nem világos. Végül szó van még ebben a fejezetben a potenciálelmélettel kapcsolatos néhány tételről.

A parabolikus differenciálegyenletekről szóló rövid fejezet és a hozzá tartozó függelék csak a lineáris hővezetési egyenlettel foglalkozik. Tartalma: a maximum-minimum tétel, az első peremértékfeladat megoldása Fourier módszerével, a Cauchy-féle feladat, a Poisson-integrál és a függelékben a peremértékfeladat megoldása a rácsmódszerrel.

Ehhez a tartalmi ismertetéshez hozzá kell tenni, hogy a könyv fogalmazása jó és a tételek kimondása világos. A szerző többször él azzal a kezdő olvasó számára nagy könnyebbséget jelentő előadásmóddal, hogy egyes fogalmakat, vagy tételek feltételeinek kimondását a tárgyalás során fokozatosan tesz precizzé: állításait először leegyszerűsített formában, de a lényeget kidomborító módon fogalmazza meg és a későbbi tárgyalásban használja csak a minden igényt kielégítő szabatos előadásmódot.

Makai Endre
a matematikai tudományok doktora

A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének* Közleményei, I.

Akadémiai Kiadó, Budapest 1952.

E folyóirat a kiadó Intézet céljainak megfelelően elsősorban alkalmazott matematikai tárgykörű dolgozatokat közöl, melyeknek tárgya az Intézet által teljesített megbízások, az Intézet belső témáinak kidolgozása és más, a matematika alkalmazásainak elméleti és gyakorlati kérdései során felmerült vizsgálatok. A dolgozatok általában magyar nyelvűek, orosz és még egy idegen nyelvű (többségükben francia) kivonattal. A kötet, amely Rényi Alfréd előszavával kezdődik, 27 dolgozatot tartalmaz.

Statikai-szilárdságtani-plaszticitási kérdésekkel foglalkozik Lovass Nagy Viktor két, és Pál Sándor egy dolgozata. Lovass Nagy Viktor, Fenyő István és Egerváry Jenő—Lovass Nagy Viktor dolgozatai megoldási módszereket adnak a matematikai fizika különböző parciális differenciálegyenleteire, míg Fenyő István integrálegyenletekkel foglalkozik. A matematikai statisztika és a valószínűségszámítás területén Rényi Alfréd—Szentmártony Tibor az egyidejűségi tényezővel, Rényi Alfréd kompresszorok méretezésével, Székely Gábor két dolgozatban szövőgépek optimális fordulatszámaival, ill. a kőtörés energiaszükségletével és Vincze István a regressziós egyenes meghatározásával foglalkozik. Új eredményeket is tartalmazó, de amellett összefoglaló jellegű cikkeket találunk Juvancz Ireneusz—Lipták Tamás tollából a matematikai statisztika orvosi biológiai alkalmazásairól, Medgyessi Pálétól a Galton-deszkáról, Vincze Istvánéból az ipari minőségellenőrzés matematikai módszereiről, Rényi Alfréd—Takács Lajoséból Poisson-folyamatok által származtatott történésfolyamatokról, valamint Frei Tamáséból a planiméterekről. Elméletibb jellegűek Aczél Jánosnak és Hosszú Miklósnak kétváltozós függvények nomográfiai ábrázolhatóságának feltételeiről szóló cikkei. Béda Gyula egy pályagörbe-problémát, Gáti József a gömbháromszögtan Legendre-féle tételének érvényességi körét, Freud Géza gázelegyek eloszlását tárgyalja. Elektrotechnikai tárgyú Freud Géza és Fazekas Ferenc egy-egy cikke, atomelméleti Arató Mátyás—Freud Géza, Rényi Alfréd és Freud Géza egy-egy dolgozata.

A kötet az egyes osztályok szemináriumaiban elhangzott előadások kivonatait és munkatársaiknak az Intézettel kapcsolatos, de másutt megjelent dolgozatainak felsorolását is tartalmazza.

Aczél János
a matematikai tudományok kandidátusa

* Az Osztályközlemények a következőkben mindenkor részletesen kívánja ismertetni az AMI Évkönyveit. Most visszamenőleg az I. Évkönyvet csak röviden, de a másodikat már részletesen ismertetjük.

A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének közleményei II.

Akadémiai Kiadó Budapest, 1953.

A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei II. kötete ötszáztizenkilenc oldalon harminchat tudományos dolgozatot tartalmaz.

A dolgozatok sorát EGERVÁRY JENŐ: *Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására* c. értekezése nyitja meg.

A determinánsokon alapuló matrixmentes módszert numerikus számításokra már GAUSS a róla elnevezett kiküszöbölő eljárással helyettesítette. Az a módszer, mely (a nem szinguláris) **A** együttható-matrix reciprok matrixát alkalmazza, a determinánsokat is igénybe veszi éppen a reciprok matrix kiszámítására.

A jelenlegi módszerek az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

homogén egyenletrendszert (inhomogén rendszer megoldása erre visszavezethető) az **A** együttható-matrix alkalmas faktorizálásával kívánják megoldani.

Ha sikerül **A** matrixot nem szinguláris **C** (azaz det $\mathbf{C} \neq 0$) és Hermite-féle normálalakú **B** matrix szorzatára felbontani:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B},$$

akkor a

$$\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$$

egyenletből következő

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$$

egyenlet a feladat végleges megoldását jelenti. (Ui. az Hermite-féle normálalakban 1) a főátló elemeinek értéke 0, vagy 1, 2) a 0 főátlóelemeket tartalmazó sorok csupa 0-ból állanak, 3) az 1 főátló-elemeket tartalmazó oszlopok az 1-en kívül csupa 0-ból állanak.)

Ilyen Hermite-féle faktorizáció kivitelére közvetlen gyakorlati módszer nem ismeretes; a szerző az **A** matrixot úgy faktorizálja

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B},$$

hogy det $\mathbf{C} \neq 0$ és **B** olyan felső háromszögmatrix, melynek megvan az Hermite-féle normálforma 1. és 2. tulajdonsága.

Az eljárás az **A** matrix diadikus felbontásán, vagyis rangszámával megegyező számú elsőrangú matrix összegére való felbontásán alapszik. Végtelen sok diadikus felbontás lehetséges. Ha ezek közül egyet egy-egy diad egymásutáni leválasztásával felírtunk, az összes többi ennek segítségével megadható.

Ui. egy diadikus felbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \cdots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{V}^*,$$

ismeretében valamennyi felbontás:

$$\mathbf{A}=(\mathbf{UT})\ (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}^*),$$

$\mathbf{T}$ r-edrendű nem szinguláris matrix.

Egy tetszőleges $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\\ \vdots\\ \mathbf{v}_r\end{bmatrix}=\mathbf{U}\mathbf{V}^*$ felbontással az $\mathbf{A}\mathbf{x}=0$ egyenletet minimális számú egyenletből álló ekvivalens rendszerre lehet visszavezetni. Az

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\left(\sum_1^r \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*\right)\mathbf{x}=\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1^*\mathbf{x})+\mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2^*\mathbf{x})+\cdots+\mathbf{u}_r(\mathbf{v}_r^*\mathbf{x})=0$$

egyenletből következik

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{x}=0,\quad \mathbf{v}_2^*\mathbf{x}=0,\ldots,\quad \mathbf{v}_r^*\mathbf{x}=0,$$

illetve matrix egyenletbe írva

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \mathbf{v}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_r^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0.$$

Az $\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}$ bilineáris forma pedig átmegy

$$\mathbf{I}^*\left(\sum_1^r \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*\right)\mathbf{x}=\sum_1^r(\mathbf{I}^*\mathbf{u}_k)\ (\mathbf{v}_k^*\mathbf{x})$$

minimális, r számú formapár szorzatába.

Visszatérve az egyenletrendszer megoldására, tetszőleges diadikus felbontás esetén nincs biztosítva az, hogy $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \mathbf{v}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_r^*\end{bmatrix}$ matrix háromszög- (ill. trapéz-) matrix legyen.

A szerző éppen azzal, hogy az $\mathbf{A}$ diadikus előállításakor a diadok egymásutáni leválasztására megfelelő előírást, sorrendet ad, éri el, hogy a $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \mathbf{v}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_r^*\end{bmatrix}$ matrix felső háromszög-matrix legyen az Hermite-féle normálalak 1. és 2. tulajdonságával. Az előírás általános, m sor, n oszlopból álló matrixra alkalmazható, az eljárásban sor vagy oszlopcserére nincs szükség.

Az

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}$$

ill.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

inhomogén rendszert particionált matrixokkal

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_m \end{bmatrix} = 0 \qquad (x_m = -1)$$

homogén rendszerre lehet visszavezetni.

A dolgozatot illusztráló példák zárják le.

A matrixszámítás néhány eredményét alkalmazza LOVASS-NAGY VIKTOR bizonyos villamos, RÓZSA PÁL pedig mechanikai rendszerekre.

LOVASS-NAGY VIKTOR: *Párhuzamos vezetékekből álló rendszer elektromos tulajdonságainak leírására szolgáló parciális differenciálegyenletrendszer megoldása matrixszámítás segítségével* c. dolgozatában párhuzamos vezetékekből álló rendszerre írja fel az ún. távíró-egyenletrendszert. Ez a parciális differenciálegyenletrendszer a feszültségeknek **u** (és éppen így az áramerősségeknek **i**) egyoszlopos matrixba való írásával, továbbá az **R** ellenállás-, **G** levezetés-, **L** indukció-, **C** kapacitásmatrix bevezetésével a következő: (x hossz, t idő)

$$-\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{Gu} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{Ri} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}.$$

E rendszerből most is következik a „hullámegyenlet"

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \mathbf{LC}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (\mathbf{RC} + \mathbf{LG})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{RGu}.$$

(**R**, **G**, **L**, **C** szimmetrikus matrixok.)

A szerző azt az esetet vizsgálja, amelyben n számú azonos tulajdonságú vezeték egy ún. nullvezető körül írt körhengeren egymástól állandó szögtávolságban levő alkotók mentén helyezkedik el. Megadja a rendszer egy „álló hullám" megoldását

$$\mathbf{u} = e^{-\Gamma x}\,\mathbf{u}_0\,e^{j\omega t}$$

alakban ($\Gamma = [(\mathbf{R}+j\omega\mathbf{L})\,(\mathbf{G}+j\omega\mathbf{C})]^{\frac{1}{2}}$) a matrix-elméletből főként azt a tényt használva ki, hogy ha valamely matrix sajátértékei egyszeresek, akkor a matrix analitikus függvényét a Lagrange-féle interpolációs képlet segítségével matrixpolinomra lehet redukálni.

Végül rámutat arra, milyen módosulást jelent az, ha a nullvezeték nem árammentes.

Mechanikai rendszerrel foglalkozik RÓZSA PÁL: *Elasztikusan kapcsolt korpuszkuláris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálata matrixszámítás alkalmazásával* c. dolgozatában.

A rezgő húr a matematika és matematikai fizika termékeny problémája és pedig nemcsak a folytonos húrmodell, hanem a Lagrange-féle korpuszkuláris húrmodell is.

Szabályos közökben elhelyezkedő egyenlő vagy váltakozó nagyságú tömegek rezgésével, e rezgés tovaterjedésével a XIX. század végétől fogva ROUTH, BORN és KÁRMÁN, BRILLOUIN, HOSTINSKY és mások foglalkoztak. Eredményeik a villamos, mechanikai és akusztikus szűrők szerkesztési gyakorlatába is átmentek. RÓZSA PÁL cikke megmutatja, hogyan lehet az egyméretű korpuszkuláris modellt egységesen és átfogóan (a kritikus rezgésszámok megállapításán túlmenőleg) tárgyalni.

A vizsgált rendszereknél fellépő matrixok a normál-matrixok közé tartoznak. (Normálmatrix karakterisztikus ill. minimál-polinomjának gyökei egyszeresek). Ebben az esetben a rendszert jellemző **A** matrix analitikus függvényét $f(\mathbf{A})$-t matrix-polinomra lehet visszavezetni.

Ha a két végén rögzített korpuszkuláris húr tömeg-matrixa **M**, a tömegpontok száma n, az L hosszúságú húrban ébredt feszítőerő F, a tömegpontok transzverzális elmozdulása **y** oszlopvektort alkot, akkor a rendszer differenciálegyenlete:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \frac{F(2n+1)}{L}\mathbf{A}\mathbf{y} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & & \cdot & - \\ 0 & -1 & 2 & & & \\ \vdots & - & - & - & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{kontinuáns matrix.}$$

Bevezetve az **M** matrix négyzetgyökét és ezzel az $\eta = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}$ helyettesítést,

$$\ddot{\eta} + \mathbf{V}\eta = 0$$

egyenlet adódik, **V** szimmetrikus matrixszal.

A megoldás megadja a sajátrezgéseket és amplitudókat.

Az egyik végén harmonikusan gerjesztett váltakozó tömegpontokkal bíró, igen hosszúnak felvett húr mozgásának elemzése rávezet a Routh-féle jelenségre: a húr mechanikai szűrőként viselkedik.

Ha a húrt teljesen sima henger palástjára feszítjük, akkor kontinuáns helyett ciklikus matrix lép fel.

A szerző végül vizsgálja, hogyan növekszik a rendszer energiája, ha egy-egy tömeg egyenlő időközben egyenlő impulzust kap.

Nagy szilárdságú anyagok, acél, vasbeton alkalmazása magasépítésben és hídépítésben, nagyméretű acélszerkezetek, héjak alkalmazása hajó- és repülőgépszerkesztésben az elméleti és gyakorlati érdeklődés előterébe helyezték a rugalmas stabilitás kérdését.

Két végén szabadon felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának vizsgálata c. dolgozatában LOVASS-NAGY VIKTOR két merőleges szimmetriasíkkal bíró gerenda alakváltozását vizsgálja, a rugalmas szál középpontjában ható függélyes koncentrált erő, ill. a rugalmas szál mentén ható egyenletesen megoszló függőleges terhelés hatására. A felfüggesztési pontok forgást megengednek és a szélső keresztmetszetekben a keresztmetszet egyik főtengelyében vannak.

Lehetséges egyensúlyi helyzet a következő: az adott terhelés esetén a gerenda csak függőleges irányú lehajlást szenved, az egyes keresztmetszetek a hossztengelyre merőleges vízszintes tengely körül fordulnak el. Ez a helyzet lehet stabilis és lehet labilis, ez a felfüggesztési pontok helyzetétől függ. Ha labilis, akkor alkalmas kicsiny zavarás átviszi a gerendát egy másik deformált állapotba: a gerenda súlyponti szála nemcsak függőleges, hanem vízszintes irányban is kitér és a keresztmetszetek a hossztengelyre merőleges vízszintes *és függőleges* tengely körül is elfordulnak.

Lehet a feladat megoldását variációszámítás segítségével, energetikai meggondolással keresni, lehet úgy is, hogy a kihajolt rúd egy keresztmetszetében jelentkező nyomatékot alkalmas három irányban felbontjuk, és használjuk a műszaki mechanikában használatos rúdelmélet közelítő formuláit. Ezt az utat választotta a szerző. Az egyenletek felírásához természetesen az alakváltozás elemzése szükséges; az egyenletek lineárisak kis (infinitezimális) alakváltozások esetén.

A nyert differenciálegyenletrendszer végül is egy másodrendű differenciálegyenletre vezet, melyet sorfejtéssel lehet megoldani. Ebben a megoldásban össze van kapcsolva a végkereszmetszetek szögelfordulása és a felfüggesztési pontok súlypont-feletti magassága. Ha a szögelfordulásra csak a triviális zérus adódik, akkor az egyensúlyi helyzet stabilis, különben labilis. — A dolgozat a Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium XII. Tervezési Főosztályának megbízásából végzett számítások eredményeinek egy részét tartalmazza.

GYIRES BÉLA: *Egy másodrendű differenciálegyenlet megoldásáról* c. dolgozatában egy, a heterogén reakció-kinetika tárgykörében fellépett

$$y''+ay'+by=cy^2 \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0,\ a^2<4b)$$

nem lineáris differenciálegyenletnek $x>0$ tartományban való megoldásával foglalkozik. Megmutatja, hogy a differenciálegyenletet formálisan kielégítő

$$y=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\nu\lambda_1 x}, \qquad \left(\lambda_1=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)\right)$$

Dirichlet-sor a tett feltevések és egy további feltétel (kezdeti értékre tett kirovás) teljesülése esetén nem negatív x-ekre akárhányszor differenciálható függvényt állít elő s hogy továbbá a sor csak akkor egyenlő állandóval, ha ez az állandó zérus és akkor a sor valamennyi együtthatója zérus (tehát a feltevések mellett "Nullentwicklung" nem létezik).

Kémiai reakciók tárgyalása a stochasztikus folyamatok elmélete segítségével c. cikkében RÉNYI ALFRÉD ioncserés bimolekuláris meg nem fordítható reakciók időbeli lefolyását vizsgálja. Meg nem fordítható reakcióban **A** és **B** molekula **C** molekulává egyesül

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C},$$

C nem bomolhatik fel **A** és **B**-re. Ha A és B-vel jelöljük a $t=0$ időpontban jelenlevő **A** és **B** molekulák számát, továbbá ha $\alpha_t=A-\gamma_t$ és $\beta_t=B-\gamma_t$ jelenti a t időpontban ugyanezen molekulák számát — γ_t a **C** molekulák száma ugyanakkor —, a

$$W_n(t)=P(\gamma_t=n)$$

valószínűségekre a Kolmogorov-egyenletek segítségével a

$$W_n'(t) = \lambda[W_{n-1}(t)h_{n-1} - W_n(t)h_n], \qquad (n = 0, 1, \dots, C)$$

differenciálegyenletrendszer nyerhető. $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ jelenti annak valószínűségét, hogy Δt idő alatt egy **A** és egy **B** molekula vegyüljön, továbbá

$$h_n = (A-n)(B-n).$$

A fenti differenciálegyenletrendszerből a **C** molekulák $C(t)$ várható értékére a

$$C'(t) = \lambda[A-C(t)][B-C(t)] + \lambda S^2(t)$$

differenciálegyenlet adódik; itt $S^2(t)$ a **C** molekulák számának szórásnégyzete. Rámutat a szerző arra, hogy a kinetikus tömeghatástörvény csak közelítő pontosságú, mert amint az az előbbi differenciálegyenletből látható, egy additív részt is — a $\lambda S^2(t)$ értéket — figyelembe kell venni. Igaz, hogy ez a tag a legtöbb esetben kicsiny, de főleg a folyamat vége felé lényeges eltérést okozhat. Erre az eltérésre becslést is tartalmaz a dolgozat.

Továbbiakban a szerző egyensúlyi állapotra vezető megfordítható bimolekuláris folyamatot tárgyal:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \rightleftarrows \mathbf{C}.$$

Megtartva az előbbi jelöléseket, a Kolmogorov-egyenletek segítségével a

$$W_n'(t) = \lambda[h_{n-1}W_{n-1}(t) - h_n W_n(t)] + \mu[(n+1)W_{n+1}(t) - nW_n(t)]$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots, C)$$

differenciálegyenletrendszer nyerhető. Ebben — az előbb már alkalmazott jelölések kiegészítéseként — $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy Δt idő alatt egy **C** molekula **A** és **B**-re essék szét. Az előbbivel analóg módon innen a

$$C'(t) = \lambda(A-C(t))(B-C(t)) - \mu C(t) + \lambda S^2(t)$$

differenciálegyenlet adódik. A továbbiakban a szerző stacionárius állapot létezését feltételezve meghatározza a folyamat egyensúlyi állandóját a λ és μ parameterek függvényében.

Az előbb tárgyalt feladat $A = C$, $B = C$ speciális esetével matematikailag azonos módon lehet tárgyalni az ionizáció és rekombináció problémáját.

A szerző a $P_n(t) = W_{C-n}(t)$ valószínűségek határeloszlását vizsgálja $t \to \infty$-re (C és n jelentik t időpontban a rendszerben jelenlevő molekulák, ill. ionok számát). A

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

valószínűségek generátorfüggvénye Laguerre-polinomok hányadosaként állítható elő. Ennek segítségével lehetséges volt pontos értéket nyerni az átlagra és a szórásnégyzetre, ez utóbbira jó becslést is.

A dolgozat egyik legérdekesebb eredményét függelékben közli a szerző. Egyensúlyi állapotra vezető folyamat ergodicitását a szokásos valószínűségszámítási módszertől eltérő módon bizonyítja. Kimutatja ugyanis, hogy a folyamatra vonatkozó $W_n(t)$-re felírt differenciálegyenletrendszer matrixa ún.

Jacobi-féle normális matrix és a matrix sajátértékeire vonatkozó tételeken keresztül bizonyítja a $\lim_{t\to\infty} W_n(t)$ határeloszlás létezését.

Kémiai problémával foglalkozik PRÉKOPA ANDRÁS: *Hosszú láncmolekulák bomlási folyamatának valószínűségszámítási tárgyalása* c. dolgozata is. Hosszú láncmolekulák hidrolízisénél az n egységből felépült polimer (n-mer) kötései véletlenszerűen bomlanak fel. Kérdés, mi lesz valamely t pillanatban a k egységből álló molekulák, (k-merek) számának eloszlása, várható értéke és szórása?

A cikk szerzője R. SIMHA-nak 1941-ben közölt e témakörre vonatkozó eléggé heurisztikus eredményeire ad szabatos bizonyítást és azt messzemenően általánosítja is. A reakciómechanizmusra vonatkozólag felirt Kolmogorov-egyenletekből a k-merek $N(k, t)$ várható értékére a

$$\begin{aligned}\frac{dN(k,t)}{dt} = & -(\gamma_1^{(k)}(t)+\cdots+\gamma_{k-1}^{(k)}(t))N(k,t)+\\ & +(\gamma_1^{(k+1)}(t)+\gamma_k^{(k+1)}(t))N(k+1,t)\\ & \vdots\\ & +(\gamma_{n-k}^{(n)}(t)+\gamma_k^{(n)}(t))N(n,t) \qquad (k=2,3,\ldots,n)\end{aligned}$$

differenciálegyenletet nyeri;

$$\gamma_i^{(k)}(t) = \frac{dP_i^{(k)}(t)}{dt} : (1-P_i^{(k)}(t)),$$

$P_i^{(k)}(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy egy k egységből álló lánc i-edik kötése a $(0, t)$ idő alatt elbomlik, n a leghosszabb lánc egységeinek száma. Ha a $\gamma_i^{(k)}(t)$ valószínűségek nem függnek az időtől, az egyenletek megegyeznek a SIMHA által közöltekkel.

A továbbiakban arról az egyszerűbb esetről van szó, amelyben bármely kötés bomlása egyenlően valószínű, vagyis

$$\gamma_i^{(k)}(t)=\lambda(t) \quad \text{és} \quad P_i^{(k)}(t)=P(t).$$

Itt meghatározza a k-merek számának $N(k, t)$ várható értékét és $\sigma_n^2(k, t)$ szórásnégyzetét, végül pedig az i- és k-merek száma közötti korrelációt. Az átlagos tömeg meghatározásánál a szerző elejti azt a korábban tett megszorítást, hogy a molekulák csak lineárisak lehetnek, megenged elágazásokat is, rács fellépését azonban kizárja (vagyis bármely kötés bomlása a molekula kétfelé válását jelenti).

Rekurrens sztochasztikus folyamatokkal foglalkozik TAKÁCS LAJOS cikke: *Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál.* Legyen a ξ_t folyamat rekurrens sztochasztikus folyamat, $t_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$ legyenek a folyamat Markov-pontjai (az E esemény bekövetkezésének időpontjai). A t_n-t_{n-1} különbségek eloszlásfüggvénye legyen $F(x)$, és $W(t, n)$ jelentse annak valószínűségét, hogy a $(0, t)$ intervallumon bekövetkezett E események száma $\leq n$. Az $(u, u+t)$ intervallumra vonatkozó előbbivel analóg valószínűségnek $u\to\infty$-re vett határértéke legyen $W^*(t, n)$. A szerző egyszerű eljárást ad $W(t, n)$ és $W^*(t, n)$ meghatározására, ha ismeretes $F(x)$. Ugyanis a fenti eloszlásfüggvényeket és azok momentumát is meg lehet határozni $F(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjának, $\varphi(s)$-nek ismeretében a szerző által megadott, az eloszlásfüggvények Laplace—Stieltjes transzformáltjai közötti alábbi relációk segítségével.

$$\int_0^\infty e^{-st} W(t,n)\,dt = \frac{1-[\varphi(s)]^{n+1}}{s} \qquad (\mathrm{Re}(s)>0),$$

$$\int_0^\infty e^{-st} W^*(t,n)\,dt = \frac{1}{s} - \frac{[1-\varphi(s)][\varphi(s)]^n}{\mu s^2} \qquad (\mathrm{Re}(s)>0),$$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x) \qquad (\mathrm{Re}(s)>0),$$

itt μ az $F(x)$ eloszlásfüggvény átlagát jelenti.

Általában azonban $F(x)$ függvény nem ismeretes. A dolgozat tulajdonképpeni célja eljárást adni fenti eloszlásfüggvények kerülő úton való meghatározására pusztán a $(0,t)$ időközben előforduló E események $m(t)$ várható számának ismeretében. $m(t)$ sokszor könnyen meghatározható. Tekintsük a szóban forgó folyamatot a $0 \leq t < \infty$ időközben és tegyük fel, hogy abban A és B állapotok váltogatják egymást ($t=0$ pillanatban a rendszer A állapotban van). Az előzőkben tekintett E események időpontjainak az A-ból B-be való átmenet időpontjai felelnek meg. Az A állapotban való tartózkodás idejének eloszlásfüggvénye exponenciális: $G(x)=1-e^{-\mu x}$, a B állapotban való tartózkodásé $H(x)$. Következésképpen $F(x)$ e két függvény kompozíciójaként adódik. A továbbiakban a szerző a $W(t,n)$ és $W^*(t,n)$ eloszlásfüggvényeken kívül bevezeti az $\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ eloszlásfüggvényeket is. Ezek közül az első annak valószínűségét jelenti, hogy a $(0,t)$ időközben a B állapotban való tartózkodás ideje $\leq z$, a másik pedig ugyanezt jelenti az $(u, u+t)$ időköz esetén $u\to\infty$ határátmenet mellett. Bevezeti még a $P_A(t)$ függvényt is, mely annak valószínőségét jelenti, hogy t pillanatban A állapotban van a rendszer. A fenti eloszlásfüggvények illetve Laplace-transzformáltjaik, valamint az $m(t)$ átlagfüggvény és $P_A(t)$ valószínűség között olyan alább felírt összefüggéseket vezet be a szerző, melyek segítségével meg lehet határozni az ismeretlen eloszlásfüggvényeket és momentumaikat:

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-st} W(n,t)\,dt = \frac{1}{s}\left[1-\frac{p^{n+1}(\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}}\right],$$

itt $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x)$;

$$(2)\qquad \Omega(t,z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \dfrac{[p(t-z)]^n}{n!} H_n(z), & \text{ha } 0 \leq z < t \\ 1 & \text{ha } z \geq t. \end{cases}$$

$$(3)\quad \Omega^*(t,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+p\alpha}\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)}\dfrac{[p(t-z)]^n}{n!}\left[H_n(z)+p\int\limits_0 [1-H(x)]H_n(z-x)\,dx\right] & \text{ha } 0\leqq z<t\\ 1 & \text{ha } z\geqq t;\end{cases}$$

itt $H_n(z)$ jelenti $H(z)$ n-szeres kompozícióját.

$W^*(n,t)$ itt is meghatározható az alábbi relációk segítségével:

$$\mu=\alpha+\frac{1}{p},\quad \alpha=\int\limits_0^{\infty} x\,dH(x).$$

$$(4)\qquad \varphi(s)=\frac{\int\limits_0^{\infty} e^{-st}\,dm(t)}{1+\int\limits_0^{\infty} e^{-st}\,dm(t)},$$

$$(5)\qquad \varphi(s)=1-\frac{p}{p+s}\left[\int\limits_0^{\infty} e^{-st}\,dm(t)\right]^{-1}$$

$$(6)\qquad m'(t)=pP_1(t)$$

$$(7)\qquad \varphi(s)=1-\frac{\left[\int\limits_0^{\infty} e^{-st}P_1(t)\,dt\right]^{-1}}{p+s}.$$

A továbbiakban részecskeszámlálással és gépalkatrész törésével kapcsolatos példán illusztrálja a szerző eredményeit.

Ugyancsak TAKÁCS közöl egy rövidebb cikket *Részecskeszámlálóknál fellépő koincidencia-problémákról.* Poisson-eloszlás szerint érkeznek jelek egy elektronsokszorozóba. Az egyes részecskék feszültségimpulzusokat hoznak létre az észlelőberendezésben, ezek hatására exponenciálisan csökkenő jeleket lehet észlelni, e jelek lineárisan adódnak össze. A számolóberendezés akkor ad jelzést, ha a jelek értékének összege a küszöbfeszültséget meghalad. Legyen λ a Poisson-folyamat valódi eseménysűrűsége. Jelöljük $H(x)$-szel az egyes részecskék által létrehozott feszültséglökések nagyságának eloszlásfüggvényét és $F^*(x)$-szel, ill. $\psi^*(w)$-vel az η_t^* valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, ill. annak sűrűségfüggvényét. Itt η_t^* a t időpontbeli feszültség nagysága; η_t^* értéke csökken az $e^{-\alpha t}$ függvény szerint, $\alpha=\frac{1}{RC}$ az ún. időállandó reciprok értéke. A szerző $H(x)$ és $F^*(x)$ karakterisztikus függvényei közti kapcsolatra a következő összefüggést adja:

$$\psi^*(w)=\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\int\limits_0^1 \frac{1-\varphi(wu)}{u}\,du\right),$$

ebben $\varphi(w) = \int_0^\infty e^{iwx} dH(x)$. Az a-tól függő $\lambda'(a)$ látszólagos eseménysűrűségre pedig a

$$\lambda'(a) = \lambda \left[F^*(a) - \int_0^a H(a-x) dF^*(x) \right]$$

összefüggést kapja.

Geiger—Müller számlálók esetén a számlálónak τ holtideje is van. Ekkor a $\lambda'(a)$ látszólagos eseménysűrűség meghatározására az alábbi integrálegyenletet lehet felírni:

$$(1) \qquad \lambda'(a) = \frac{\lambda}{1+\lambda\tau} \left[F(a) - \int_0^a H(a-x) dF(x) \right];$$

$$(2) \qquad F(x) = \int_0^\infty K(x,y) dF(y);$$

$$(3) \qquad K(x,y) = \int_0^\infty H(xe^{\alpha u} - y) dG(u),$$

itt

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < \tau \\ 1 - e^{-\lambda(x-\tau)}, & x \geqq \tau \end{cases}$$

jelenti két feszültséglökés közötti idő eloszlásfüggvényét, $F(x)$ pedig az η_t^* feszültség eloszlásfüggvényét közvetlenül egy jel bekövetkezése előtti időpontban.

A továbbiakban a cikk egyetlen mérőberendezésre kapcsolt több elektronsokszorozó vagy Geiger—Müller számlálóval kapcsolatos koincidenciaproblémákat tárgyal és meghatározza a véletlen és műkoincidenciák sűrűségét.

Sztochasztikus folyamatok ipari alkalmazásával kapcsolatos problémával, a raktárkészlet pótlásával foglalkozik a kötet két cikke: PALÁSTI ILONA, RÉNYI ALFRÉD, SZENTMÁRTONY TIBOR és TAKÁCS LAJOS: *A raktárkészlet pótlásáról. I. A törzskészlet* és L. ZIERMANN MARGIT: *A raktárkészlet pótlásáról. II. A kiegészítő rendelés.* Ezek a közlemények I. kötetében található e témakörrel kapcsolatos eredményeknek messzemenő általánosítását adják és egyben a választott matematikai modellt közelebb viszik a valósághoz.

Valamely üzembe adott gépalkatrész több helyen van hasonló körülmények között igénybe véve. Bizonyos időközökben kopás vagy törés miatt cserére kerül sor. Kérdés, mekkora mennyiségben kell ezt az alkatrészt raktáron tartani, hogy egyrészt ne legyen fennakadás a termelésben, másrészt a leggazdaságosabban járjunk el. Az alkatrész igénybevétele nem folytonos, hanem véletlen hosszúságú működési idők és szünetek váltogatják egymást. Jelentse $L(x)$ a működési szakasz, $H(x)$ a szünet és $G(x)$ a valódi élettartam eloszlásfüggvényeit. Meghatározandó az alkatrész-cserék számának eloszlása. A feladat tárgyalását az teszi bonyolulttá, hogy a pótlási időt is valószínűségi változónak kell tekinteni $P(t)$ eloszlásfüggvénnyel. A szerzők megadják egyrészt a pótlási idő alatti cserék M várható számát és D^2 szórásnégyzetét:

$$M = \int_0^\infty m(t)\,dP(t),$$

$$D^2 = \int_0^\infty \sigma^2(t)dP(t) + \int_0^\infty (n(t) - M)^2\, dP(t),$$

másrészt a t idő alatti csereszám átlagát és szórásnégyzetét:

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)],$$

$$\sigma^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)\, [1 - W(t, n)] - n(t)^2.$$

Itt $W(t, n)$ jelenti annak valószínűségét, hogy a $(0, t)$ időközben a cserék száma $\leqq n$. $W(t, n)$ az $L(x)$, $G(x)$, $H(x)$ ismeretében az alábbi összefüggésekből határozható meg:

$$W(t, n) = 1 - \int_0^\infty \Omega(t, z)\,dG_{n+1}(z),$$

$$\Omega(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} [L_{k+1}(z) - L_k(z)]\, H_{k-1}(t - z).$$

($L_n(z)$, $G_n(z)$ és $H_n(z)$ az $L(z)$, $G(z)$ és $H(z)$ n-szeres kompozíciója.) Az általános esetet elintézve azzal a speciális esettel foglalkoznak a szerzők, amelyben $L(x) = 1 - e^{-\frac{x}{l}}$ exponenciális eloszlást mutat.

A másik cikk az utánrendelés kérdésével foglalkozik. A szerző megadja az utánrendelésnek az r darabszámát, melyet a raktárkészletnek r_0-ra, a törzskészletre való csökkenésekor meg kell rendelni, hogy a gazdaságossági követelményeknek optimálisan tegyünk eleget.

Sztochasztikus folyamatok ipari alkalmazásának egy másik problémájával, minőségellenőrzéssel foglalkozik SZÉKELY GÁBOR: *Egy minőségellenőrzéssel kapcsolatos sztochasztikus folyamatról* c. cikke. Gyártás közben több automata gépet kezel egy futóellenőr. Ha egy gépet elromlott állapotban talál (vagyis ha az selejtet gyárt), megállítja és megjavítás után újra elindítja. A futóellenőr adott géphez való visszatérésének ideje valószínűségi változó $G(x)$ sűrűségfüggvénnyel. A szerző felteszi, hogy a gép selejtmentes szakaszai exponenciális eloszlásúak $H(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geqq 0)$ eloszlásfüggvénnyel. Ez a feltevés sok esetben teljesül is, pl. csavarmenet-automatáknál, amelyeknél a selejtet a kés törése okozza. Adott gép által t idő alatt gyártott tételben a selejtes darabok számának $P(t, s)$ valószínűségét:

$$P(t, s) = \Omega(t, s\tau) - \Omega(t, (s - 1)\tau)$$

adja. E képletben s a t idő alatt gyártott selejtes darabok száma, τ egy darab gyártásának ideje. $\Omega(t, z)$ annak valószínűsége, hogy a selejtgyártási periódusok összege $\leqq z$. Az $\Omega(t, z)$ eloszlásfüggvényt, illetve annak $\psi(s, w)$ kétszeres

Laplace-transzformáltját meg lehet határozni a

$$\psi(s, w) = \frac{1}{s+\lambda} \, \frac{1-\gamma(s+\lambda)}{1-\frac{w}{w-\lambda}\gamma(s+\lambda)+\frac{\lambda}{w-\lambda}\gamma(w+s)}$$

összefüggésből. Ebben $\gamma(s)$ a $G(x)$ eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltja. A szerző foglalkozik továbbá azzal a kérdéssel, hány gépet kell egy ellenőrre bízni, hogy adott átlagot lehessen garantálni. Tárgyalja azt az esetet is, melyben a gép a selejtperiódus alatt csupán p valószínűséggel gyárt selejtet (p állandó, vagy maga is valószínűségi változó bizonyos eloszlásfüggvénnyel). Kívánatos volna a megoldás olyan irányú általánosítása, mely lehetővé tenné annak az erős megszorításnak elejtését, melyet e cikkben tesz a szerző, hogy ti. a selejtmentes gyártási periódusok eloszlása exponenciális. Ilyen általánosítás a gyakorlatra való alkalmazhatóság határait lényegesen tágítaná.

Két rövid beszámolót tartalmaz a kötet az előző kötetben közölt két cikkel kapcsolatos üzemi kísérletek eredményéről. *Beszámoló az uzsai kőbányában végzett kőtörési és energiamérési kísérletekről* c. cikkben ARATÓ MÁTYÁS azt a feladatot oldja meg: hogyan kell kőtörésnél az utántörő gép pofanyílását megszabni, hogy a zúzáshoz szükséges energia minimális legyen, feltéve, hogy bizonyos méreten felüli követ vissza kell szállítani és az utántörőben újra meg kell törni. A kísérletek azt mutatják, lehetséges volna a gépek beállítását úgy megváltoztatni, hogy a törési teljesítmény növekedésével egyidejűleg a szükséges villamos energia lényegesen csökkenjen.

SORS LÁSZLÓ: *Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének meghatározása* c. cikke RÉNYI ALFRÉD és SZENTMÁRTONY TIBOR az Intézet Közleményei I. kötetében megjelent tanulmányához kapcsolódik. E tanulmány összefüggést állapít meg az egyidejű maximális villamos teljesítményszükséglet és az összes beépített villamos fogyasztók névleges fogyasztásának hányadosa és az ún. effektív gépszám között. E képletben két parameter szerepel, ezen állandók mérések útján való meghatározásával foglalkozik a cikk.

MEDGYESSY PÁL a Közlemények I. kötetében a Galton-deszkáról írt cikkéhez kiegészítést közöl, melyben bizonyítja a következő tételt: ha egy Galton-deszkára, melynek ékei általában más valószínűséggel térítenek el jobbra mint balra véletlentől függő ξ számú golyót bocsátunk és η_i-vel jelöljük az i-edik tartályba kerülő golyók számát, az η_i valószínűségi változók akkor és csakis akkor függetlenek egymástól, ha ξ Poisson-eloszlású.

JUVANCZ IRÉNEUSZ és LIPTÁK TAMÁS a Közlemények előző kötetében megjelent nem-paraméteres mintaösszehasonlítási eljárásokkal foglalkozó cikkükhöz kiegészítő táblázatot közölnek.

A matematikai statisztikai vonatkozású cikkek sorát RÉNYI ALFRÉD Wilcoxon-féle próbával foglalkozó *Újabb kritériumok két minta összehasonlítására* c. tanulmánya nyitja meg.

Dolgozata első felében a szerző a Wilcoxon-próbának olyan bizonyítását adja, mely egyben lehetővé teszi az eloszlás értékeinek egyszerű kiszámítását elég nagy mintaelemszám esetén is. Kimutatja ugyanis, hogy a szóban forgó valószínűségek generátorfüggvényét a már GAUSS által ismert binomiális „együttható-polinom“ alakjában lehet megadni.

A dolgozat másik felében a szerző a Wilcoxon-próba egy javított eljárását tárgyalja. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ és $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ két minta; megállapítandó, hogy azonos alapsokaságból származnak-e vagy sem? A Wilcoxon-próba általánosítása abban áll, hogy a szerző megvizsgálja, hány teljesül az $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$ egyenlőség-párok közül, ha j és $k \neq j$ végigfut az $1, 2, \ldots, n$ számokon, i pedig az $1, 2, \ldots, m$ számokon; jelöljük e számot W_1-gyel. W_2-vel pedig azt a számot jelöljük, mely megmondja, hány teljesül a $\xi_h < \eta_i$, $\xi_j < \eta_i$ egyenlőtlenségpárok közül, ha h és $j \neq h$ az $1, 2, \ldots, m$ számokon és j az $1, 2, \ldots, n$ számokon fut végig. Ha a

$$W = \frac{W_1}{m\binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n\binom{m}{2}}$$

számot képezzük, meg lehet határozni, mely α és β határok közé kell W értékének esnie előírt valószínűségi szint esetén. A cikk függelékeként $m = n = 9$-ig terjedő táblázatot közöl a szerző a próba használatához.

Mérési eredmények pontatlanságának hatása hisztogram felvételénél c. dolgozatában VINCZE ISTVÁN a következő kérdéssel foglalkozik. Valamely eloszlásból vett minta elemeit osztályokba soroljuk. Ha az egyes mérési eredmények leolvasása is hibával jár, milyen hatással van ez a mérési bizonytalanság az egyes osztályokhoz tartozó relatív gyakoriságra? Vizsgálatában felteszi a szerző, hogy a mérési eredményt terhelő hiba független magától a mérési eredménytől. VINCZE eredménye így szól: ha $f(x)$ a tényleges (hibátlan) mérési eredmény eloszlásának sűrűségfüggvénye, $g(x)$ a hiba sűrűségfüggvénye zérus várható értékkel, és s szórással, akkor az (α, β) intervallumban a szóban forgó relatív hibára: $\frac{P-p}{p}$-re (p a relatív gyakoriság, P ennek tapasztalati értéke) a következő becslés adódik:

$$\frac{P-p}{p} < \frac{\beta-\alpha}{p}\left|\varepsilon \max f(x) + s\sqrt{\varepsilon}\max_{(\alpha-\delta,\, \beta+\delta)}|f'(x)| + \frac{1}{2}s^2 \max_{(\alpha-\delta,\, \beta+\delta)}|f''(x)|\right|$$

és itt a $\delta > 0$ és $\varepsilon > 0$ értékekre:

$$\int_{-\delta}^{\delta} g(x)\, dx = 1-\varepsilon.$$

Ha a hibaeloszlás az $x = 0$ értékre szimmetrikus, akkor a becslés egyszerűbb alakot ölt.

Miután a szerző útmutatást ad arra nézve, hogyan becsülhető meg konkrét esetben számszerűleg a relatív hiba és hogyan tehető a gyakorlati követelményeket kielégítően kicsinnyé, megvizsgálja azt az esetet, amelyben a hiba normális, illetőleg egyenletes eloszlást mutat.

Az osztályba sorolás kérdésével, speciálisan az osztályközök megválasztásával foglalkozik SARKADI KÁROLY dolgozata: *Osztályközök megválasztása minták elemeinek osztályba sorolásánál.* Legyen ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$. Legyenek az osztályokat kijelölő pontok

$$-\infty = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k = \infty$$

és legyen a (c_{i-1}, c_i) osztályokba eső pontok helyettesítő pontja a_i. Kérdés: adott k esetén a minta középértékének kiszámítása szempontjából a $c_0, c_1, \ldots, c_k$ sorozat elemeinek és az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számoknak milyen megválasztása okoz legkisebb hibát azáltal, hogy ξ helyett mindig azzal az a_i-vel számolunk, amelyik ξ-vel közös (c_{i-1}, c_i) szakaszba esik. Azaz keresni kell, milyen $c_0, c_1, \ldots, c_k$ és $a_1, a_2, \ldots, a_k$ értékek mellett lesz

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} (x-a_i)^2 f(x)\, dx$$

legkisebb.

Szerző megmutatja, hogy a minimumnak az

$$a_i = \frac{\int_{c_{i-1}}^{c_i} x f(x)\, dx}{\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\, dx} \quad \text{és} \quad c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

$(i = 1, 2, \ldots, k)$

feltételek szükséges feltételei. Ha a fenti egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, akkor a feltételek egyszersmind elegendők is. Az egyenletrendszernek egyértelmű megoldására a szerző elégséges feltételt is ad: ha az $f(x) \geq 0$ függvénynek $f(x) > 0$ szakaszán (szakaszain) log $f(x)$ konkáv, az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

A cikk befejező részében a szerző zérus várható értékű és egységnyi szórású normális eloszlásra megadja $k = 1, 2, \ldots, 15$ esetre az osztályközöket és az egyes osztályok helyettesítő pontjait.

Egy másik dolgozatában: *A selejtarány Bayes-féle valószínűségi határaira vonatkozó dualitási elvről,* SARKADI a minőségellenőrzésnek a Bayes-féle problémával való összefüggésével foglalkozik.

Ha a minőségellenőrzésnél a Bayes-szabályt alkalmazzák, feltételezik, hogy a megvizsgálandó tételben a selejtarány a priori egyenletes eloszlású. Ez a feltevés kétségkívül önkényes, s az utóbbi években a Bayes-tétel alkalmazásán alapuló (retrospektív) módszert kiszorította a J. NEYMANtól származó adott megbízhatóságú konfidencia-intervallumot megadó (prospektív) módszer.

ODERFELD egy dolgozatában a mintavételi eljárásoknak egy duálitási tulajdonságára mutatott rá. Az ún. retrospektív paraméterek a mintavételi eljárás eredményéből bizonyos valószínűséggel adnak felvilágosítást az ismeretlen eloszlású tételről. Ezzel szemben az ún. prospektív paraméterek ismertnek feltételezett eloszlás esetén adnak felvilágosítást a mintavétel eredményéről. ODERFELD azt mutatta ki, hogy a priori egyenletes eloszlás esetén a retrospektív paraméterek meghatározása a prospektívekére vezethető vissza, és ezt nevezi dualitásnak.

SARKADI dolgozata e dualitási elvet általánosítja. Megmutatja, hogy érvényes marad az elv, ha a mintára binomiális helyett hipergeometrikus, polihipergeometrikus, polinomiális, vagy Poisson-eloszlást tételezünk fel.

SARKADInak *A selejtarány a priori béta-eloszlásáról* c. cikke is ODERFELD munkáihoz kapcsolódik. ODERFELD a tétel a priori eloszlására egyenletes helyett béta-eloszlást vesz fel s ennek paramétereit a minta értékei segítségével becsüli. SARKADI ezen ismeretlen paraméter-értékek becslésére egyszerű és gyakorlatilag használható eljárást ad.

A minőségellenőrzéssel foglalkozó cikkek sorozatát FONTÁNYI ÁGOTA, SARKADI KÁROLY és VAS GYÖRGYNÉ *A rendezett minták elméletének alkalmazása a statisztikai minőségellenőrzésben* c. dolgozata zárja be. A szerzők BRAGNISZKIJ egy ötletét, módszerét alapozzák meg és dolgozzák ki. E módszer alapgondolata abban áll, hogy a rendezett minta minden egyes eleméhez ellenőrző határokat rendelnek egy közös ellenőrző kártyán. Az ellenőr feladata abból áll, hogy a gyártás közben vett n elemű mintát egy bizonyos mért adat alapján nagyság szerint rendezi és az adatokat az ellenőrző kártyára vezetve megnézi, hogy pl. 1. vagy 2. vagy k-adik elem mért adata az 1. vagy 2. vagy k-adik elem számára előírt határok közé esik-e. Az n-elemű minta k-adik elemére vonatkozó előírt határokat egy $F(x)$ alapeloszlásfüggvényből lehet meghatározni. Ha pl. a k-adik elem kívül esik a számára előírt határon, abból arra lehet következtetni, hogy az eredeti $F(x)$ eloszlás már nem áll fenn a mért adatra nézve, tehát a gyártás menetébe be kell avatkozni. Az eljárás előnye az, hogy nincs szükség az ellenőrzött méret normális eloszlásának feltételezésére (l. RÉNYI A.: Rendezett minták elmélete, MTA III. oszt. Közleményei III. kötet 647.).

A cikk segédtáblázatokat közöl a módszer gyakorlati alkalmazásának megkönnyítésére és foglalkozik a maximum-minimum rendszerű ellenőrzéssel is. A függelékben a szerzők kitérnek a rendezett minta elemei korrelációjának vizsgálatára is.

Külön kell megemlékeznünk MEDGYESSY PÁLnak *Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire* c. valószínűségszámítási és matematikai statisztikai vonatkozású cikkéről. Legyen adva normális sűrűségfüggvények keveréke

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N} A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k},$$

$$A_k>0,\ \sum_{k=1}^{N} A_k=1, \qquad 0<m_1<m_2<\ldots<m_N,\ \sigma_k>0$$

állandókkal.

Kérdés: $f(x)$ ismeretében hogyan lehet egyértelműen meghatározni az A_k, m_k, σ_k állandókat? Más szóval $f(x)$ felbontandó összetevőire. A gyakorlatilag fontos kérdéssel (spektroszkópiai, biológiai stb. vizsgálatokban merült fel) elsőízben G. DOETSCH foglalkozott azzal a megszorító feltevéssel, hogy az egyes komponensek szórása egyenlő, és erre a felbontásra Fourier-transzformáció segítségével ad eljárást. MEDGYESSY cikkében a nem egyenlő szórású esetre alkalmazza DOETSCH szóráscsökkentő eljárását. $f(x)$ ismeretében bevezeti az

$$f^*(x)=\sum_{k=1}^{N} A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2-\lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_k^2-\lambda^2}}$$

transzformált függvényt; ebben λ pozitív, a legkisebb szórásnál kisebb paraméter. $f^*(x)$ összetevői a szórás csökkentései folytán élesebben válnak szét. $f(x)$-et és $f^*(x)$-et Hermite-sorba fejtve

$$f(x)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{c_h}{h!}\varphi^{(h)}(x),$$

$$f^{(*)}=\sum_{\varrho=0}^{\infty}\frac{c_\varrho^*}{\varrho!}\varphi^{(\varrho)}(x)$$

együttható összehasonlításából adódik, hogy

$$c_\varrho^*=\sum_{n=0}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]}\frac{c_{\varrho-2n}\cdot\varrho!(-1)^n\lambda^{2n}}{(\varrho-2n)!\,n!\,2^n},$$

vagyis $f(x)$ Hermite-sorának együtthatóiból $f^*(x)$ együtthatói előállíthatók. Ilyen módon $f^*(x)$ Hermite-szintézissel adódik.

Fenyő István: *Megjegyzés a Hankel-transzformáció elméletéhez* c. dolgozatában az

$f(r)$ $r\geqq 0$ értelmezett és $(0,\infty)$-ben integrálható függvény Hankel-transzformáltja és többszörös Fourier-transzformáltja között ad meg összefüggést.

Legyen $r=x=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, akkor $f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)$ n-szeres Fourier-transzformáltja

$$F(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)e^{-i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}\,dx_1\cdots dx_n.$$

Egyszerűen adódik, hogy $F(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ csak $\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=y$-tól függ. Jelöljük $F(y_1,y_2,\ldots,y_n)=F(y)$.

E többszörös Fourier-transzformált és a Hankel-transzformált közötti kapcsolat a következő:

$$y^{\frac{n-2}{2}}F(y)=\int_0^{\infty}\xi\left[\xi^{\frac{n-2}{2}}f(\xi)\right]J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi)\,d\xi,$$

mely összefüggésből az az állítás is nyilvánvaló, hogy ha $F(y)$ létezik, $f(x)$ Hankel-transzformáltja is létezik.

Az érdekes formulát úgy bizonyítja be a szerző, hogy a Fourier-transzformáltban x_1 koordinátát megtartja, az $x_2,\ldots,x_n$ koordináták $n-1$ méretű terében gömbi koordinátákat vezet be. Némi számolás után és az

$$\int_0^{\pi}\cos(z\cos x)\sin^{2p}x\,dx=\sqrt{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)J_p(z)$$

reláció felhasználásával adódik az állítás.

A formula egyik alkalmazásaként a szerző a Hankel-féle megfordítási tétel egy új bizonyítását adja: tehát bizonyítja azt, hogy ha

$$y^p F(y) = \int_0^\infty \xi [\xi^p f(\xi)] J_p(y\xi)\, d\xi,$$

akkor megfordítva

$$x^p f(x) = \int_0^\infty \eta [\eta^p F(\eta)] J_p(x\eta)\, d\eta.$$

Másik alkalmazásként és TRICOMI egy formulája segítségével megoldja az

$$f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)} f(y)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

sajátértékfeladatot:

$$\lambda = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \\ (-2\pi)^{-\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

A hengerfüggvények addiciós tételének néhány következményéről c. dolgozatában FENYŐ általánosítja C. AGOSTINELLI következő nevezetes formuláját:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \cos n\theta\, d\theta = \int_0^\infty s J_n(sx) J_n(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_0(s\sigma) f(\sigma)\, d\sigma.$$

$$(R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}).$$

Legyen x, y, R egy háromszög három oldala, θ az R-rel, ψ x-szel szemben levő szög. A szerző megmutatja, hogy az előbbinél általánosabban fennáll:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \cos k\psi \cos m\theta\, d\theta =$$

$$\int_0^\infty s [J_{k+m}(sx) + (-1)^m J_{k-m}(sx)] J_m(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_k(\sigma s) f(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \sin k\psi \sin m\theta\, d\theta =$$

$$\int_0^\infty s [J_{k+m}(sx) + (-1)^m J_{k-m}(sx)] J_m(sy)\, ds \int_0^\infty \sigma J_k(\sigma s) f(\sigma)\, d\sigma.$$

E két képletet összeadva adódik:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R)\cos(k\psi - m\theta)\,d\theta = \int_0^\infty s J_{k+m}(sx) J_m(sy)\,ds \int_0^\infty \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma)\,d\sigma.$$

E formulából $f(R)$ helyébe adott függvényeket írva FENYŐ egész sor formulát nyer, köztük AGOSTINELLI, WEBER stb. formuláit, és új formulákat is, pl. a konfluens hipergeometrikus függvények egy integrálelőállítását stb.

A szerző még nagyobb mértékben is általánosítja AGOSTINELLI formuláját: fennáll

$$x^n y^n \int_0^\pi \frac{f(R)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos\theta)\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi\Gamma(2n+m)}{2^{n-1} m!\,\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{s^{n-1}} J_{n+m}(sx) J_{n+m}(sy)\,ds \int_0^\infty \sigma J_n(s\sigma) f(\sigma)\,d\sigma,$$

ahol $C_m^{(n)}$ a magasabbrendű gömbfüggvények jele.

Az f függvényt különbözőképpen választva és az f-ben fellépő paraméterek különböző választásával ismét több érdekes összefüggés adódik.

GLÜCK VERA: *Diffúzióállandó meghatározása többrétegű diffúziós rendszer anyageloszlásának ismeretében* c. dolgozatában az egyméretű diffúzió differenciálegyenletét oldja meg

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

(C koncentráció, D diffúzióállandó, x az egyméretű rendszer hosszkoordinátája, t az idő) a következő kerületi feltételek és kezdeti feltétel mellett:

$$C(x,0) = \begin{cases} C_0 & 0 \leqq x \leqq x_0 \\ 0 & x_0 < x \leqq l \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=l} = 0.$$

A szerző megadja a megoldást végtelen sor alakjában és táblázatokat is közöl $x_0 = 0{,}1l$, $0{,}25l$, $0{,}33l$, $0{,}5l$ értékekre. A nyert sor kis t értékekre (tehát a folyamat kezdetén) lassan konvergál, ezért kicsiny t értékekre az l-értéket végtelen nagynak véve a megoldást határozott integrállal számolja. A táblázatok egy kutató laboratórium megbízásából készültek.

Példák szimmetrikus függvénykapcsolatoknak pontmezős nomogramokkal való ábrázolására c. dolgozatukban PÁL SÁNDOR és TÓTH KÁROLY megmutatják, mily nagyarányú egyszerűsítéseket lehet elérni bizonyos, két változóban szimmetrikus négy és ötváltozós függvénykapcsolatok nomografikus ábrázolásában. Eredményüket két elektrotechnikai vonatkozású függvénykapcsolaton mutatják be.

ACZÉL JÁNOS, BÉDA GYULA, GÁTI JÓZSEF és TÖRÖK SÁNDOR cikke: *Nomogramok az általános háromszög megoldásához* geodéziai célra, megbízásból készült. A szerzők két szög és egy oldal vagy két oldal, egy szög, ill. három oldal ismeretében az általános háromszög megoldására számos nomogramot terveztek és rajzoltak meg: polár-, pontmezős, egyenessereges és pontsoros, logaritmikus egyenessereges és mozgó skálás nomogramokat. Nomogramjaik előnyeit és hátrányait — szerkesztés és használat szempontjából — gondosan elemezték.

FREI TAMÁS: *Integrálgörbék momentumainak felhasználása differenciálegyenletek numerikus megoldásánál* c. cikkében a vizsgált közönséges differenciálegyenlethez integrálegyenletet vagy integrálegyenletek rendszerét rendeli; ezek megoldásai között vannak a differenciálegyenlet megoldásai is. A fellépő integrálok számítására olyan közelítő módszereket alkalmaz, melyek az ismeretlen függvény diszkrét pontokban felvett közelítő értékeiben elsőfokúak.

Elsőrendű differenciálegyenlethez

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

nemcsak az

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f((\xi), y(\xi))d\xi$$

egyenlet, hanem általában

$$\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^k y(\xi)d\xi = y_0 \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{k+1}}{k+1} f(\xi, y(\xi))d\xi \tag{2}$$

egyenletek bármelyike is rendelhető. Ha k valamely értéke mellett $y(x)$ megoldása (2)-nek, akkor megoldása (1)-nek is. Az integrálokban momentumok lépnek fel, innen a módszer neve. (2) még általánosítható

$$\int_{x_0}^{x} y(\xi)\psi(\xi)d\xi = y_0[\Psi(x)-\Psi(x_0)] + \int_{x_0}^{x} [\Psi(x)-\Psi(\xi)]f(\xi, y(\xi))d\xi,$$

$$\left(\Psi(x) = \int \psi(x)dx\right).$$

Ha egy kezdeti szakasz bizonyos pontjaiban ismeretesek $y(x)$ jó közelítő értékei: $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$, akkor pl. a Laurent—Cotes-formulák szolgáltatnak Y_n-ben lineáris egyenletet.

Magasabbrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték-feladatokhoz speciálisan az $y^{(k)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y_{(k-1)})$ egyenlethez integrálegyenletek bizonyos rendszerét rendeli a szerző, pl. ahhoz hasonlóan, ahogyan az n-edrendű differenciálegyenletet elsőrendű rendszerre írják át. A közelítő numerikus eljárás most is abból áll, hogy az integrálegyenletrendszerben fellépő integrálokat mechanikus kvadraturával számítja; ha egy kezdeti szakaszon

$$\begin{aligned} \text{az}\quad & y(x_0),\ y'(x_0), \ldots, y^{(k-1)}_{(x_0)}, \\ & y(x_1),\ y'(x_1), \ldots, y^{(k-1)}_{(x_1)} \\ & \vdots \\ & y(x_{n-1}),\ y'(x_{n-1}), \ldots, y^{(k-1)}_{(x_{n-1})} \end{aligned}$$

értékrendszernek ismerjük egy jól közelítő értékrendszerét, akkor

$$\text{az } y(x_n),\ y'(x_n),\ y''(x_n), \ldots, y^{(k-1)}(x_n)$$

értékek közelítő értéke lineáris egyenletrendszerből adódik.

A módszer igazi alkalmazási területének a kerületérték és sajátértékfeladat mutatkozik. A differenciálegyenlethez bizonyos integrálegyenletrendszert rendelve, a fellépő integrálokat a szerző legegyszerűbb esetben az egész intervallumra terjeszti ki és integrálja valamely alkalmas közelítő eljárással, legcélszerűbben olyan kvadraturával, melyben az integrációs alappontok között az intervallum végpontjai is szerepelnek.

A cikket numerikus példák zárják le.

Körkeresztmetszetű vezetőben fellépő áramkiszorításról c. dolgozatában FREUD GÉZA kiszámítja $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \sin \omega t$ ($\mathbf{H}_0$ és ω állandó) mágneses térbe helyezett vezetőben az ugyancsak ω frekvenciájú váltakozó I erősségű áram eloszlását; $\mathbf{H}$ a vezetőre merőleges.

A meghatározandó mágneses tér két tér szuperpoziciójából származik. Az egyik az áram által átfolyt vezető mágneses tere, ha külső tér nem hat, a másik az a tér, amely homogén mágneses térbe helyezett árammentes vezetőben és körülötte alakul ki. A szerző azzal a feltevéssel számol, hogy a vezetőn belül a folyamat kvázistacionárius. Így adódik aztán, hogy a wattveszteség két tag összegeként jelentkezik. Az egyik tag adja a vezető saját áramától származó veszteséget, figyelembevéve a sugárirányú áramkiszorítást, e tag független az idegen mágneses tértől. A másik a külső mágneses tértől származó örvényáramok okozta veszteség és ez független a vezetőben folyó áram erősségétől.

Az előbbi feladat különleges esete a következőnek: a vezetőtől véges távolságban párhuzamosan megadott intenzitású áramfonal van. A szerző a mágneses tér vektorpotenciálját (az előbb már vázolt feltevéssel) a potenciálelmélet ismert összefüggéseivel egyszerűbben nyeri, mint MANEBACK, aki a kérdést integrálegyenlet megoldására vezette vissza.

A dolgozatot diagramok egészítik ki.

FREUD GÉZA és SZILVAY GÉZÁNÉ: *Párhuzamos elektromos vezetők mágneses terének számításáról.*

Két igen hosszú párhuzamos körkeresztmetszetű mágneses anyagból készült vezetőből (oda és visszavezetés) álló vezeték hosszegységre eső önindukciós együtthatójának számítása során a szerzők felteszik, hogy a vezetőkön az árameloszlás radiálisan szimmetrikus (vagyis azt teszik fel, hogy a vezetők elég messze vannak egymástól, illetőleg a bennük folyó váltakozó áram frekvenciája elég kicsiny). A dolgozat már megjelent első részében (Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei I. k., szerző FREUD G.) egy körkeresztmetszetű vezető és párhuzamos áramfonal vagy két párhuzamos körkeresztmetszetű vezető mágneses teréről volt szó és a feladatot a szerző — az árameloszlás sugaras szimmetriájának feltételezésével — a tükrözés módszerével oldotta meg.

Ezen eredményekre hivatkozva jelen dolgozatban a szerzők mindenekelőtt megmutatják, hogy a vektorpotenciált szolgáltató integrál konvergens. Ha a vektorpotenciált $\mathbf{A}$-val, az áramsűrűség vektorát $\mathbf{i}$-vel jelöljük, a mágneses energia

$$U_m = \frac{1}{2} \Lambda I^2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{A}\mathbf{i}\,df$$

kifejezéséből ki lehet számítani a rendszer hosszegységre vonatkoztatott önindukciós együtthatóját, Λ-t.

Az $\int \mathbf{A}\mathbf{i}\,df$ integrál a következő tagok összegére bomlik:

$$\int \mathbf{A}_1\mathbf{i}\,df + \int \mathbf{A}_2\mathbf{i}\,df + \int \mathbf{A}_3\mathbf{i}\,df.$$

$\mathbf{A}_1$ az egyik vezető saját áramától származó mágneses tér vektorpotenciálja, $\mathbf{A}_2$ a másik vezetőben folyó áram által keltett mágneses tér vektorpotenciálja, $\mathbf{A}_3$ a két vezető mágneseződéséből adódó mágneses tér vektorpotenciálja, a három integrál az egyik vezető keresztmetszetére terjesztendő ki; hasonló tagok adódnak a másik vezető keresztmetszetére is.

Egyenlő sugarú, egymástól három sugár hossztávolságban elhelyezkedő vörösréz és vas vezetőkre végzett számítások azt mutatják, hogy az önindukciónak a mágneseződésből származó része az erősáramú műszaki gyakorlatban elhanyagolható legalább is a permeabilitás kezdeti szakaszán.

LOVASS-NAGY VIKTOR, PÁL SÁNDOR, PÁSZTOR JÁNOS: *Indukciósan hevített körhenger-alakú fémtestek melegedésével kapcsolatos egyes kérdések vizsgálata.* Fémből készült szerkezeti elemek hőkezelésére és különösen felületi hőkezelésre szolgáló eljárások közül legcélszerűbb az indukciós hevítés. Ha a gerjesztő áram frekvenciája igen nagy, akkor az indukciós úton a testbe vitt hőenergia a test vékony felületi rétegében jelentkezik, következőleg úgy lehet tekinteni, mintha a test felületén idő- és felületegységre vonatkoztatva állandó nagyságú hőenergia lépne be. Ha a test méretei a felületi réteg kicsiny vastagságához képest nagyok, akkor a feladatot féltérre vonatkozó hővezetési feladatnak lehet tekinteni. Az irodalomban ilyen számítások ismeretesek; a feladatot a szerzők jelen dolgozatban igen hosszú körhenger alakú testre oldották meg.

Homogén anyagot véve figyelembe, a következő feladatról van szó:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T.$$

T hőmérséklet r sugár és t idő függvénye; a bizonyos hőmérsékleti tartományban állandó (átlagérték), Δ a Laplace-operátor. Keresendő a fenti egyenlet megoldása a

$$T(r,o) = o \text{ kezdeti és } \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = q$$

kerületi feltétellel. (λ bizonyos hőmérsékleti közökben állandó, R a henger sugara, q a felületen átlépő idő- és felületegységre vonatkoztatott hőmennyiség). A megoldás

$$T(r, t) = T_1(r, t) + T_2(r, t)$$

alakban állítható elő, ahol

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a \Delta T_1, \quad \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} \right)_{r=R} = \frac{q}{\lambda}$$

és

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a \Delta T_2, \quad T_2(r, o) = -T_1(r, o),$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=R} = 0.$$

A nyert eredményeket diagrammok és gyakorlati példák szemléltetik. A szerzők kitérnek a ferromágneses anyagok esetére is.

Egy magyar automatikus másoló berendezés másolási pontosságának matematikai vizsgálata c. dolgozatában FAZEKAS FERENC a „Mintagépgyár Hydrofix" elnevezésű hidraulikus elven működő esztergapadra szerelhető automatikus másolóberendezésével foglalkozik.

A berendezésnek van egy, a másolandó darabot letapogató érzékelő eleme, a tapintó. Ez funkcionális kiképzésű hidraulikus relét, vezérlő tolattyút mozgat. Ez hidraulikus erősítőt, szervomotort vezérel. A ciklus zárt: a szervomotor és a tolattyú hengere között merev visszacsatolás van. Ilyen hidraulikus berendezésnél általában nehéz olyan viszonyokat teremteni, hogy a rendszer működését leíró differenciálegyenlet lineáris legyen. A szóban forgó másolóberendezés differenciálegyenlete sem lineáris. A szerző először a készülék holtjátékmentes linearizált modelljét vizsgálja és e modell által végzett másolás hibájára állapít meg becslési formulákat. Az általános megállapításokat néhány egyszerű meridiángörbével bíró forgástest másolásán szemlélteti. Megmutatja azután, miképpen módosulnak a másolási hibák zérustól különböző kezdeti hiba esetén és ha a holtjáratokat is figyelembevesszük. Utal a szerző arra, milyen természetű problémákra vezet a nem lineárizált modell vizsgálata. Végül a „Hydrofix" másolót egy TURMAKIN által leírt kétfokozatú berendezéssel hasonlítja össze és e kétfokozatú berendezés csatolására tesz javaslatot.

Szintén az előbbi kérdéssel foglalkozik TÖRÖK VILMOS: *„Hydrofix másolóesztergа szabályozástechnikai vizsgálata* c. cikkében. Szintén lineáris modellt vizsgál. A szabályozást tiszta integrálszabályozásnak tekinti. Foglalkozik a minta előjavításának kérdésével. Kétfokozatú erősítővel bíró másolóberendezés esetén merev visszavezetés helyett izodrom visszavezetést javasol

LENGYEL SÁNDOR és KEMPELEN MÁRTA: *Ionok hidratációs munkájának elméleti meghatározása.* Ion-hidratációs munkán ideális iongáz és végtelen híg oldatban levő hidratált ionokból álló rendszer szabad energiája közötti különbséget értik. BORNt követve, az egy ionra vonatkoztatott hidratációs munkát egyenlőnek veszik a vákuumban levő ion elektrosztatikus energiája és a vízben mint dielektrikumban levő ion elektrosztatikus energiájának különbségével, képletben

$$\frac{(ze_0)^2}{2r_0} - 4\pi \int_{r_0}^{\infty} \varphi r^2 dr,$$

$$4\pi\varphi = \int_0^D \varepsilon E dD.$$

z_0 az ion töltésszáma, r_0 a sugara, ε a víz dielektromos állandója, (E a térerősség függvénye), D a dielektromos eltolás. A szerzők az r_0 ionsugárt számítják (l. LENGYEL SÁNDOR cikkét MTA Kémiai Tudományok Közleményei 3, 367). Az εE szorzat számítására KIRKWOOD—BOOTH képletét veszik alapul. Az (r_0, ∞) határú integrált két részre bontják, (r_0, r) közben numerikusan integrálnak, e közön kívül ε már ε_∞ állandó számmal vehető egyenlőnek, s itt már fel lehet írni a határozatlan integrált is.

A számított eredmények a mérteknél 10%-kal nagyobb értéket adnak. A szerzők ennek okait elemezve rámutatnak a további még pontosabb elméleti meghatározásnál figyelembe vehető szempontokra.

Körmendi István

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍRE

Steinfeld Ottó kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1955. június 29-én került sor Szegeden STEINFELD OTTÓ kandidátusi értekezésének megvédésére.

A bizottság elnöke KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag felkérésére STEINFELD OTTÓ ismertette értekezésének fontosabb téziseit.

A dolgozatnak egyik lényeges részét képezi a jelölt által bevezetett kváziideál fogalma és ennek alkalmazásai. Jelölt kváziideálnak nevezi egy R gyűrű olyan K részmodulusát, amelyre az $RK \cap KR \subseteq K$ reláció teljesül. Miután megmutatta a kváziideálok fontosabb tulajdonságait, rátért a következő tétel ismertetésére (a dolgozatban 9. tétel):

Az R gyűrűre vonatkozóan az alábbi állítások ekvivalensek egymással:

(A) Az R féligegyszerű,

(B) Az R egységelemes és véges sok minimális balideál direkt összege,

(C) Az R-ben létezik n ortogonális, idempotens ε_i elem és R felírható

$$(1) \qquad R = \sum_{i_1, j_1 = 1}^{h_1} \varepsilon_{i_1} R \varepsilon_{j_1} + \cdots + \sum_{i_r, j_r = h_1 + \cdots + h_{r-1} + 1}^{n} \varepsilon_{i_r} R \varepsilon_{j_r} \quad (h_1 + \cdots + h_r = n)$$

$h_1^2 + \cdots + h_r^2$ számú minimális kváziideál direkt összegeként; továbbá (1)-ből bármely két $\varepsilon_i R \varepsilon_j, \varepsilon_j R \varepsilon_k$ kváziideálra $\varepsilon_i R \varepsilon_j \varepsilon_j R \varepsilon_k = \varepsilon_i R \varepsilon_k$ is teljesül.

(D) Az R mindegyik balideáljának van jobbegységeleme.

Ez az eredmény a dolgozat egyik főeredménye. A dolgozat egy másik főeredménye az R gyűrű prímideáljaira vonatkozik. Ez a következő (a dolgozatban 12. tétel):

Legyen $\mathfrak{a} (\neq (0), R)$ az R gyűrű egyik (nemtriviális) ideálja és $\mathfrak{p}$ az $\mathfrak{a}$-nak egyik prímideálja. A $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = \mathfrak{p} : \mathfrak{a}$ ideálhányados prímideál az R-ben és $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. Ha $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, akkor $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ az egyetlen olyan prímideál, amelynek $\mathfrak{a}$-val való metszete $\mathfrak{p}$. Ebben az esetben $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ megadható még a következő négy alakban: $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = (\mathfrak{p} : \mathfrak{a})_b = (\mathfrak{p} : \mathfrak{a})_j = (\mathfrak{p} : \mathfrak{l})_b = (\mathfrak{p} : \mathfrak{r})_j$, ahol $\mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ az $\mathfrak{a}$-nak tetszőleges olyan bal-, illetve jobbideálja, amelyre $\mathfrak{l}, \mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{p}$ teljesül.

Az opponensek közül elsőnek FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora olvasta fel opponensi véleményét. Véleménye szerint az értekezésnek a kváziideálokkal foglalkozó része kevésbé értékes, mint a prímideálokkal foglalkozó része. Ugyanis ezen új fogalomra (a kváziideálra) „... fő alkalmazási területként szerző a félig egyszerű gyűrűket mutatja be, e gyűrűknek egy kétségtelenül fontos felbontását bizonyítva be, amely még alaposabb betekintést enged meg e gyűrűk szerkezetébe, de STEINFELD ennek a féligegyszerűséggel való ekvivalenciáját csak egy további feltétel mellett tudja biztosítani, nem is szólva a tárgyalásmód bonyolultságáról... Arra a fontos kérdésre sem kaptunk feleletet, hogy létezik-e egyáltalában olyan kváziideál, amely nem állítható elő egy baloldali és egy jobboldali ideál metszeteként." FUCHS LÁSZLÓ véleménye szerint a dolgozat főeredményének a 12. tételt kell tekinteni, amely egy Nagata-féle tételt általánosít és nemcsak egzisztenciaállítás, hanem a szóban forgó prímideáloknak ideálhányadosként való előállítását is megadja. Opponens hiányolta, hogy STEINFELD OTTÓ dolgozatába illusztráló példákat nem vett fel. Az értekezést gondos munkának tartja és alkalmasnak arra, hogy megvédése esetén STEINFELD OTTÓ a kandidátusi címet elnyerje.

Ezután KERTÉSZ ANDOR, a matematikai tudományok kandidátusa olvasta fel opponensi véleményét. KERTÉSZ ANDOR is a dolgozatnak a prímideálokra és komplett prímideálokra vonatkozó rész értékét hangsúlyozta ki. Kiemelte, hogy ezek az eredmények jól alkalmazhatók a bővítéselméletben.

KERTÉSZ ANDOR hiányolta azonban, hogy a dolgozatból kimaradt az eredmények történeti szempontból való megvilágítása. Megjegyezte továbbá, hogy a féligegyszerű gyűrűk a 9. tételben szereplő (C) követelménynél kevesebbet kívánó következő feltétellel is jellemezhetők: R-ben létezik olyan n ortogonális, idempotens ε_i $(i=1,\dots,n)$ elem, hogy R az összes $\varepsilon_i R \varepsilon_k$ $(i,k=1,\dots,n)$ minimális kváziideálok összege és bármely két $\varepsilon_i R \varepsilon_k, \varepsilon_j R \varepsilon_k$ kváziideálra $\varepsilon_i R \varepsilon_j \cdot \varepsilon_j R \varepsilon_k = \varepsilon_i R \varepsilon_k$ teljesül. Ennek segítségével a tétel bizonyítása is rövidül.

A dolgozat eredményeit KERTÉSZ ANDOR is értékesnek tartja és javasolja, hogy a Tudományos Minősítő Bizottság nyilvánítsa STEINFELD OTTÓt a matematikai tudományok kandidátusává.

STEINFELD OTTÓ válaszában köszönetet mondott az opponenseknek értékes megjegyzéseikért, amelyekkel legnagyobbrészt egyet is ért. Elismerte, hogy amíg a szóban forgó feltételnek és a tárgyalásmódnak nagyobbmérvű leegyszerűsítése nem sikerül, addig valóban nem tekinthető a féligegyszerű gyűrű a kváziideálok fő alkalmazási területének. Egyébként megemlítette, hogy újabban sikerült a kváziideáloknak egy másik bíztatónak látszó alkalmazási területét is megtalálnia. Elismerte, hogy a féligegyszerű gyűrűknek kváziideálokkal való jellemzésére egy igen bonyolult feltételt adott. Igen örvendetes lenne, ha a Noether-féle alaptételhez hasonlóan sikerülne azt elérni, hogy a feltételben szereplő kváziideálokról lényegileg csak azt kössük ki, hogy minimálisak. Megemlítette továbbá, hogy FUCHS LÁSZLÓnak arra a fontos kérdésére, hogy létezik-e olyan kváziideál, amely nem állítható elő egy baloldali és egy jobboldali ideál metszeteként, gyűrű esetében még mindig nem sikerült feleletet adnia. Mindenesetre félcsoportok esetén könnyen belátható, hogy a felelet igenlő.

A válasz elhangzása után FUCHS LÁSZLÓ megjegyezte, hogy az elmondottakból úgy látja, hogy a kváziideálok fő alkalmazási területe nem a gyűrűelmélet, hanem a félcsoportok elmélete lesz.

KERTÉSZ ANDOR megjegyezte, hogy őt is foglalkoztatta a féligegyszerű gyűrűknek kváziideálokkal való olyan jellemzése, amely mintegy analogonja volna a Noether-féle alaptételnek. Remélte ugyanis, hogy igaz az a tétel, hogy egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha egységelemes gyűrű és minimális kváziideálok direkt összege. Talált azonban egy ellenpéldát, amely mutatja, hogy a tétel ebben a formában nem igaz.

A további felszólalásokból KALMÁR LÁSZLÓ hozzászólásának azt a részét említem még meg, amely bizonyos értelemben megvédi a kváziideál fogalmát FUCHS LÁSZLÓnak a kváziideálnak a gyűrűelméletben való alkalmazására tett megjegyzéseivel kapcsolatban. Mivel a bal- és jobbideál aszimmetrikus fogalmak, helyes törekvés keresni azt az elég általános és szimmetrikus fogalmat, amely bizonyos szempontból átveheti ezen aszimmetrikus fogalmak szerepét. KALMÁR LÁSZLÓ szerint az értekezés mutatja, hogy erre a kváziideál fogalma igen jónak bizonyult.

A hozzászólások elhangzása után a bírálóbizottság egyhangúlag javaslatot tett a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy STEINFELD OTTÓt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Szép Jenő
a matematikai tudományok kandidátusa

A III. OSZTÁLY HÍREI

JUTALMAK

A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége az 1955. évben eredményes munkásságukért a III. Osztály területén a következő kutatókat részesítette jutalomban:

GÁSPÁR REZSŐ a fizikai tudományok kandidátusa, a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszékének vezetője 5000 Ft jutalomban részesült „Über das Verhalten der statistisch berechneten Elektronedichten in der Nähe der Atomkerne" című dolgozatában elért eredményeiért.

SZÉP JENŐ a matematikai tudományok kandidátusa, a Szegedi Pedagógiai Főiskola tanára 5000 Ft jutalomban részesült „Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen" és „Über die Faktorisation von Gruppen" című dolgozatában elért eredményeiért. E dolgozatok Szegeden 1955-ben az Acta Scientiarum Mathematicarum című folyóiratban jelentek meg.

TARJÁN IMRE a fizikai tudományok kandidátusa, a Budapesti Orvostudományi Egyetem Fizikai Intézetének vezetője 4000 Ft jutalomban részesült. Tarján Imre a legutóbbi években tudományos és ipari szempontból egyaránt jelentősnek minősíthető kutatásokat folytatott a kristályok mesterséges előállítása terén és a kristályok fényelektromos viselkedésére vonatkozóan. Vizsgálatairól több dolgozata jelent meg az Acta Physica Hungaricaban és a Magyar Fizikai Folyóiratban. Jutalmazását indokolttá tette az is, hogy mint a Fizikai Főbizottság titkára nagy lelkesedéssel végzi munkáját.

SZAMOSI GÉZA az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetének docense 4000 Ft jutalomban részesült az atommagenergia és a relativitáselmélet terén elért eredményeiért. 1955-ben 4 dolgozata jelent meg ill. van megjelenés alatt.

VINCZE ISTVÁN a matematikai tudományok kandidátusa, a Matematikai Kutató Intézet igazgatóhelyettese 4000 Ft jutalomban részesült. Helyettesi teendőinek lelkiismeretes ellátása mellett az 1955. év folyamán figyelemre méltó tudományos munkát végzett a matematikai statisztika, továbbá a komplexfüggvénytan területén. Egy vezetése alatt álló munkaközösség terjedelmes kézikönyvet állított össze a matematikai statisztika módszereinek a tömeggyártás minőségellenőrzésének felhasználására vonatkozóan.

SURÁNYI JÁNOS a matematikai tudományok kandidátusa, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetének docense 4000 Ft jutalomban részesült. SURÁNYI JÁNOS ez évben számottevő eredményeket ért el a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek problémái területén a matematikai logika eldöntésproblémájának redukciójával kapcsolatban, továbbá a rácsgeometriában és az interpolációelméletben. Az interpolációelméletben elért eredmények TURÁN PÁL és SURÁNYI JÁNOS közös munkája.

MITNYÁN PÁL a Központi Fizikai Kutató Intézet igazgatóhelyettese 2000 Ft jutalomban részesült. Igazgatóhelyettesi minőségében tudományszervezési és adminisztratív vonalon végzett az intézet érdekében kiemelkedő munkát. Munkájával nagy terheket vesz le a kutatókról, aminek következtében azok tudományos munkája nagyobb hatásfokúvá válik.

BALÁZS JÁNOS a III. osztály szaktitkára 3000 Ft jutalomban részesült. Szaktitkári teendőinek ellátását mintaszerű lelkiismeretességgel, gondossággal és tapintattal látja el. Gondos munkája igen nagy segítséget jelent az osztályvezetőségnek, különösen pedig az osztálytitkárnak. Nagymértékben járul hozzá ahhoz, hogy az osztálytitkárság az osztályhoz tartozó nagy intézeti létszám következtében felmerülő teendőket megfelelően láthassa el.

PRÉMIUMOK

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya az 1955-ben végzett eredményes munkájukért a következőket részesítette prémiumban:

BOROS JÁNOS a fizikai tudományok kandidátusa, az Építőipari Műszaki Egyetem Kisérleti Fizikai Intézet docense 2300 Ft prémiumban részesült „Áramlási sebesség mérése hőérzékeny félvezetőkkel", valamint CSÁSZÁR SÁNDORral közösen írt „Zur elektrischen Leitung der NaCl und KBr Pastillen" című dolgozatában elért eredményeiért.

CSÁSZÁR SÁNDOR az Építőipari Műszaki Egyetem docense 800 Ft prémiumban részesült BOROS JÁNOSsal közösen írt „Zur elektrischen Leitung der NaCl und KBr Pastillen" című dolgozatában elért eredményeiért.

HEDVIG PÉTER a Központi Fizikai Kutató Intézet Elektromágneses Hullámok Osztályának aspiránsa 1200 Ft prémiumban részesült „Néhány paramágneses anyag Faraday-effektusának vizsgálata" című dolgozatában elért eredményeiért.

SZÁSZ LEVENTE a Műszaki Egyetem Fizikai Intézet kutatója 800 Ft prémiumban részesült „A Pauli-elv statisztikus megfogalmazása és a Slater-féle potenciál közötti összefüggésről" című dolgozatában elért eredményeiért.

SZÉPFALUSI PÉTER a Műszaki Egyetem Fizikai Intézet kutatója 1200 Ft prémiumban részesült „Über eine Herleitung der Slaterschen halbempirischen Atomeigenfunktionen" és „Atomi elektronok hullámfüggvényeinek ortogonalitásáról" című dolgozatában elért eredményeiért.

SZABÓ ILONA a Debreceni Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet kutatója 2500 Ft prémiumban részesült „Kationok adszorpciója humusz preparátumon" című dolgozatában elért eredményeiért.

CSIKAI GYULA a Debreceni Fizikai Kutató Intézet aspiránsa 1200 Ft prémiumban részesült a „Wilson-kamra építése" című dolgozatában elért eredményeiért.

GÉMESI JÓZSEF az Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet kutatója 5C0 Ft prémiumban részesült LENDVAI JÁNOSsal közösen írt „Seignette-só olvadékból készült piezoelektromos szövetek fizikai tulajdonságai“ című dolgozatában elért eredményeiért.

LENDVAI JÁNOS az Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet kutatója 3C0 Ft prémiumban részesült GÉMESI JÓZSEFfel közösen írt „Seignette-só olvadékból készütt piezoelektromos szövetek fizikai tulajdonságai“ című dolgozatában elért eredményeiért.

CORNIDES ISTVÁN az Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet adjunktusa 2600 Ft prémiumban részesült TÓTH LAJOSsal közösen írt „Rádiófrekvenciás tömegspektrométer ionemisszióvizsgálatokra“ című dolgozatában, valamint „The radiofrequency mass spectrometer as an analogue to the optical grating“ című dolgozatában elért eredményeiért.

TÓTH LAJOS az Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet tanársegéde 600 Ft prémiumban részesült CORNIDES ISTVÁNnal közösen írt „Rádiófrekvenciás tömegspektrometer ionemisszióvizsgálatokra“ című dolgozatában elért eredményeiért.

KETSKEMÉTY ISTVÁN és SZALAY LÁSZLÓ a Szegedi Tudományegyetem Fizikai Intézet kandidátusai közösen írt dolgozatukban „Polarizációs vizsgálatok lumineszkáló oldatoknál az abszorpciós és emissziós átmenetek jellegének eldöntésére“ és Ketskeméty István „Beiträge zur Frage der Konzentrationsdepolarisation“ című dolgozatában elért eredményeikért 2400 Ft prémiumban részesültek (a szétosztást az intézetvezető bírálta felül).

GÓLIÁN BÉLÁNÉ az Orvosi Fizikai Intézet kutatója TAMÁS GYULÁval közösen írt „Atropa belladonna alkaloida tartalmának kivonása ultrahang segítségével“ című dolgozatában elért eredményeiért 600 Ft prémiumban részesült.

TAMÁS GYULA az Orvosi Fizikai Intézet kutatója GÓLIÁN BÉLÁNÉval közösen írt „Atropa belladonna alkaloida tartalmának kivonása ultrahang segítségével“, valamint TARNÓCZY TAMÁSsal közösen írt „Hártyák áteresztő képességének megváltozása ultrahang hatására“ című dolgozataiban elért eredményeiért 1850 Ft. prémiumban részesült.

TARNÓCZY TAMÁS a fizikai tudományok kandidátusa (Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet) TAMÁS GYULÁval közösen írt „Hártyák áteresztő képességének megváltozása ultrahang hatására“ című dolgozatában elért eredményeiért 1250 Ft prémiumban részesült.

PAUNCZ REZSŐ a fizikai tudományok kandidátusa (Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézet) 2500 Ft prémiumban részesült „Aromás vegyületek kétdimenziós homológ sorának vizsgálata“, „Kondenzált aromás vegyületek elméleti vizsgálata“ és „A terrylén, quaterrylén és a teranthén“ című dolgozataiban elért eredményeiért.

BERENCZ FERENC a Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézet kutatója „Az $(1+pr_{12})$ korrelációs faktor szerepe a hidrogén molekula alapállapotának számításában“ című dolgozatában elért eredményeiért 1000 Ft prémiumban részesült.

PUKÁNSZKY LAJOS a matematikai tudományok kandidátusa (Szegedi Tudományegyetem) „Some examples of factors" című dolgozatában elért eredményeiért 3000 Ft prémiumban részesült.

KERTÉSZ ANDOR a matematikai tudományok kandidátusa (Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézet) „The general theory of linear equation systems over semisimple rings", „A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése" és „On abelian groups whose subgroups are endomorphic images" című dolgozataiban elért eredményeiért 2000 Ft jutalomban részesült.

SOÓS GYULA a matematikai tudományok kandidátusa (Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézet) „Über Gruppen von Atomorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von Linienelementen" című dolgozatában elért eredményeiért 2000 Ft prémiumban részesült.

SZENDREI JÁNOS a matematikai tudományok kandidátusa (Szegedi Tudományegyetem Matematikai Intézet) „Eine neue Definition des Holomorphes der Gruppe und der Holomorphe des Ringes" és „Zur Holomorphentheorie des Ringes" és „Zur Holomorphentheorie der Ringe" című dolgozataiban elért eredményeiért 2000 Ft prémiumban részesült.

MOLNÁR JÓZSEF az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézet aspiránsa „Észrevételek a hiperbolikus geometriához" című dolgozatában elért eredményeiért 1800 Ft prémiumban részesült.

BIHARI IMRE a Műszaki Egyetem I. Matematikai Intézet adjunktusa „Egy Sturm-tétel általánosítása és alkalmazása Bessel-függvényekre és Legendre-polinomokra", „A generalization of a lemma of Bellmann and its aplication to unigueness problems of differential equations", „Oscillation and monotinity theorems concerning nonlinear differential equations of the second order" és „Researches of the boundedness and stability of the solution of nonlinear differential equations" című dolgozataiban elért eredményeiért 1500 Ft prémiumban részesült.

POLLAK GYÖRGY a Szegedi Tudományegyetem Matematikai Intézet aspiránsa „Novoje dokazatyelsztvo prosztoti znakoperemennoj gruppü" és „Lösbarkeit eines Gleichungssystems über einem Ringe" című dolgozataiban elért eredményeiért 1500 Ft prémiumban részesült.

MOÓR ARTHUR a matematikai tudományok kandidátusa (Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézete) „Allgemeine metrische Räume von skalarer Krümmung" című dolgozatában elért eredményeiért 1500 Ft prémiumban részesült.

FALVAI VALÉRIA (Bp. VI. Nagymező u. 25. I. 1.) a Csillagvizsgáló megbízásából az 1938-1952. években készített 286 felvétel kimérése után a mérések teljes redukcióját végezte el, majd felrajzolta a halmazban ismeretes 92 változó fénygörbéit. Ezek pontossága eléri sőt — az 1949-1950. évi felvételek, amelyek Kodak lemezeken készültek — túltesznek az irodalomban ismert összes megfigyeléseken. Ezen munkájáért 2000 Ft prémiumban részesült.

LOVASS BERNADETTE (Budapest I. Batthyányi u. 29. III.) 1954 októbere óta a Csillagvizgáló Intézet megbízásából az 1927. évi megfigyelési anyagból elkészítette a „Ladger III."-beli kisebb foltcsoportok sebességgrafikonjait és a foltokra vonatkozó fejlődési és sebességi grafikonokat több különféle szempontból diagramokon ábrázolta. Készített továbbá egy speciális katalógust az 1922-34. évi megfigyelések alapján a fenti munka tanulmányozásához. 1000 Ft prémiumban részesült.

RÓKA GEDEON (Budapest, VIII. Bródy Sándor u. 16.) a Csillagvizsgáló Intézet megbízásából az 1954. elejétől kezdve elkészítette az 1923- és 1924-ben észlelt foltcsoportok sebesség-grafikonjait. Ezen grafikonok felhasználásával az említett 2 évi megfigyelési anyagot különféle diagramokon ábrázolta. A sebességet közvetlenül számítások útján is meghatározta, ily módon e grafikus eljárás pontossága egyszerű összehasonlítás útján is megállapítható. 500 Ft prémiumban részesült.

FELOLVASÓ ÜLÉSEK 1955. II. FÉLÉV

Szeptember 30-án

1. RÉDEI LÁSZLÓ r. tag bemutatja SZENDREI JÁNOS „A holomorf csoport és holomorf gyűrű egy. új meghatározása“ c. dolgozatát.
2. KOVÁCS ISTVÁN lev. tag bemutatja SCARI OTTÓ „A BiO molekula emissziós színképe“ című dolgozatát.
3. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag bemutatja PUKÁNSZKY LAJOS „Harmadosztályú faktorokról“ című dolgozatát.

Október 28-án

1. JÁNOSSY LAJOS r. tag: „Megjegyzés az általános relativitás-elmélet három megfigyelt effektusáról“.
2. VARGA OTTÓ lev. tag: „Metrikus Kavaguchi-féle terek jellemzése“.
3. GOMBÁS PÁL* r. tag bemutatja FÉNYES IMRE „Egy WKB-típusú közelítő módszer“ és „A statisztikus atommodell nullaponti energiája radiális és azimutális részének meghatározása“ és PAUNCZ REZSŐ „Aromás vegyületek két-dimenziós homológ sorának vizsgálata“ című dolgozatát.
4. JÁNOSSY LAJOS r. tag bemutatja SZAMOSI GÉZA „Relativisztikus telítettségi feltétel az atommagok kötési energiájára“, GYÖRGYI GÉZA „Dirac-részecskék mozgása mezon-terekben“, FENYVES ERVIN „Önkioltó GM-csövek megszólalási valószínűsége kozmikus sugárzási részecskékre“, DÉSI SÁNDOR—NÁRAY ZSOLT „Egyes lefutású polároszcilloszkóp millimikroszekundum időtartamok mérésére“ és ZIEGLER MÁRIA—SZAMOSI GÉZA „Az α-rész relativisztikus tárgyalása“ című dolgozatát.
5. VARGA OTTÓ lev. tag bemutatja ACZÉL JÁNOS—HOSSZÚ MIKLÓS „Műveletek és többparaméteres transzformációk n-dimenziós terekben“, SOÓS GYULA „Általános differenciálgeometriai terek geomet-

* GOMBÁS PÁL r. tag távollétében HAJÓS GYÖRGY r. tag osztálytitkár mutatta be a dolgozatokat.

riai objektumairól I. (A Lie-féle derivált)" és „Általános differenciálgeometriai terek geometriai objektumairól II. (Objektumok és folytonos transzformációs csoport)" című dolgozatát.

November 25-én

1. TURÁN PÁL r. tag: „Differenciál-egyenletrendszerek megoldásának labilitásáról".
2. TURÁN PÁL r. tag bemutatja SZÜSZ PÉTER „Szekeres György egy tételéről", BIHARI IMRE „Bellmann lemmájának egyes alkalmazásairól" és SERES IVÁN „I. Schur egy problémájáról" című dolgozatát.
3. SZALAY SÁNDOR lev. tag bemutatja BUJDOSÓ ERNŐ—MEDVECZKY LÁSZLÓ „O^{16} atommag szétbomlásának megfigyelése fotoemulzióban" és BUJDOSÓ ERNŐ—MEDVECZKY LÁSZLÓ „Új módszer protonpályák kimérésére fotoemulzióban" című dolgozatát.
4. VARGA OTTÓ lev. tag bemutatja RAPCSÁK ANDRÁS „Konstans görbületű Finsler-terek egy új jellemzése" című dolgozatát.

December 16-án

1. EGERVÁRY JENŐ r. tag: „Rangcsökkentő műveletek és lineáris egyenletek megoldása véges iterációval".
2. KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag: „Közvetlen bizonyítás az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára".
3. GYULAI ZOLTÁN r. tag bemutatja MÁTRAI LÁSZLÓNÉ—SZABÓ PIROSKA „Bitumenek belső súrlódási együtthatójának meghatározása" című dolgozatát.
4. NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag bemutatja MÁTRAI TIBOR „Az inercia-rendszer kinematikai értelmezéséről" című dolgozatát.
5. DETRE LÁSZLÓ lev. tag bemutatja A. D. BONOV (Sofia) „SW Bootis főperiódusának változásáról", DETRE LÁSZLÓ—BALÁZS JULIA „SW Andromedae I. populációjú RR Lyrae-csillag Blasko-effektusáról", BALÁZS JULIA „A 1:3 kommenzurabilitás RR Lyrae-csillagok fényváltozásában", CSADA IMRE „A mágneses csillagok elmélete" és GUMAN ISTVÁN „VZ Cancri ultrarövidperiódusú Cefeida szekundér periódusai" című dolgozatát.
6. KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag bemutatja KALMÁR LÁSZLÓ—HAJNAL ANDRÁS „Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez" című dolgozatát.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1955. XII. 30. — Terjedelem: 12,50 (A/5) ív, 23 ábra.

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 55-6314 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 27,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍRE

A III. OSZTÁLY HÍREI

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VI. KÖTET 2. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

VI. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

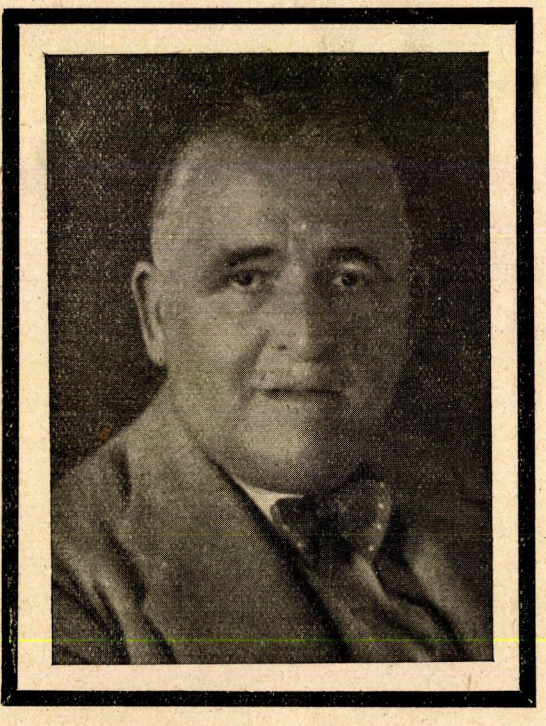
Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.



RIESZ FRIGYES 1880—1956

A magyar tudományos életet nagy gyász érte 1956. február 28-án: hosszas betegség után, 76 éves korában elhunyt RIESZ FRIGYES akadémikus. Gyászunkban a külföld tudományos világa is osztozik, hiszen RIESZ FRIGYES nemcsak a magyar matematikusok mélyen tisztelt és szeretett mestere volt, a magyar tudományos élet egyik legnagyobb büszkesége, hanem korunk egyik legnagyobb tudósa, akinek korszakalkotó tudományos eredményei az emberiség közkincsévé váltak s akinek nevét mindenütt a világon a legnagyobbaké között tartották számon.

RIESZ FRIGYES 1880. január 22-én született Győrött. Miután egyetemi tanulmányait a budapesti, zürichi és göttingai egyetemeken elvégezte, Lőcsén és Budapesten volt középiskolai tanár. 1911-ben a kolozsvári egyetem helyettes tanárnak hívta meg, 1914-ben ugyanott rendes tanár lett. A világháború után egyetemi tanári működését Szegeden folytatta. Bár akkor már világszerte ismert, vezető tudós volt, akit bizonyára szívesen fogadtak volna nem egy nagy külföldi egyetemen, nem ment külföldre, hanem inkább vállalta az újonnan felállított szegedi egyetemen való munkát, ami évekig kedvezőtlen munkakörülményeket, a könyvtár és folyóirattár hiányát jelentették számára. Hála RIESZ FRIGYES és tanártársa, HAAR ALFRÉD nagy tudományos tekintélyének és energikus munkájának, a szegedi egyetem matematikai intézete néhány éven belül igen megerősödött, ismert matematikai kutatócentrummá vált, amelyet mint magyar Göttingát kezdtek emlegetni külföldön is. Már 1922-ben megindították HAAR-ral együtt Szegeden az „Acta Scientiarum Mathematicarum" folyóiratot, amely jelentős szerepet játszott a magyar matematika nemzetközi tekintélyének a megalapozásában. A Magyar Tudományos Akadémia RIESZ FRIGYESt 1916-ban levelező, 1936-ban rendes tagjának választotta. Az 1925 26. tanévben a szegedi egyetem rektora volt. A második világháború végén Szegeden várta meg a felszabadulást s az elsők közt kezdte meg, 1944 novemberében, az egyetemen újra megindított munkát, sőt 1945 tavaszán ismét elvállalta az egyetem rektorának akkor különösen felelősségteljes és sok bölcsességet kívánó tisztét. 1945 végén a budapesti egyetem meghívta tanárai közé, így életének utolsó 10 évét Budapesten töltötte. Egymás után érték a tudományos kitüntetések: 1945-ben a Tudományos Akadémia nagydíját (ami akkor jelképes „díj" volt) neki ítélték oda, 1949-ben Kossuth-díjjal, 1953-ban a Kossuth-nagydíjjal tüntették ki, a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának elnöke, majd tiszteletbeli elnöke, a Bolyai János Matematikai Társulatnak díszelnöke lett, a párizsi Tudományos Akadémia levelező tagjává, a müncheni Bajor Tudományos Akadémia és a lundi Svéd Királyi Fiziográfiai Társaság külső tagjává választotta. A szegedi, budapesti és párizsi egyetemek díszdoktorukká választották. 1950-ben, 70-edik születésnapján, együtt ünnepelte őt a tudományos világ. A Szovjet Tudományos Akadémia díszes levélben köszöntötte s ebben az egész világ matematikusainak egyöntetű véleményét fejezte ki, amikor megállapította: „kétségtelen, hogy Ön egyike a matematikai gondolkodás legnagyobb élő mestereinek".

RIESZ FRIGYES nevével kapcsolatban a legismertebb az ún. Riesz-Fischer-tétel, amelyet egymástól függetlenül talált RIESZ FRIGYES és ERNST FISCHER német matematikus. Mintkettőjük közleménye a párisi akadémia Comptes Rendus-jében jelent meg 1907-ben, RIESZé két hónappal megelőzve a FISCHERét.

Ez a tétel a Fourier-sorokra, vagy általánosabban valamely tetszőleges teljes ortogonális függvényrendszer szerinti sorfejtésre érvényes klasszikus, ún. *Parseval-féle tételnek* a megfordítása. Utóbbi azt mondja ki, hogy ha $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ az (a, b) közön értelmezett függvényeknek egy teljes, normált, ortogonális rendszere, akkor bármely négyzetesen integrálható $f(x)$ függvénynek e rendszer szerinti $f(x) \sim \sum c_k \varphi_k(x)$ sorfejtésében fellépő $c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$

együtthatók, az ún. általánosított Fourier-együtthatók, négyzetösszege véges és egyenlő $f(x)$ négyzetintegráljával:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum c_k^2.$$

A Riesz-Fischer-tétel azt állítja, hogy fordítva, ha bárhogyképpen is adunk meg végtelen sok c_k számot úgy, hogy négyzetösszegük véges legyen, létezik egy — és lényegében csakis egy — olyan négyzetesen integrálható függvény, amelynek ezek az adott ortogonális rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói. Meg kell azonnal jegyeznünk, hogy az integrálhatóságot a Lebesgue-féle modern értelemben kell itt érteni; a klasszikus integrálfogalmakra szorítkozva, a tétel nem lenne érvényes. A „lényegében csak egy“ kitétel azt jelenti, hogy a feladat megoldásait adó függvények egymástól csak nullamértékű halmazokon különbözhetnek.

E tétel fontossága abban áll, hogy megvilágította a Lebesgue szerint négyzetesen integrálható függvények nevezetes osztályának, az ún. L_2 osztálynak belső, hogy úgy mondjuk, geometriai szerkezetét. Ha a lényegében nem különböző függvényeket ebben az osztályban azonosaknak tekintjük, egy függvény „hosszúságát“, vagy „normáját“ az $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$, két függvény „belső szorzatát“ pedig az $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ képlettel értelmezzük, akkor az L_2 függvényosztály nem csupán hasonlatos lesz a közönséges vektortérhez, hanem a Riesz-Fischer-tétel szerint azonos szerkezetű, „izomorf“ lesz a végtelen dimenziós, ún. Hilbert-féle vektortérrel; utóbbinak elemei azok a végtelen sok komponensű $X = (c_1, c_2, \ldots)$ „vektorok“, amelyek komponenseinek a négyzetösszege véges és ahol a normát és belső szorzatot a közönséges vektortér közvetlen analógiájára az

$$\|X\| = \sqrt{\sum_k c_k^2}, \qquad (X, Y) = \sum_k c_k d_k$$

képleteket értelmezzük.

Minden jogunk megvan tehát arra, hogy az L_2 függvényosztályt magát is mint egy geometriai objektumot: *függvényteret* tekintsük. E függvénytér és a Hilbert-féle vektortér közös tulajdonságaiból való elvonással alakult ki az *absztrakt Hilbert-tér* fogalma, az újabb matematika egyik leghasznosabb fogalom alkotása, amely absztrakt jellege ellenére ma már nemcsak a matematikusoknak, hanem a — kvantum-mechanikában való alapvető szerepe miatt — a fizikusoknak is mindennapi kenyerévé vált. Egyébként a kvantumelmélet eredeti — látszólag eltérő — két alakjának, a Schrödinger-féle hullámmechanikának és a Heisenberg-féle matrixmechanikának az ekvivalenciáját is éppen a Riesz-Fischer-féle tétel magyarázza meg.

RIESZ FRIGYEStől származik az L_p függvénytér fogalma is, amelynek definíciójában a kettes kitevő szerepét tetszőleges $p > 1$ kitevő veszi át; e térben a normát az $\|f\| = \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$ képlet értelmezi. A belső szorzat definíciója az L_p térre $p \neq 2$ esetében már nem vihető át, mert az L_p-be tartozó két függvény szorzata általában nem integrálható. Ezzel szemben — mint a sorokra vonatkozó Hölder-féle egyenlőtlenségnek RIESZ által integrálokra talált megfelelőjéből következik — mindig integrálható a szorzata két olyan függvénynek, f-nek és g-nek, amelyek közül f az L_p, g pedig az L_q térbe tartozik, ahol a p és q kitevőket az $1/p + 1/q = 1$ egyenlet kapcsolja össze, továbbá

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Sőt RIESZ ennek a fordítottját is bebizonyította: Ha valamely $g(x)$ függvénynek az L_p osztályba tartozó *bármely* $f(x)$ függvénnyel való szorzata integrálható, akkor $g(x)$ beletartozik a kapcsolt L_q térbe. Ha egy ilyen $g(x)$ függvényt rögzítünk, akkor az

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

szorzatintegrál az L_p térben *lineáris függvényoperáció,* azaz ha az integrálnak az értékét, mint az f függvény függvényét Af-el jelöljük, akkor $A(cf) = cAf$ bármely c számra, $(Af_1 + f_2) = Af_1 + Af_2$ és létezik olyan, az f-től független M szám (pl. a g normája), amelyre $|Af| \leqq M\|f\|$. RIESZnek sikerült megmutatnia, hogy ezek a tulajdonságok jellemzőek is, azaz hogy nincs az L_p térben értelmezett más lineáris függvényoperáció, mint amelyeket a kapcsolt L_q tér egyes rögzített $g(x)$ elemei a mondott értelemben származtatnak.

Minthogy a $p = q$ egyenlőség csupán a $p = 2$ esetében áll fenn, mindez rávilágít az L_2 tér különleges helyzetére: ez az egyetlen a tekintett terek közül, amelyik azonos a vele kapcsolt térrel.

Egy további, az L_p függvénytérre vonatkozó nevezetes eredménye RIESZnek az általánosított „momentumprobléma" megoldása. A probléma: meghatározni a $\varphi(x)$ függvényt véges, vagy végtelen sok adott $f_k(x)$ függvénynyel való szorzatintegráljának ismeretéből, azaz megoldani az

$$\int_a^b f_k(x)\varphi(x)\,dx = c_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

integrál-egyenletrendszert. Ha $f_k(x) = x^k$, akkor az integrál a $\varphi(x)$ közönséges értelemben vett k-adik momentuma. Ha az $f_k(x)$ függvények ortogonális rendszert alkotnak, akkor a probléma ugyanaz, mint amire az L_2 tér esetében a Riesz-Fischer-tétel vonatkozik: meghatározni a függvényt az adott ortogonális rendszerben való Fourier-együtthatóiból. — RIESZ megmutatta, hogy ha az adott $f_k(x)$ függvények az L_p térbe tartoznak, az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van az L_q térbe tartozó olyan $\varphi(x)$ megoldása, amelyre $\|\varphi\|_q \leqq M$, ha

$$\left|\sum \mu_k c_k\right| \leqq M \left\|\sum \mu_k f_k\right\|_p$$

tetszés szerinti μ_k együtthatók esetében. A norma jele mellé illesztett mutató jelzi, hogy egyik esetben az L_q, a másikban az L_p térben érvényes normáról van szó.

Az L_p függvénytérhez sokban hasonló tulajdonságú az az ugyancsak RIESZ által bevezetett, manapság l_p-vel jelölt tér is, amelyet az olyan végtelen sok komponensű $X = (c_1, c_2, \ldots)$ vektorok alkotnak, amelyekre a $\sum_k |c_k|^p$ sora véges összegű; itt X normáját az ebből az összegből vont p-edik gyök értelmezi. E vektorterekre vonatkozó eredményeit RIESZ a párizsi Borel-gyüjteményben 1913-ban megjelent *„Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues"* című könyvében fejtette ki.

Míg a $p = 2$ esetben a Parseval-féle és a Riesz-Fischer-féle tétel alapján a függvénytér és sorozattér lényegében azonos, ti. minden teljes, normált, ortogonális függvényrendszer a két tér egymásra való lineáris és hosszúságtartó leképezését származtatja, addig a $p \neq 2$ esetben ilyen szoros kapcsolat nem áll fenn. YOUNG és HAUSDORFF a közönséges Fourier sorra, RIESZ pedig tetszőleges korlátos ortogonális függvényrendszer esetére kimutatta, hogy a függvény és Fourier-együtthatói közt a $p = 2$ esetben fennálló Parseval-egyenlőség szerepét a $p \neq 2$ esetben bizonyos egyenlőtlenségek veszik át.

RIESZnek a függvény- és sorozatterekre vonatkozó eszméi, módszerei és eredményei felmérhetetlenül nagy és még távolról sem lezárt hatással voltak a a modern függvényanalízisre. Maga RIESZ, miközben e terekre vonatkozó vizsgálati módszereit kidolgozta, máris tovább tekintett. Erre utal az integrálható függvények rendszereiről szóló, a „Mathematische Annalen"-ben 1910-ben megjelent nagy dolgozatának előszavában az a megjegyzése, hogy e konkrét függvényterek vizsgálata használható alapot nyújt a függvényterek axiomatikus elmélete számára.

Valóban ezen az úton alakult ki, RIESZen kívül főleg HAHN, HELLY és BANACH munkája nyomán az általános lineáris metrikus terek, az un. *Banach-terek* fogalma és elmélete, a modern analízis egyik leghasznosabb fogalomalkotása. E terek fogalma általánosabb a Hilbert-térénél; utóbbit hasonló tulajdonság tünteti ki, mint amely az L_2 függvényteret kitünteti a többi L_p tér közül.

A fentieken kívül még egy másik nevezetes konkrét függvénytérre vonatkozólag is vannak RIESZnek fontos eredményei. Ez a tér az (a, b) közön értelmezett *folytonos függvények tere*; itt a normát az

$$\|f\| = \max_{(a, b)} |f(x)|,$$

képlet értelmezi. RIESZnek sikerült 1909-ben, HADAMARD egy tételének kiegészítéseképpen megmutatnia, hogy az ebben a térben értelmezett lineáris operációk általános alakja a következő:

$$Af = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

ahol $\alpha(x)$ egy az operáció által lényegében egyértelműen meghatározott korlátos változású függvény, az integrált pedig a Stieltjes-féle értelemben kell venni. Ezt az integrálfogalmat még a múlt század végén STIELTJES vezette be a lánctörtekre vonatkozó vizsgálataiban, de KÖNIG GYULA már előbb is használta előadásaiban. Azonban ennek az integrálfogalomnak — amely egyébként nem más mint a fizikában addig is többé-kevésbé heurisztikus módon használt, általános tömegelosztás szerinti integrál pontos matematikai megfogalmazása — a matematikai analízisben való hasznos szerepére igazán csak RIESZ e tételével kapcsolatban terelődött rá a közfigyelem. RIESZ tételétől indíttatva, LEBESGUEnek hamarosan sikerült a Stieltjes-féle integrálfogalmat olyan mértékben általánosítania, mint előbb a klasszikus Cauchy—Riemann-féle integrálfogalmat.

Szólnunk kell RIESZnek a *Lebesgue-féle integrállal* kapcsolatos szerepéről is. A modern analízis e korszakalkotó teóriája századunk elején keletkezett. Bár RIEMANN, JORDAN, PEANO és BOREL eszméi már előkészítették az útját LEBESGUE e nagy újításának, eleinte az analízis művelőinek a többsége bizonyos bizalmatlansággal tekintett rá. Jellemző, hogy LEBESGUEnek a párisi Comptes Rendusben 1901-ben megjelent első közleményét a „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ mindössze 3 sorban ismertette.

RIESZ az elsők közt volt, aki felismerte az új integrálfogalom jelentőségét és éppen a Riesz-Fischer-tétel által rövidesen maga szolgáltatta az új fogalom erejének egyik ékes bizonyítékát. De felismerte azt is, hogy a Lebesgue-féle elmélettel szemben megnyilvánult bizonyos idegenkedés onnan eredhet, hogy LEBESGUEnél az integrál értelmezését megelőzi a mérhető halmazok fogalma és eléggé bonyolult elmélete. Olyan, elemibbnek tekinthető felépítésmódot tűzött ki RIESZ célul maga elé, amely a mértékelmélet nélkül, közvetlenül jut el az integrálhoz.

Sikerült is már 1912-ben egy olyan felépítést megadnia, melyet később részletesen az „Acta Mathematica“-ban fejtett ki. Ebben az integrálható függvények úgy jelennek meg, mint bizonyos egyszerű függvények, ti. a szakaszonként állandó függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatainak a határértékei. Az általános mértékelmélet helyett csupán a nullamértékű halmazok fogalmára és elemi tulajdonságaira támaszkodik; ezek azonban alig vesznek egy-két sort igénybe. Később ezt a felépítésmódot is lényegesen tovább egyszerűsítette annak az észrevételnek az alapján, hogy a szakaszonként állandó függvények tetszés szerinti sorozatai helyett elegendő a monoton sorozatokat tekinteni.

LEBESGUE elméletében a differenciálásra vonatkozó tételek az integrálásra vonatkozóak után következnek, mint azok következményei. Így LEBESGUEnek az a nevezetes tétele, hogy *minden monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható,* LEBESGUEnek az integrációról 1904-ben írt alapvető könyvében csaknem az utolsó oldalon kerül szóba, mint az egész elmélet egyik utolsó következménye. RIESZnek sikerült 1932-ben erre a tételre egy közvetlen, egyszerűségben és eleganciában felülmúlhatatlan bizonyítást adnia. Ezzel együtt egy sereg egyéb fontos probléma felé nyílt egyszerűbb, közvetlen új út, sőt lehetségessé vált az is, hogy a klasszikus integrálfogalomhoz hasonlóan a Lebesgue-féle integrál is mint a differenciálás műveletének a megfordítása tárgyaltassék.

Térjünk vissza a folytonos függvények terében értelmezett lineáris operációknak RIESZ által talált előállítására egy Stieltjes-integrállal. Ennek alapján a korlátos változású függvények elemzése egyszersmind elemzése a lineáris operációknak is. Példál az a klasszikus tétel, hogy minden korlátos változású függvény két monoton növekvő függvény különbségeként állítható elő, egyszersmind az általános lineáris függvényoperációnak két pozitív lineáris függvényoperáció különbségeként való előállíthatóságát mondja ki. A korlátos változású függvény kanonikus felbontásának egy teljesen folytonos, egy folytonos és majdnem mindenütt 0 differenciálhányadossal bíró, végül egy tiszta ugrófüggvény összegére, megfelel az általános lineáris operációnak három részre való felbontása, melyet ezen az alapon FRÉCHET tanulmányozott.

RIESZ az 1928. évi bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásában rámutatott arra, hogy a folytonos függvények lineáris operációinak szóban forgó részei jellemezhetők és előállíthatók a Stieltjes-integrállal való előállítás felhasználása *nélkül* is. Módszere a *majoráns operáció* fogalmára támaszkodik. Alaptétele: *lineáris operációk bármely majorálható halmazának mindig van egy legkisebb majoránsa.* Módszerének megvan az a nagy előnye, hogy teljesen általános, úgyhogy nemcsak a folytonos függvények, hanem tetszőleges absztrakt halmazokon értelmezett függvények lineáris operációira is alkalmazható.

Abban a nagy dolgozatában, amellyel 1937-ben akadémiánkon mint rendes tag székét elfoglalta, ezeket a gondolatait fejti ki és fejleszti tovább. Még általánosabb feltevésekből indul ki, nem elégszik meg azzal, hogy a folytonos függvényeket általánosabb függvényosztállyal helyettesíti, hanem maguknak a függvényeknek a szerepét adja át absztrakt elemeknek és a függvényosztályét ezen elemek összességének, melyet csupán néhány, az elemek összeadását illető feltevéssel jellemez. E dolgozat francia nyelvű változatát később a princetoni „Annals of Mathematics", majd ennek orosz nyelvre való fordítását a moszkvai „Uszpehi Mat. Nauk" folyóiratok közölték. RIESZ e gondolatainak igen nagy hatása mutatkozik meg az irodalomban, kiindulópontjául szolgáltak az ún. *félig rendezett lineáris terekre* vonatkozó széleskörű vizsgálatoknak.

RIESZ munkásságának egy további fontos területe, amely azonban az eddig ismertetettekkel szoros kapcsolatban van, az *integrálegyenletekre* és általánosabban a *lineáris transzformációkra*, vagy más szóval: *operátorokra* vonatkozik. Számos matematikai és matematikai-fizikai probléma vezet integrálegyenlethez; a legfontosabbaknak ezek közül a következő az alakjuk:

$$f(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy=g(x),$$

ahol a $g(x)$ és a $K(x,y)$ ún. *magfüggvény* adva van, λ egy paraméter és az $f(x)$-et keressük. Az ilyen típusú egyenletekre — folytonos függvények esetében — FREDHOLM által e század elején kidolgozott elméletnek, bármenynyire hatalmas teljesítmény volt is, megvolt az a hátránya, hogy olyan segédeszközökkel dolgozott — komplikált felépítésű függvénydeterminánsokkal —, amelyek egyes részleteiben nehézkessé tették és az általánosításoknak útját állták.

RIESZnek sikerült 1916-ban egészen elemi, inkább geometriai jellegű módszert találnia, amely ugyancsak elvezet a Fredholm-féle tételekhez, de amely sokkal általánosabb feltevések mellett is használható. Nevezetesen, alkalmazható ez a módszer bármely metrikus lineáris térben adott

$$f-\lambda Tf=g$$

egyenletre, ahol a g a tér egy adott, f a keresett eleme, T pedig a térnek egy önmagába való lineáris és teljesen folytonos („vollstetig") leképezése. Egy *transzformációt* akkor mondunk lineárisnak, ha teljesülnek rá a $T(cf)=cTf$, $T(f_1+f_2)=Tf_1+Tf_2$, $\|Tf\|\leq M\|f\|$ feltételek, amelyek hasonlóak a lineáris operációkat jellemző feltételekhez, a különbség csupán az, hogy míg az operáció értéke mindig *szám*, addig a transzformáció értéke maga is a tér *eleme*. A transzformációt RIESZ szerint akkor mondjuk „teljesen folytonosnak", ha a tér bármely *korlátos* halmazát *kompakt* halmazba viszi át.

A Fredholm-féle tételeknek még egy másik bizonyítása is származik RIESZtől, amelyet 1913-ban megjelent, már említett künyvében vázolt fel. Ott csak a Hilbert-féle vektortérrel dolgozik ugyan, de módszere szintén alkalmazható tetszőleges metrikus lineáris tér esetére is. E módszer inkább függvénytani jellegű; az $[I-\lambda T]^{-1}$ „rezolvens“ transzformációnak, mint a λ komplex paraméter analitikus függvényének a szingularitásait, a T „spektrumát“, a közönséges reziduumszámításhoz hasonló eljárással vizsgálja. Bár e módszer a T transzformáció spektrumának szétbontására akkor is sikerrel alkalmazható, ha T nem teljesen folytonos, hosszú ideig némileg elkerülte a figyelmet. Később, a 30-as évek vége óta, azonban az érdeklődés előterébe került és alapvető szerepet játszik az ún. „normált gyűrűk“, vagy más szóval „Banach-algebrák“ I. M. GELFAND által felállított fontos elméletében, valamint LORCHnak, DUNFORDnak és másoknak az általános lineáris transzformációk spektrumára vonatkozó újabb kutatásaiban.

Az integrálegyenleteknek nevezetes és a fizikai alkalmazásokban is leggyakrabban előforduló esete az, amikor a $K(x, y)$ „magfüggvény“ a két változó *szimmetrikus* függvénye. Ha a magfüggvény folytonos, vagy legalábbis négyzetesen integrálható, akkor ezeknek az integrálegyenleteknek a problémája egy tetszőlegesen választott teljes ortogonális függvényrendszer közvetítésével átvihető a Hilbert-féle vektortér szimmetrikus mátrixú $Y=AX$ lineáris transzformációinak, ill. a hozzájuk rendelt $(AX, X)=\sum\limits_{i,k} a_{ik}x_i x_k$ négyzetes alakoknak a problémájába. Véges sok változó négyzetes alakjaira tudvalevőleg alapvető fontosságú tény az, hogy ezek *főtengelyre transzformálhatók*, azaz hogy egy $Z=UX$ ortogonális helyettesítéssel az $(AX, X)=\Sigma\lambda_i z_i^2$ alakra hozhatók. HILBERT kimutatta, hogy analog előállítás a végtelen sok változós esetben is megadható, mégpedig nemcsak azokban az aránylag egyszerű esetekben, amelyekhez az integrálegyenletek vezetnek, hanem tetszés szerinti olyan (AX, X) négyzetes alak esetében, amely az $\|X\| \leqq 1$ egységgömbön korlátos: $|(AX, X)| \leqq M$. Csakhogy a jobboldalon a véges összeg helyébe általában kétféle végtelen algoritmus lép: egy végtelen sor és egy folytonos paraméter szerinti integrál. Mint RIESZ megjegyezte, ez a két algoritmus egyesíthető egy Stieltjes-integrál formájában és így a Hilbert-féle felbontás a következő alakú lesz:

$$(AX, X)=\int_{-M}^{M}\lambda\, d(E_\lambda X, X).$$

Itt $E_\lambda X$ az X vektor merőleges vetületét jelenti a Hilbert-tér egy bizonyos L_λ alterére, mely a λ paraméterrel együtt nő.

Ezt az alapvető tételt HILBERT a véges változó esetéből fáradságos határátmenettel bizonyította. RIESZ 1910-ben, egy HILBERThez írott levelében olyan bizonyítást közölt rá, amely a momentumproblémának általa éppen akkor talált megoldására épül fel. Majd könyvében egy újabb, közvetlen bizonyítást adott. Módszerének lényege az, hogy a négyzetes alak helyett magát az A lineáris transzformációt és ennek hatványait tekinti: $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA, \ldots, A^n = AA^{n-1}, \ldots$, ezeket rendre hozzárendeli az $u^0 = 1, u, u^2, \ldots, u^n, \ldots$ hatványfüggvényekhez, majd a hozzárendelést kiterjeszti a polinomokra és határátmenettel általánosabb függvényekre is; a tételben szereplő E_λ vetítés eközben úgy adódik, mint u azon függvényéhez rendelt transzformáció, amely az $u = \lambda$ ponttól balra 1, jobbra pedig 0.

Amikor később, a 20-as évek végén, a kvantummechanika ösztönzésére a Hilbert-tér vizsgálata főleg hazánkfia, NEUMANN JÁNOS kezdeményezésére újabb nagy lendületet vett, és a nem korlátos, azaz az $\|Af\| \leqq M\|f\|$ feltételnek eleget nem tevő transzformációkat is vizsgálat alá vették, a kutatók bőven meríthettek RIESZ könyvének gondolataiból. Az amerikai STONE, az új eredményekről 1932-ben írt hatalmas monográfiájának előszavában ezt írja: „Szeretném hangsúlyozni azt a fontos szerepet, amelyet RIESZ FRIGYES munkássága játszott a nemkorlátos transzformációk sikeres vizsgálatának előkészítésében. Azok a fogalmak, amelyeket RIESZ könyvében kifejtett, új szempontoknak és új módszereknek a bevezetését jelölték ki, amelyek nélkül a haladás bizonyára csak később következett volna be."

De RIESZ nem elégedett meg az új fejlődés iránymutatójának dicsőségével, hanem újabb dolgozataival maga is jelentékeny szerepet játszott ebben a fejlődésben. 1930-ban a szegedi Actában, a Hilbert-térről szóló nagy dolgozatában új bizonyítását adja a *nem-korlátos,* ún. *önadjungált* transzformációk NEUMANN és STONE által kevéssel előbb talált integrálelőállításának. Később LORCH amerikai matematikussal együtt, aki egy évet töltött RIESZnél Szegeden, még két egyszerűbb bizonyítást adott erre a központi fontosságú tételre.

Mindama munkássága alapján, amelyről eddig szó volt, RIESZ FRIGYESt a matematika egy új ágának, az ún. *funkcionálanalízisnek* az egyik megalapítójaként tekintik. Ez a tudományág ma a legnagyobb lendülettel fejlődik, új szempontokkal és módszerekkel gazdagította a matematika egyéb ágait is, s alkalmazási lehetőségei a matematika és a matematikai fizika különböző területeire még távolról sincsenek kimerítve.

Az egyik legérdekesebb, a funkcionálanalízis módszereivel megközelíthető probléma a klasszikus statisztikai mechanika ún. *ergodproblémája.* Amióta NEUMANN JÁNOS és G. D. BIRKHOFF a 30-as évek elején híres tételeikkel e probléma szigorú, matematikai tárgyalásának alapjait lerakták, az „ergodelmélet" állandóan az érdeklődés előterében áll s a mély és jelentős problémák és eredmények egész során át fejlődött. Ezzel az elmélettel RIESZ FRIGYES is behatóan foglalkozott. Az eredetileg nehézkes bizonyításokat új módszerek alkalmazásával lényegesen egyszerűsítette. Érdekes megemlíteni, hogy a Birkhoff-féle, ún. individuális ergodikus tételnek, valamint a HOPF, DUNFORD és MILLER által talált általánosabb tételeknek a bizonyítására RIESZ lényegében ugyanazt az egészen elemi lemmáját használja fel, amellyel annak idején a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságát sikerült bizonyítania. A Neumann-féle, ún. statisztikus ergodikus tételre, amely az L_2 függvénytér önmagára való *távolságtartó* lineáris leképezéseire vonatkozik, olyan bizonyítást talált, amely az L_p, sőt még általánosabb lineáris terekre és ezek *kontrakcióira*, azaz a távolságot nem növelő lineáris leképezéseire is alkalmazható.

RIESZ FRIGYESnek a valós függvények elméletébe és a funkcionálanalízisbe vágó legjelentősebb eredményeit, valamint azokhoz csatlakozó újabb eredményeket tartalmaz az a könyv, amelyet RIESZ FRIGYES élete alkonyán írt e sorok írójával, tanítványával közösen, *„Leçons d'Analyse Fonctionnelle“* címen. Ez a könyv 1952-ben jelent meg először a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában és azóta világszerte nagy sikert aratott. Az első kiadást két újabb francia nyelvű kiadás követte, kiadták a Szovjetunióban orosz és az Egyesült Államokban angol nyelven, német és kínai nyelvű kiadásai pedig Berlinben, ill. Pekingben most készülnek.

Vessünk tekintetet most RIESZ FRIGYESnek azokra a munkáira, amelyekben nem az *általános* folytonos, vagy integrálható függvényekről van szó, hanem amelyekben szabályosabb, *analitikus, harmonikus* stb. függvényeket vizsgál.

1916-ban akadémiai levelező tagként tartott székfoglaló előadásában egy érdekes szélsőértékfeladatot old meg a komplex sík egységkörében konvergens, *adott tagokkal kezdődő hatványsorokra,* ti. meghatározza ezek közül azt, amelynek az összegfüggvénye az egységkör kerületét a lehető legrövidebb görbére képezi le. Módszerét alkalmazza CARATHÉODORYnak és FEJÉRnek egy másik, ugyancsak az adott tagokkal kezdődő hatványsorokra vonatkozó tételének a bizonyítására is.

RIESZ és FEJÉR együtt találták *a konform leképezés alaptételének* legegyszerűbb bizonyítását, amely azóta a tankönyvirodalomban mint „standard“ bizonyítás szerepel. Együttes munkájuk számos értékes egyéb gyümölcse közül ragadjuk ki a következő érdekes tételt: *Ha egy kört konformisan leképezünk egy h hosszúságú görbével határolt tartományra, akkor a kör bármelyik átmérőjének a képe legfeljebb h/2 hosszúságú görbevonal lesz.* — Ennek a tételnek a tekintélyes irodalmi visszhangja támadt, maga RIESZ is visszatért még-egyszer a problémára és a tételt általánosította tetszőleges — valós- vagy komplexértékű — kétváltozós harmonikus függvényekre.

Az 1916. évi stockholmi skandináv matematikai kongresszuson fivérével, RIESZ MARCELlal együtt tartott előadásában az *analitikus függvényeknek a* *kerületi értékeivel* foglalkozott. Ismeretes volt már 1906 óta FATOU klasszikus disszertációjának az a tétele, hogy ha $f(z)$ a komplex sík egy körtartományának a belsejében holomorf és korlátos függvény, akkor a kör kerületének majdnem minden pontjában létezik a függvény határértéke. A RIESZ-fivérek ugyanezt a kör helyett tetszés szerinti rektifikálható görbe által határolt tartományra is kimutatták, sőt azt is bebizonyították, hogy — ha csak a függvény nem identikusan zérussal egyenlő — a kerületi értékei is majdnem mindenütt különböznek 0-tól. A korlátosság feltevése is enyhíthető; ha pl. a $|z| < R$ körtartományról van szó, akkor elég ha a koncentrikus $r < R$ sugarú körökön vett

$$M_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi$$

integrálközepek valamilyen $p > 1$ kitevő esetében az r-től független korlát alatt maradnak.

Az utóbbi feltételnek eleget tevő függvények osztályát HARDYról szokás H_p osztálynak nevezni. RIESZ FRIGYES kimutatta, hogy a H_p osztály a körben korlátos holomorf függvények osztályával abban a kapcsolatban áll, hogy *minden H_p-beli függvény felbontható egy a körben holomorf korlátos függvénynek és egy olyan H_p-beli függvénynek a szorzatára, amelynek a kör belsejében nincs zérus helye.* E felbontási tételnek egyik haszna az, hogy általa az összes H_p osztály vizsgálatát vissza lehet vezetni a legjobban kezelhető H_2 osztályéra.

Térjünk vissza a $|z| < R$ körben holomorf $f(z)$ függvény $M_p(r)$ integrálközepeire, mert ezek vizsgálata közben jutott el RIESZ egyik legfontosabb felfedezéséhez, a *szubharmonikus függvények* fogalmához és elméletéhez. Az $M_p(r)$ középről HARDY 1915-ben bebizonyította, hogy az r sugár növekvő függvénye és hogy $M_p(r)$ logaritmusa r logaritmusának konvex függvénye. — RIESZ, Hardy tételének mélyebb oka után kutatva, meglátta, hogy ez az ok abban rejlik, hogy ha $f(z)$ a komplex $z = x + iy$ változó analitikus függvénye, akkor a

$$g(x, y) = |f(x + iy)|$$

függvény az x, y sík megfelelő tartományában szubharmonikus. Ezen RIESZ azt érti, hogy *ha egy $h(x, y)$ harmonikus függvény nagyobb $g(x, y)$-nál valamely résztartomány határán, akkor nagyobb a belsejében is.* Ez a fogalom akárhány változó esetére ugyanígy értelmezhető; egy dimenzió esetében a harmonikus függvények a lineárisak révén, a szubharmonikus függvények fogalma a konvex függvényekére redukálódik. RIESZ nem állt meg az említett észrevételnél, azaz a Hardy-féle tételnek szubharmonikus függvényekre való általánosításánál, hanem mélyen behatolt e függvények analízisébe s a komplex-változós függvénytan, valamint a potenciálelmélet különböző problémáira való alkalmazásaiba. A potenciálelmélettel való kapcsolatot az adja, hogy *minden negativ tömegeloszlás potenciálja szubharmonikus és hogy ennek a megfordítottja is lényegében igaz.* RIESZnek ez az igen mély tétele a potenciálelmélet fejlődésének hatalmas új perspektíváit nyitotta meg. Éltek és állandóan élnek is nagy számmal a kutatók ezekkel a lehetőségekkel, s 1924 óta, mióta RIESZ első idevágó közleménye megjelent, rohamos fejlődésnek vagyunk a tanúi. RADÓ TIBOR, RIESZnek Szegeden volt kiváló asszisztense és munkatársa, már 1937-ben egy teljes Ergebnisse-füzetben számolhatott be a Riesz-féle ideákról és a hozzájuk kapcsolódó nagyszámú és fontos eredményről. Azóta ezek az eredmények megsokszorozódtak.

Mindabból, amit Riesz Frigyes munkásságáról eddig mondottunk, kitűnik, hogy ő elsősorban a matematikai analízisnek volt a mesteri kutatója, mégpedig mind a „klasszikus analízis"-nek, mind pedig a „funkcionálanalízis"-nek. De nemcsak az analízis területén alkotott maradandót, hanem a geometria területén is, közelebbről a topologikus tér fogalmának a kialakításával. A határérték és a folytonosság alapvető topológiai fogalmai axiomatikus tanulmányozásának útjára elsőként FRÉCHET francia matematikus és RIESZ FRIGYES léptek, kb. ugyanabban az időben, 1906 körül. FRÉCHET olyan, manapság a matematikában közkeletű, alapvető fogalmakat vezetett be, mint a metrikus tér, a kompaktság és a teljesség fogalmai, és számos kísérletet tett arra nézve, hogy axiomatikus utat találjon az alapvető topológiai relációkhoz (határpont, folytonosság) közvetlen úton, elkerülve a távolság fogalmát, ezek a kísérletei azonban nem tekinthetők sikerültnek. Ezzel szemben RIESZ, az 1908-ban tartott római nemzetközi matematikai kongresszuson megfogalmazza a topologikus tér axiómáit, közvetlenül axiomatizálva a határpont fogalmát és ilyen módon eljut a topologikus terek azon osztályához, amely a T_1-terek osztálya elnevezés alatt a mai topológiában végleges helyet foglalt el. Így tehát a *topologikus tér* fogalma első sikeres bevezetését a tudomány RIESZ FRIGYESnek köszönheti.*

RIESZ FRIGYES egyetemi rektori székfoglaló beszédében, 1925-ben, amelyet „Elemi módszerek a felsőbb mathematikában" címmel tartott, a felsőbb matematikából vett példákon mutatta be, hogy a tudományban a „felsőbb", a „bonyolult", a „nehéz" nem állandó érvényű jelzők, és ami ma még ilyen, az holnap már „elemivé", „egyszerűvé", „könnyűvé" válhat. RIESZ FRIGYES matematikai munkásságát éppen az jellemzi, hogy mindig a legalapvetőbb, központi jelentőségű kérdésekre összpontosította a figyelmét, a lényeget ragadta

* V. ö. P. Sz. ALEKSZANDROV, A tér fogalmáról a topológiában, A MTA III. Osztályának Közleményei, 3 (1953), 173—188.

meg, s ez úton sikerült neki a legbonyolultabb kérdéseket is egyszerűvé tennie és páratlanul áttekinthető és világos módon tárgyalnia. Dolgozatai nemcsak a tartalmukra nézve gazdagok, hanem formai tekintetben is remekművek.

RIESZ FRIGYES nincs már közöttünk. A nagy tudós, az öntudatos magyar hazafi elhunyta felett érzett gyászunkban az vigasztal, hogy élete, munkássága páratlanul gyümölcsöző volt, a tudomány és hazánk büszkeségére. Neve alkotásaiban hosszú századokon át változatlan fényben fenn fog maradni.

Szőkefalvi-Nagy Béla r. tag

NYIKOLAJ IVANOVICS LOBACSEVSZKIJ

(1792—1856)

Száz esztendővel ezelőtt hunyt el NYIKOLAJ IVANOVICS LOBACSEVSZKIJ, a XIX. század egyik legnagyobb matematikusa. A geometriai gondolkodást forradalmasító felfedezése fordulópontot jelent a matematika legújabbkori fejlődésében. Elsőként közölte a nem-euklideszi geometria alapvető kidolgozását; elsőként fordult szembe kortársainak ama megkövesedett felfogásával, mely a tér és az idő kanti apriorisztikus felfogásában fejeződött ki legélesebben. Egész életén át szilárd meggyőződéssel hirdette az általa felismert igazságot: a valóságos világ térviszonyainak a tükrözésére nem az euklideszi rendszer az egyetlen lehetséges forma; a térnek szemléleti módunktól független, reális jelentősége van; a tér euklideszi fogalma nem velünk született fogalom. Midőn megemlékezünk LOBACSEVSZKIJ zseniális alkotásáról, az igazságért küzdő tudóst is ünnepeljük, a haladásért harcoló hősöket megillető mélységes tisztelettel.

A LOBACSEVSZKIJről szóló életrajzok alapos tanulmányozása során az a meggyőződésünk támad, hogy ha egyetlen önálló matematikai felfedezéssel sem gazdagította volna a tudományt, az utókor akkor is rendkívüli szellemű, hatalmas tevékenységű, nagy ember iránti tisztelettel emlékezhetne meg róla. Kortársai is kiváló embernek tartották, megbecsülték, tisztelték, szerették. Mégis a szellemi elszigeteltség, a meg nem értés fojtó légköre nehezedett reá, s brutális támadások is érték, midőn forradalmi felfedezése által kora uralkodó eszméivel került összeütközésbe. Kortársai, barátai a nagy műveltségű, tudományos képzettségével kimagasló, igényes és kiváló professzort látták csak meg benne. Szervező ereje, hihetetlenül sokoldalú, maradandó alkotásokat létrehozó tevékenysége barátainak és ellenségeinek elismerését egyaránt kivívta. Ámde korszakalkotó felfedezését — LOBACSEVSZKIJ tudomása szerint — csak egyetlen ember, GAUSS méltányolta. GAUSS levélben fejezte ki őszinte elismerését és nagyrabecsülését, s egyben arról értesítette, hogy az ő javaslatára, a Göttingeni Tudós Társaság LOBACSEVSZKIJt levelező tagjává választotta.

Az életrajzi tanulmányok alapján az a másik tény ragadja meg a figyelmünket, hogy LOBACSEVSZKIJ alkotó tevékenységének van egy koncentráltságánál fogva is kiemelkedő, eredményekben legjelentősebb évtizede — jóllehet a sokféle, sokoldalú, szakadatlan munka egész életének jellemző vonása volt —. Az 1819—1829-ig terjedő időszakról van szó. Ez az időszak azzal kezdődött, hogy professzori teendőinek ellátása mellett megbízták a kazáni egyetem elhanyagolt könyvtárának rendbeszedésével. Csaknem egyidejűleg dékánná is megválasztották. Majd a kazáni egyetem építkezéseit irányította, tervezte, vezette. 1827-től fogva pedig két évtizeden át, a kazáni egyetem rektoraként fejtett ki nagyszerű tevékenységet. A kazáni egyetem fejlődésében ez a két évtized kiemelkedő periódus volt. A sokféle teendővel zsúfolt 1819—1829-ig terjedő időszakot tekintve, el sem tudjuk képzelni, mikor jutott ideje tudományos munkára. (1823-ban például a következő funkciók nehezednek reá: könyvtáros, dékán, építkezési bizottság tagja, könyvkiadó bizottság tagja, stb.) S minden reá bízott feladatot megold, minden munkáját odaadással végzi. Hatalmas alkotó erejét bizonyítja az a tény is, hogy éppen ebben az időt és erőt emésztő zsúfolt periódusban alkotta meg a nem-euklideszi geometriát. Az 1826—1829-ig terjedő időszakban bontakoztak ki eszméi egész teljességükben. Ebben az időszakban dolgozta ki és írta meg korszakot alkotó művét, mely 1829-ben jelent meg „A geometria alapjairól“ címen. Ebben a művében már lényegében véve mindannak az alapvetését, a magvát megírta, ami későbbi műveiben részletesebb kifejtésben, finomabb kidolgozásban, kiegészített teljességében szerepel.

Áttérve LOBACSEVSZKIJ munkásságának méltatására, azon kezdjük, hogy a geometrián kívül is jelentékeny új eredményeket ért el. (Például a komplex számok és a trigonometrikus sorok elméletében, a valószínűségszámításban, stb.) Az alapvető kérdések tisztázására való hajlama a matematika más ágaiban is megmutatkozott. Geometriai művei azonban mind jelentőségük, mind pedig tartalmi gazdagságuk tekintetében felülmúlják egyéb műveit. Nem is térünk itt ki LOBACSEVSZKIJ más műveinek méltatására, csupán a nem-euklideszi geometria felfedezését és LOBACSEVSZKIJ műveiben elénk tárt kidolgozását értékeljük.

Valamely matematikai mű értékét másként, más szempontokból ítélik meg a kortársak, mint az utókor. Az értékelésbe nyilvánvalóan belejátszik az, hogy a tudomány az értékelés pillanatában a fejlődés milyen fokáig jutott. LOBACSEVSZKIJ művének értékét jellemzi, hogy éppen az idő nagy távlatából tekintve mérhető fel teljes nagyságában.

A XIX. század elején a geometriát a matematika alárendelt jelentőségű ágának, a matematikai analízis egyik alkalmazási területének tekintették. A DESCARTES által megalkotott koordinátageometria továbbfejlődése során úgy látszott, hogy az összes geometriai fogalmak, tételek — a koordináták segítségével — az algebra és a differenciál- és integrálszámítás fogalmainak, illetve tételeinek feleltethetők meg, és viszont. Így a geometria eltűnt, felszívták a matematika mondott, rohamosan fejlődő fejezetei. Hosszú időre elterelődött a figyelem a tulajdonképpeni geometriai problémákról. Az euklideszi felfogásra épült koordinátageometria a newtoni világképnek megfelelő fizikai tér vizsgálatára nagyszerű eszköznek bizonyult. Senki sem várta a geometria más irányban való fejlődését. Sem a matematika továbbfejlesztése, sem a gyakorlat szempontjából nem látszott már érdekesnek az a (még mindig megoldatlan) kérdés, levezethető-e a párhuzamossági axióma a többiekből.

Annál szembetűnőbb, hogy a XVIII. század végétől fogva meglepően elszaporodtak a bizonyítási kísérletek. Számottevő matematikusok közül is sokan megkísérelték a párhuzamossági axióma bizonyítását. — Például: CARNOT, D'ALAMBERT, FOURIER, LAGRANGE, LAMBERT, LAPLACE, LEGENDRE. — A régi probléma iránti érdeklődés megújulásának okát azonban a geometrián kívül kell keresnünk. A kanti filozófiának volt e bizonyításra szüksége.

KANT a térre vonatkozó megállapításait a geometriára való hivatkozással próbálta alátámasztani. Szerinte a geometria a tapasztalattól független; axiómái a gondolkodás egyedül lehetséges, megmásíthatatlan törvényei. A kanti filozófiát elfogadó és a vele szemben álló matematikusok egyetértettek abban, hogy párhuzamossági axióma igaz voltát nem lehet a tapasztalattól függetlenül belátni. Ez volt a kanti filozófia sebezhető pontja, melyet a szembenállók támadhattak. Védelmezői azt hitték, ha ezt a kellemetlen axiómát a többi axiómából (amelyek „a tapasztalattól függetlenek") le tudják vezetni, akkor mindenkit meggyőzhetnek az egész geometria tapasztalattól független voltáról, s a kanti filozófiának nem lesz többé sebezhető pontja.

LOBACSEVSZKIJ kitűnő matematikai képzettségén kívül alapos filozófiai tájékozottsággal is rendelkezett. Jól ismerte KANT filozófiai rendszerét, a kanti filozófia körül zajló vitákat és az ezzel összefüggő, a geometria alapjaira vonatkozó kutatásokat, főként LEGENDRE bizonyítási kísérleteit. LOBACSEVSZKIJ képzett csillagász, fizikus, e tudományok aktív művelője. Az empirikus természettudományok iránti élénk és széleskörű érdeklődését az is mutatja, hogy gyakran végzett csillagászati megfigyeléseket, fizikai, kémiai, agronómiai kísérleteket.

A mondottak valószínűsítik azt, hogy a geometria alapvető kérdéseire irányuló érdeklődése, filozófiai kérdésekkel való foglalkozása közben ébredt, és materialista felfogása a természettudományokkal való állandó foglalkozása következtében mélyült el. Midőn LOBACSEVSZKIJ nagyobb szabású önálló munkásságát elkezdte — 1823-ra gondolunk —, már világosan látta, hogy a párhuzamossági posztulátum bizonyítására vonatkozó kísérletek, meddő erőfeszítések, s másként kell a problémának nekivágni. Arra az elhatározásra jutott, hogy java erejét e probléma tisztázására összpontosítja.

1826-ban már látta, hogy a párhuzamosság euklideszi posztulátumát tagadó feltevésre is egy logikai ellentmondás nélkül való geometria építhető fel. Ezt az új geometriát főbb vonalaiban 1829-re kidolgozta és megírta. Akkor már világosan látta, hogy az euklideszi és a nem-euklideszi geometria logikailag egyaránt lehetséges. A matematika szempontjából pedig csakis ez a lényeges. A matematikát azonban az objektív valóság megismerésének a szolgálatára konstruált eszköznek tekintette, következésképpen szükségesnek tartotta annak az eldöntését is, hogy a valóságot a két geometria melyike tükrözi hívebben. Ennek a kérdésnek az eldöntését nagy pontosságú csillagászati mérések tapasztalataitól várta. LOBACSEVSZKIJ érdemét nem kisebbíti az a tény, hogy a végrehajtott mérések nem jártak — s nem is járhattak — a várt eredménnyel.

LOBACSEVSZKIJ a nem-euklideszi geometria felfedezésének filozófiai konzekvenciáit is sietett levonni. Meggyőződéssel hirdette: „Bármely tudománynak világos és lehetőleg kevés számú alapfogalomra kell épülnie. Csak így szolgálhatnak az elmélet biztos és elegendő alapjául. Az ilyen fogalmakat érzékeinkkel szerezzük meg, velünk született fogalmakban ne higyjünk."

A nem-euklideszi geometriáról írt későbbi műveiben részletesebben kidolgozta a hiperbolikus tér trigonometriáját, koordinátageometriáját, differenciálgeometriáját. Ebben a munkában a következő törekvések irányították. Kereste azokat a matematikai eszközöket, amelyek szükségesnek látszottak a fizikai tér euklideszi vagy nem-euklideszi mivoltának tapasztalati úton való megállapításához. Igyekezett matematikus kortársainak megmutatni, hogy a hiperbolikus tér geometriája harmonikusan beleilleszkedik a matematika egészébe, akárcsak az euklideszi geometria; a hiperbolikus geometria azonban tartalomban gazdagabb, az euklideszi geometria összefüggései pedig (a hiperbolikus térben) „végtelen kicsinyben" érvényesek.

A hiperbolikus geometria ellentmondástalanságának szubjektív bizonyosságát úgy igyekezett olvasóiban fölkelteni, hogy bizonyos határozott integrálok értékét nem-euklideszi geometriára támaszkodó meggondolásokkal is, valamint a megszokott analitikus eljárással is meghatározta. A két eredmény minden ilyen feladat esetében megegyezik. Sok határozott integrál értékét határozta meg ezen az úton. (Különösképpen olyanokat, amelyekben hiperbolikus függvények szerepelnek.)

Mindazt, amit eddig LOBACSEVSZKIJ művére vonatkozólag mondottunk, kortársai is megállapíthatták volna, de se nem ismerték, csupán tudomásuk volt róla, se nem értették meg, csak kifogásolták. Abban azonban egyetértettek, hogy LOBACSEVSZKIJ műve kora uralkodó eszméit támadja, ezért durván ledorongolták, félreállították.

Miután LOBACSEVSZKIJ művét világszerte megismerték és megértették, a matematikai gondolkodás gyökeres átalakulása, a matematikai érdeklődés középpontjának más és új kérdéskörök felé való eltolódása, a kutatások tendenciájának megváltozása következett be. Még felvázolni is nehéz, milyen általános, mélyreható és szerteágazó hatást váltott ki LOBACSEVSZKIJ alkotásainak megismerése.

Az első nem-euklideszi geometria felfedezése és kidolgozása megindította a matematikai térfogalom rohamos fejlődését. Ezzel együtt járt a geometriák — mai értelemben vett — axiomatikus felépítésére vonatkozó vizsgálatok kibontakozása, az axiomatikus módszer kifejlődése az egész matematikában, sőt a fizikában is. A nem-euklideszi geometriával kapcsolatban merült föl először a modellalkotás gondolata, az axiómarendszer ellentmondástalanságának és teljességének problémája. A matematika egyes ágainak új irányba fordult a fejlődése (projektív geometria, differenciálgeometria), új ágak keletkeztek.

A geometriai módszerek behatolnak a matematika legkülönfélébb fejezeteibe, olyan területekre, melyek a geometria régi határaitól távol estek. (Ennek a benyomulásnak speciális és igen korai esete volt a hiperbolikus geometria komplex függvénytanban való termékeny alkalmazása.)

A geometriáról alkotott új felfogás közvetve, vagy közvetlen befolyással volt a fizika fejlődésére is, és a geometria új eredményeit a fizika gyakran hasznosította. A LORENZ-transzformációkat például a hiperbolikus tér mozgásai gyanánt is felfoghatjuk. A gravitációs és elektromágneses mezők modern fizikája szorosan kapcsolódik a differenciálgeometriához. EINSTEIN az általános relativitás-elmélet megalkotásánál a differenciálgeometria akkor legújabb módszereit és eredményeit nagy mértékben kiaknázta.

Elmondhatjuk tehát, hogy nem sok olyan matematikai művet mutathat fel a világ, mely oly mélyen, oly széles területen és oly hosszú időn át hatott volna a matematika fejlődésére, mint LOBACSEVSZKIJ műve.

Kárteszi Ferenc
a matematikai tudományok kandidátusa

A POINCARÉ-FÉLE FÉLSÍK ÉS A HIPERBOLIKUS SÍKGEOMETRIA KAPCSOLATÁRÓL *

SZÁSZ PÁL

Bevezetés

Tekintsünk valamely *euklideszi síkot,* vagyis a *pontoknak* és *egyeneseknek* olyan rendszerét, amelyben az illeszkedés vagy összetartozás, a rendezés és az egybevágóság HILBERT-féle síkbeli axiómái [1] mellett teljesül az euklideszi párhuzamossági axióma. A folytonossági axiómákat mellőzni kívánva, tegyük még fel, hogy ez euklideszi síkon a *köraxióma* is érvényes: ha P a k körön belül, Q pedig azon kívül fekvő pont, akkor a P és Q pontokon átmenő bármely kör metszi a k kört [2]. Ebből már következik [3], hogy a kör valamely belső pontján átmenő egyenes két pontban metszi a kört. Ezen az euklideszi síkon a *hiperbolikus síkgeometriát* H. POINCARÉ [4] nyomán következőképp valósíthatjuk meg.

Vegyünk fel valamely a egyenest, mint *alapegyenest.* Az ezen egyenes által meghatározott két félsík egyikének belső pontjait nevezzük *pszeudopontoknak,* az e félsíkban fekvő és az a alapegyenesre merőleges félköröket és félegyeneseket (röviden *ortogonális félköröket* és *ortogonális félegyeneseket*) *pszeudoegyeneseknek,* természetesen nem számítva ezekhez az a-ra eső végpontjaikat. Ha a P_1 és P_2 pszeudopontok nem ortogonális félegyenesen feküsznek, akkor a rajtuk átmenő ortogonális félkör $\widehat{P_1P_2}$ ívét, ellenkező esetben a P_1P_2 egyenesdarabot nevezzük *pszeudoegyenesdarabnak.* Ennek *karakterisztikája* legyen az első esetben a

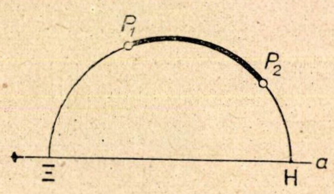
$$(\Xi \mathrm{H} P_2P_1)=\frac{\Xi P_2}{P_2\mathrm{H}}:\frac{\Xi P_1}{P_1\mathrm{H}}$$

kettősviszony, ahol Ξ és H a P_1 és P_2 pontokon átmenő ortogonális félkör végpontjai, úgy jelölve, hogy P_2 e $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ félkörön a P_1 és H között van (1 ábra). A második esetben a *karakterisztika* legyen a

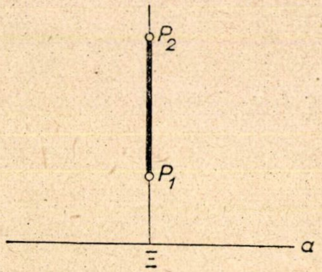
$$(\Xi P_2P_1)=\frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}$$

* Német nyelvű lényegesen más változata: Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, Acta Math. Hung. 4 (1953) 243—250.

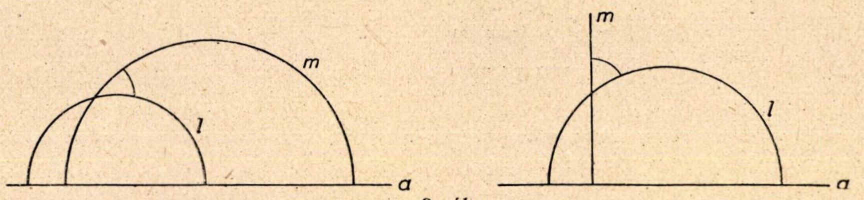
osztóviszony, ahol Ξ a P_1 és P_2-t tartalmazó ortogonális félegyegyenes kezdőpontja s jelölésünkben P_1 a Ξ és P_2 közé esik (2. ábra). Két pszeudoegyenesdarabot nevezzünk *pszeudokongruensnek* vagy *pszeudoegyenlőnek*, ha a karakterisztikáik egyenlők. Ezzel szemben az l, m pszeudoegyenesek *pszeudoszöge* az ezeket képező ortogonális félkörök (esetleg ortogonális félkör és ortogonális félegyenes) szögével legyen karakterizálva (3. ábra) s egyenlő karakterisztikájú pszeudoszögeket nevezzünk *pszeudokongruenseknek* (*pszeudoegyenlőknek*). Meggyőződhetünk, hogy ezen megállapodásokkal értelmezett *pszeudogeometri-*



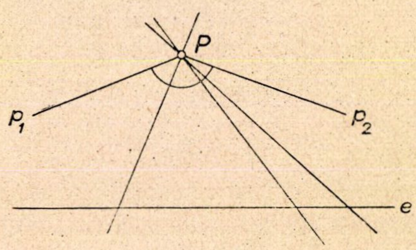
1. ábra



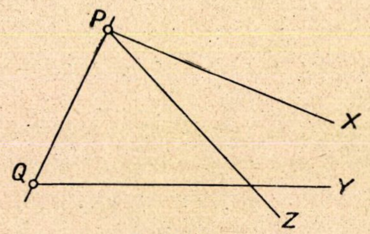
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

ában vagy *képgeometriában* a hiperbolikus síkgeometria D. HILBERT [5] által felvett axiómarendszere (amely a folytonossági axiómákat kirekeszti) teljesül. Vagyis e pszeudogeometriában az illeszkedés (összetartozás), a rendezés és az egybevágóság I—III axiómacsoportjai mellett érvényes a következő *hiperbolikus paralelaxióma:*

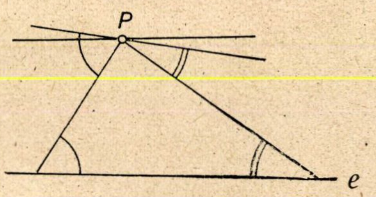
IV. *Ha e tetszőleges egyenes és P valamely rajta kívül fekvő pont, akkor a P-n átmenő és e-t metsző egyenesek bizonyos* $(p_1, p_2)\sphericalangle$ *közbülső egyeneseit alkotják* (4. ábra). E $(p_1, p_2)\sphericalangle$ szárai, amelyek tehát már nem metszik e-t, a P pontból az e egyeneshez húzott *elpattanó egyenesek* vagy *hiperbolikus paraleláki*.

Megjegyezzük itt, hogy e IV hiperbolikus paralelaxióma kevesebb feltevéssel is pótolható, amely az alábbi két axiómában nyer kifejezést.

IV_1. *Legyen P és Q két különböző pont a síkon s QY valamely félegyenes a PQ egyenes egyik oldalán. Akkor mindig van PQ ugyanezen oldalán olyan PX félegyenes, amely QY-t nem metszi, míg a* $QPX_\sphericalangle$ *minden közbülső PZ félegyenese metszi a QY félegyenest* (5. ábra).

IV_2. *Van olyan* e_0 *egyenes és azon kívüli* P_0 *pont a síkban, hogy* P_0*-on át nemcsak egy olyan egyenes fektethető, amely* e_0*-t nem metszi.*

Ugyanis a IV_1 axiómából következik [6], hogy ha a QY félegyenesen $\overset{\frown}{QR} \to +\infty$, akkor $QRP_\sphericalangle \to 0$ s ennek felhasználásával IV_2-ből folyik, hogy az e_0 egyenesen az A és B pontok úgy választhatók, hogy az ABP_0 háromszög szögösszege kisebb két derékszögnél. Ebből ismert módon következik [7], hogy minden háromszög szögeinek összege kisebb két derékszögnél. Ennek folytán bármely e egyenes és azon kívüli P pont esetében fektethető P-n át két olyan egyenes, amely e-t nem metszi (6. ábra) s ebből a IV_1 axióma alapján következik a IV axióma.



6. ábra

Az euklideszi sík felső félsíkján a fenti megállapodásokkal értelmezett POINCARÉ-féle képgeometriát (pszeudogeometriát) röviden POINCARÉ-*féle félsíknak* nevezzük. Ez a mondottak szerint a hiperbolikus síkgeometriának egy megvalósítása vagy *modellje*, tehát e geometriának minden tétele érvényes a POINCARÉ-féle félsíkon. Kérdés azonban, hogy áll-e ez megfordítva is, a POINCARÉ-féle félsíknak minden tétele érvényes-e a hiperbolikus síkon? Vagyis a POINCARÉ-féle félsík egyszersmind ekvivalens-e az axiomatikusan értelmezett hiperbolikus síkgeometriával, függetlenül a folytonosságtól?

KERÉKJÁRTÓ BÉLA [8] igenlő választ adott erre az alapvető kérdésre. Nevezetesen az axiómáival definiált hiperbolikus síkgeometriából kiindulva, magán a hiperbolikus síkon (azt duplán számítva) felépített egy képgeometriát, amelyről igazolta, hogy az euklideszi síkgeometria modellje, s azután megmutatta, hogy az eredetileg adott hiperbolikus sík ez euklideszi síknak POINCARÉ-féle félsíkja. Ezzel sokkal többet is bebizonyított a hiperbolikus sík és a POINCARÉ-féle félsík ekvivalenciájánál, kimutatta, hogy a hiperbolikus sík egyenesen *megegyező* bizonyos euklideszi sík POINCARÉ-féle félsíkjával.

Az alábbiakban a fenti kérdésre sokkal egyszerűbb bizonyítás árán adunk igenlő választ. Vagyis az euklideszi sík felső félsíkján értelmezett POINCARÉ-féle képgeometriának a hiperbolikus síkgeometriával való puszta ekvivalenciáját, ami azonban teljesen elegendő arra, hogy a hiperbolikus síkot a POINCARÉ-féle félsíkon joggal tanulmányozhassuk [9], sokkal egyszerűbben bizonyítjuk be, ugyancsak függetlenül a folytonosságtól. Bizonyításunk abban áll, hogy a paraciklusra vonatkozó *ívkalkulus* alapján, ami nem más, mint a D. HILBERT [10] által alkotott úgynevezett *végkalkulus* szemléletesebb alakja s amelyet az 1. §-ban ismertetünk, megmutatjuk, hogy *az axiomatikusan értelmezett hiperbolikus síkgeometria kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban van az előjellel vett paraciklus-ívek alkotta testből konstruált euklideszi sík felső félsíkján értelmezett* POINCARÉ-*féle képgeometriával, függetlenül a folytonosságtól* (3. §).

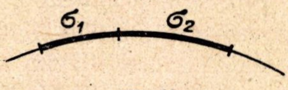
Alkalmazásképp a POINCARÉ-féle félsíkról leolvassuk a folytonosságtól független hiperbolikus trigonometria alapképletét (4. §), amelyből azután J. HJELMSLEV [11] elegáns gondolatmenetét követve már következnek a derékszögű háromszög két szöge és három oldala közül három-három között fennálló egyenletek (5. §).

Tárgyalásunkban ismertnek tételezzük fel a hiperbolikus síkgeometriából az elpattanó egyenesek alaptulajdonságai mellett az *elpattanási szög* és az *elpattanási távolság* fogalmát, a *végtelen távoli pontok* bevezetését, valamint a *paraciklus* fogalmát és elemi tulajdonságait [12].

1. §.

A paraciklus-ívekre vonatkozó ívkalkulus

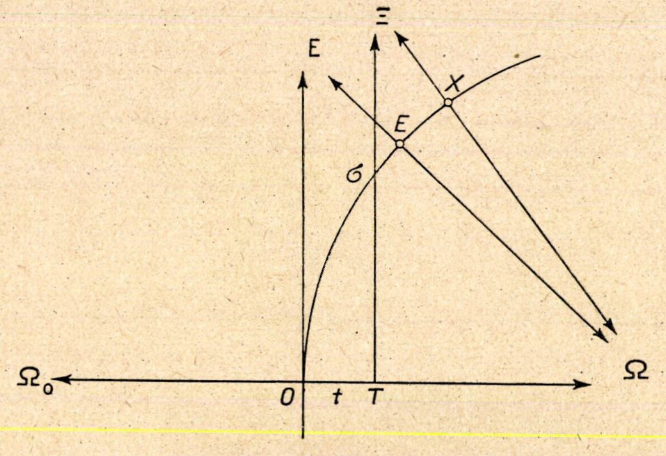
A paraciklus elemi tulajdonságai alapján tüstént definiálhatjuk a hiperbolikus síkon a paraciklusívek összeadását. Ha σ_1 és σ_2 tetszőleges paraciklusívek, ezek $\sigma_1+\sigma_2$ *összegét* per definitionem úgy nyerjük, hogy valamely paraciklusra felrakván a σ_1 ívet, ennek végpontjából továbbmenőleg felrakjuk a σ_2 ívet s ezek egyesítését vesszük (7. ábra). Az így definiált összeadás nyilván kommutatív és asszociatív.



7. ábra

Most definiáljuk két paraciklus-ív szorzatát. Evégből vegyünk fel a síkon valamely O pontot, fektessünk ezen át egy irányított egyenest, amelynek a pozitív irányba eső végtelen távoli pontja Ω, továbbá állapítsuk meg a síkban a pozitív forgási irányt [13]. Legyen az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak egy az O-ból kiinduló és az $O\Omega$ egyenes pozitív oldalára eső íve $\sigma = \widehat{OX}$, jelöljük az ΩX egyenes másik végtelen távoli pontját Ξ-vel s legyen ennek vetülete az $O\Omega$ egyenesen T (8. ábra). Ez a $\sigma = \widehat{OX}$ ív az előjellel vett $t = \overline{OT}$ távolság függvényének tekinthető; legyen mint ilyen

$$\sigma = E(t). \tag{1}$$



8. ábra

Mármost a $\sigma_1 = E(t_1)$, $\sigma_2 = E(t_2)$ paraciklusívek *szorzata* alatt per definitionem az

$$E(t_1)\,E(t_2) = E(t_1 + t_2) \tag{2}$$

ívet értjük. Az így definiált szorzás kommutatív és asszociatív, miután az előjeles t_1 és t_2 távolságok összeadásának megvan ez a két tulajdonsága.

Megmutatjuk még, hogy a paraciklus-ívek szorzása az összeadással kapcsolatban disztributív. A bizonyítás alapjául szolgál a következő

Segédtétel. Ha az $\widehat{OX} = E(t_1)$ és $\widehat{OY} = E(t_2)$ ívek szorzata $\widehat{OX}\cdot\widehat{OY} = \widehat{OZ}$ és az ΩX egyenes másik végtelen távoli Ξ_1 pontjának az $O\Omega$ egyenesen levő vetületét T_1-gyel jelölve, az ΩZ egyenes a T_1 ponton átmenő Ω középpontú paraciklust Z'-ben metszi, akkor $\widehat{OY} = \widehat{T_1 Z'}$ (9. ábra).

Legyen ugyanis az $\Omega Y, \Omega Z$ egyenesek másik végtelen távoli pontja rendre Ξ_2, Ξ_3 s ezek vetületei az $O\Omega$ egyenesen T_2, T_3. A szorzat definíciója értelmében az előjeles $t_1 = \overline{OT_1}$ távolságot T_2-ből felrakva az irányított $O\Omega$ egyenesre, éppen $\overline{T_2 T_3}$-at kapjuk, tehát

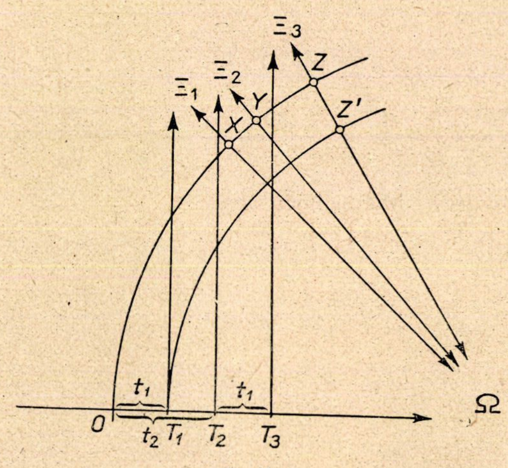
$$\overline{T_1 T_3} = \overline{T_1 T_2} + \overline{T_2 T_3} = \overline{T_1 T_2} + t_1 = \overline{T_1 T_2} + \overline{OT_1} = \overline{OT_2} = t_2.$$

Ennélfogva az $E(t)$ függvény (1) alatti definíciója szerint $\widehat{T_1 Z'} = E(t_2)$, vagyis valóban $\widehat{T_1 Z'} = \widehat{OY}$.

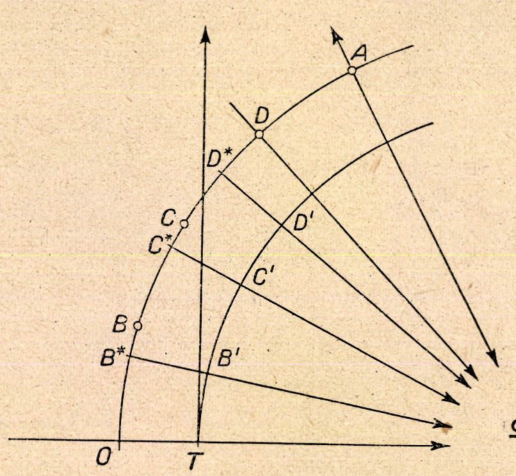
A disztributív törvény érvényességét most már következőképp láthatjuk be. Legyenek $\overset{\frown}{OA}$, $\overset{\frown}{OB}$, $\overset{\frown}{OC}$ a szóban forgó paraciklusra felrakott ívek az $O\Omega$ egyenes pozitív oldalán és

$$\overset{\frown}{OD} = \overset{\frown}{OB} + \overset{\frown}{OC}, \tag{3}$$

továbbá



9. ábra



10. ábra

$$\overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{OB^*}, \quad \overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{OC^*}$$

(10. ábra). Legyen ez utóbbiak összege

$$\overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OB} + \overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{OB^*} + \overset{\frown}{OC^*} = \overset{\frown}{OD^*}. \tag{4}$$

Jelöljük az ΩA egyenes másik végtelen távoli pontjából $O\Omega$-ra bocsátott merőleges talppontját T-vel s messék az ΩB^*, ΩC^*, ΩD^* egyenesek a T ponton átmenő Ω középpontú paraciklust rendre B', C', D'-ben. Akkor (4)-nek megfelelően nyilván

(4*) $$\overset{\frown}{TB'} + \overset{\frown}{TC'} = \overset{\frown}{TD'}.$$

De a segédtétel értelmében

$$\overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{TB'},\ \overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{TC'},$$

tehát ezek (3) alatti összege (4*) alapján

$$\overset{\frown}{OD} = \overset{\frown}{TB'} + \overset{\frown}{TC'} = \overset{\frown}{TD'}.$$

Ez a segédtétel szerint azt jelenti, hogy

$$\overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OD} = \overset{\frown}{OD^*},$$

vagyis (3) és (4)-re tekintettel

$$\overset{\frown}{OA}(\overset{\frown}{OB} + \overset{\frown}{OC}) = \overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OB} + \overset{\frown}{OA} \cdot \overset{\frown}{OC},$$

ami éppen a disztributív törvényt fejezi ki.

A paraciklus-ívek szorzatának (2) alatti definíciójából nyilvánvaló az osztás lehetősége és egyértelműsége:

$$\frac{E(t)}{E(u)} = E(t-u).$$

Továbbá a paraciklus-ívek körében lehetséges a négyzetgyökvonás, minthogy (2) értelmében

$$E(t) = E\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Jelöljük az irányított $O\Omega$ egyenes O-beli normálisának a pozitív irányba eső végtelen távoli pontját E-nal s messe az EΩ egyenes az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklust E-ben (8. ábra). Az (1) alatti definíció értelmében

(5) $$\overset{\frown}{OE} = E(0),$$

tehát (2) szerint az $\overset{\frown}{OX} = E(t)$ paraciklusívre

$$\overset{\frown}{OE} \cdot \overset{\frown}{OX} = \overset{\frown}{OX}.$$

A paraciklus-ívek szorzásánál tehát az $\overset{\frown}{OE}$ ív az *egység* szerepét játssza, miért is erre az

(6) $$\overset{\frown}{OE} = 1$$

jelölést vezethetjük be. E jelöléssel az (5) képlet

(5*) $$E(0) = 1,$$

ami (2) alapján még az

(5**) $$E(t)E(-t)=1$$

alakban is írható.

Ha az eddig tekintett *pozitív paraciklus-ívek* mellett a negatív előjellel ellátott *negatív paraciklus-íveket* és a *0-ívet* is tekintjük (amelyeket a szóban forgó paraciklusra O-ból az $O\Omega$ egyenes negatív oldalán felrakott ívek, ill. az O-pont szemléltet) s az összeadást és szorzást az elemi algebrából ismert módon terjesztjük ki e tágabb rendszerre, akkor a fentebbiek értelmében *a paraciklus-ívekkel való számolásban a közönséges műveleti szabályok érvényesek.* Sőt amint láttuk, *minden pozitív paraciklus-ívnek van négyzetgyöke.*

2. §.

Végtelen távoli pont koordinátája. A pont egyenlete

Abban a *koordinátarendszerben,* amelyet az irányított síkban felvett O pont és a rajta átfektetett s az Ω végtelen távoli pont felé irányított $O\Omega$ egyenes definiál (8. ábra), egy az Ω-tól különböző Ξ végtelen távoli pont ξ *koordinátájának* fogjuk nevezni az $\Omega\Xi$ egyenessel a fenti paraciklusból levágott $\widehat{OX}$ ívet pozitív vagy negatív előjellel aszerint, amint az $O\Omega$ egyenesek pozitív vagy negatív oldalára esik, azaz $\widehat{OE}$-vel megegyező vagy azzal ellenkező értelmű. Az E koordinátája a (6) alatti jelölés szerint 1, az $O\Omega$ egyenes Ω_0-lal jelölt másik végtelen távoli pontjáé nyilván 0.

A paraciklus-ívek összeadásának, ill. szorzásának fenti definíciójára tekintettel a végtelen távoli pont koordinátája fogalmából nyilván következik, hogy *a sík Ω körüli valamely forgatását, ill. $O\Omega$ menti valamely eltolását azáltal jellemezhetjük, hogy ennél minden ξ koordinátájú végtelen távoli pont*

(7) $$\xi'=\xi+\lambda,$$

illetve

(8) $$\xi'=\mu\xi. \qquad (\mu>0)$$

koordinátájú végtelen távoli pontba megy át, ahol λ, ill. μ állandó. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy *a síknak az $O\Omega$ egyenesre vonatkozó tükrözését az jellemzi, hogy ennél minden ξ koordinátájú végtelen távoli pont a*

(9) $$\xi'=-\xi$$

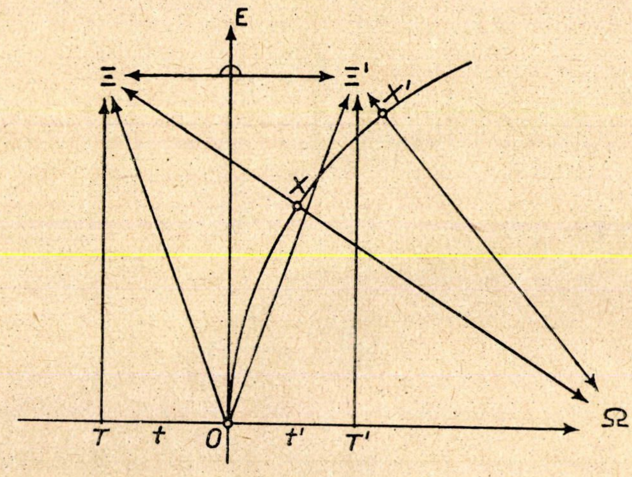
koordinátájú végtelen távoli pontba megy át.

Nézzük most, mi jellemzi a síknak az OE egyenesre vonatkozó tükrözését? Legyen egy az $O\Omega$ egyenes pozitív oldalára eső végtelen távoli pont Ξ, ennek OE-ra vonatkozó tükörképe, vagyis a Ξ-ből az OE-ra bocsátott merőleges másik végtelen távoli pontja Ξ' (11. ábra), ezek koordinátái ξ és ξ'.

Messék az $\Omega\Xi, \Omega\Xi'$ egyenesek az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklust rendre az X, X' pontokban. Jelölje továbbá Ξ vetületét az $O\Omega$ egyenesen T, a Ξ'-ét T'. Nyilvánvaló, hogy az $\overline{OT}$ és $\overline{OT'}$ előjeles távolságok ellentetten egyenlők (miután az $O\Xi$ és $O\Xi'$ félegyenesek nyilván egymás tükörképei OE-ra vonatkozólag), tehát az $\overline{OT} = t$ jelölés mellett $\overline{OT'} = -t$. Ennélfogva a végtelen távoli pont koordinátájának fogalma szerint az (1) alatti definícióra tekintettel

$$\xi = \widehat{OX} = E(t), \quad \xi' = \widehat{OX'} = E(-t)$$

s így (5^{**}) alapján $\xi\xi' = 1$. Ez a koordináta előjelére tett megállapodásunk folytán nyilván akkor is érvényes, ha Ξ az $O\Omega$ egyenes negatív oldalára esik.



11. ábra

Eszerint *a síknak az OE egyenesre vonatkozó tükrözése azzal jellemezhető, hogy ennél minden $\xi \neq 0$ koordinátájú végtelen távoli pont a*

(10) $$\xi' = \frac{1}{\xi}$$

koordinátájú végtelen távoli pontba megy át.

Minthogy az O pont körüli félforgás (az O-ra vonatkozó tükrözés) az $O\Omega$-ra és az OE-ra vonatkozó tükrözések összetétele, (9) és (10)-ből már következik, hogy *a síknak O körüli félforgását az jellemzi, hogy ennél minden $\xi \neq 0$ koordinátájú végtelen távoli pont a*

(11) $$\xi' = -\frac{1}{\xi}$$

koordinátájú végtelen távoli pontba megy át.

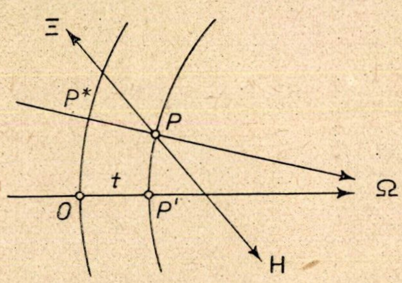
(11)-ből folyólag *az O ponton átmenő és $O\Omega$-tól különböző egyenesek azzal jellemezhetők, hogy egy ilyen egyenes végtelen távoli pontjainak ξ, η koordinátáira*

$$\xi\eta = -1. \tag{12}$$

Ezt tüstént általánosíthatjuk. Legyen ugyanis P a sík tetszőleges pontja és messe az $O\Omega$ egyenes ezen a P ponton átmenő Ω középpontú paraciklust P'-ben (12. ábra). Akkor a síkot Ω körül megfelelően elforgatva, P a P'-be, ez viszont $O\Omega$ menti megfelelő eltolással O-ba megy át. Egy a P ponton átmenő és $P\Omega$-tól különböző egyenes Ξ, H végtelen távoli pontjai, ha koordinátáik ξ, η, e forgatás és eltolás által (7) és (8) szerint rendre a $\mu\left(\xi+\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $\mu\left(\eta+\frac{\lambda}{\mu}\right)$ koordinátájú pontokban mennek át, ahol $\mu > 0$ és λ csak a P ponttól függő állandók, mégpedig

$$\mu = E(-t), \quad \frac{\lambda}{\mu} = -\widehat{OP^*}, \tag{13}$$

amennyiben a $P\Omega$ egyenes és az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklus metszéspontja P^* és előjellel $\overline{OP'} = t$. S mivel most már P az O pontba került és így ΞH-ból az O ponton átmenő egyenes lett, (12) értelmében ez utóbbi koordináták szorzata



12. ábra

$$\mu^2\left(\xi+\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\eta+\frac{\lambda}{\mu}\right) = -1$$

s ez nyilván csakis a P ponton átmenő és $P\Omega$-tól különböző egyenesekre áll fenn. A μ^2-tel való szorzást elvégezve, ez eredményt így fejezhetjük ki: *a sík valamely P pontján átmenő és $P\Omega$-tól különböző egyeneseket az jellemzi, hogy végtelen távoli pontjaik ξ, η koordinátáira*

$$(\mu\xi+\lambda)(\mu\eta+\lambda) = -1 \qquad (\mu > 0). \tag{14}$$

Ez egyenlet *a P pont egyenlete* a rajta átmenő és $P\Omega$-tól különböző egyenesek végtelen távoli pontjainak ξ, η koordinátáira vonatkozólag [14]. A tetszőlegesen választható $\mu > 0$ és λ állandók (előjeles paraciklus-ívek) a P pontot egyértelműen meghatározzák.

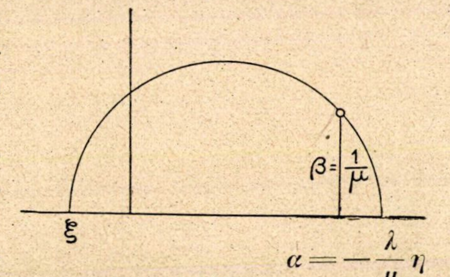
(13)-ból látható, hogy *a* (14) *egyenlettel bíró P pontot az Ω-val összekötő $P\Omega$ egyenes másik végtelen távoli pontjának koordinátája* $-\frac{\lambda}{\mu}$.

3. §.

A hiperbolikus sík leképezése az előjeles paraciklus-ívek alkotta testből konstruált euklideszi sík Poincaré-féle félsíkjára

Az Ω-tól különböző végtelen távoli pontok koordinátái (az előjeles paraciklus-ívek) alkotta *testből* konstruáljunk euklideszi síkot, amelynek *pontjai* tehát az (α, β) párok, ahol α és β tetszőleges koordinátaértékek. Ez euklideszi síkon a HILBERT-féle I, II, III axiómacsoportok [15] és az euklídeszi párhuzamossági axióma mellett nyilván érvényes a köraxióma [16] is, tekintve, hogy minden pozitív koordinátának (paraciklusívnek) van négyzetgyöke, amint az 1. §-ban láttuk.

A hiperbolikus sík pontjait leképezzük ez euklideszi síknak $\beta > 0$ *felső félsíkjára,* mégpedig a következőképpen.



13. ábra

Ha a felső félsíkban az abszcisszatengely bármely két különböző $(\xi, 0)$, $(\eta, 0)$ pontját összekötő egyenesdarabra mint átmérőre félkört rajzolunk, akkor valamely (14) alatti egyenlet, amelyet az

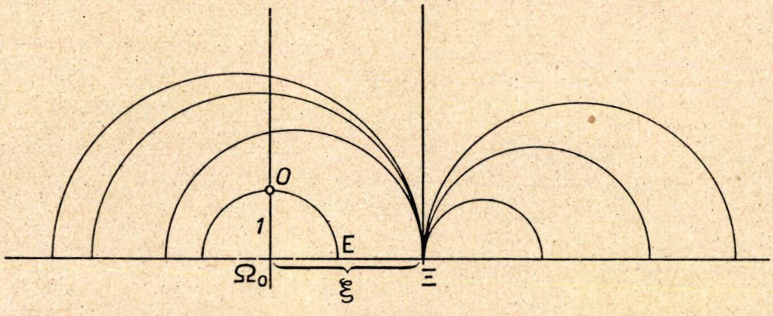
$$\alpha = -\frac{\lambda}{\mu}, \quad \beta = \frac{1}{\mu}$$

jelöléssel

$$(\xi - \alpha)(\eta - \alpha) = -\beta^2$$

alakban írhatunk, e félsíknak nyilván azt a pontját jellemzi (a rajta átmenő félköröket tekintve), amelynek abszcisszája α, ordinátája β (13. ábra). A jelzett leképezés mármost álljon abban, hogy *a hiperbolikus sík minden pontját, amelyet valamely* (14) *alatti egyenlet jellemez, a konstruált euklideszi sík felső félsíkján az ugyanezen egyenlettel jellemzett ponttal, vagyis* $\left(-\frac{\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$*-vel ábrázoljuk.* E vonatkozás nyilván kölcsönösen egyértelmű. *A pont képét mindig ugyanazzal a betűvel jelöljük, mint amellyel magát ezt a pontot.* Az O pontot, amelynek egyenlete a (12) alatti, a mondottak szerint a (0, 1) pont ábrázolja.

Az így történő leképezés mellett nyilvánvaló, hogy *a hiperbolikus síknak azt az egyenesét, amelynek végtelen távoli pontjai a* ξ, η *koordinátákkal bírnak, az euklideszi sík felső félsíkján a* $(\xi, 0)$, $(\eta, 0)$ *pontokat összekötő egyenesdarabra mint átmérőre állított félkör ábrázolja.* Ebből folyólag valamely ξ koordinátájú Ξ végtelen távoli pontot az Ω-tól különböző többi végtelen távoli ponttal összekötő egyeneseket azok a félkörök ábrázolják, amelyek az abszcisszatengely $(\xi, 0)$ pontjából indulnak ki (14. ábra). Ennélfogva *a ξ koordinátájú Ξ végtelen távoli pontot az Ω-val összekötő egyenest az ordinátatengellyel párhuzamos és a $(\xi, 0)$ ponton átmenő egyenesnek a felső félsíkba eső része ábrázolja.* Speciálisan az ordinátatengely maga az $O\Omega$ egyenes képe, minthogy ennek másik végtelen távoli pontja a 0 koordinátával bír. Mivel a (14) egyenletű P pont képe leképezésünk szerint $\left(-\frac{\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$ s (13)-ból $-\frac{\lambda}{\mu} = \widehat{OP^*}$ és (5**) alapján $\frac{1}{\mu} = E(t)$, világos, hogy *ha a pont leír valamely egyenest a hiperbolikus síkon, akkor a képe átfut a megfelelő félkörön, ill. félegyenesen,* aszerint, amint a leírt egyenes ΞH, ill. $P\Omega$ (12. ábra). Ugyanis az első esetben az előjeles $\widehat{OP^*}$ ív, a második esetben az előjeles t távolság s így az (1) alatt definiált $E(t)$ ív is, folyvást növekedik vagy fogy.



14. ábra

Az egyenesek ezen ábrázolására tekintettel természetes megállapodnunk abban, hogy *valamely ξ koordinátájú végtelen távoli Ξ pontot az abszcisszatengely $(\xi, 0)$ pontjával ábrázolunk és ezt is ugyanazon Ξ betűvel jelöljük,* lévén e pont a Ξ-ből kiinduló egyeneseket ábrázoló félköröknek (ill. félegyenesnek) az abszcisszatengelyre eső közös pontja. Eszerint az abszcisszatengely pontjai az Ω-tól különböző végtelen távoli pontokat ábrázolják. Például az $(1, 0)$ pont az 1 koordinátájú E végtelen távoli pont képe, a kezdőpont pedig az $O\Omega$ egyenes 0 koordinátájú Ω_0 végtelen távoli pontját ábrázolja. *Az Ω végtelen távoli pont képének az ordinátatengely végtelen távoli pontját tekintjük,* amely az Ω-ból kiinduló egyeneseknek megfelelő, az abszcisszatengelyre merőleges félegyeneseknek közös végtelen távoli pontja.

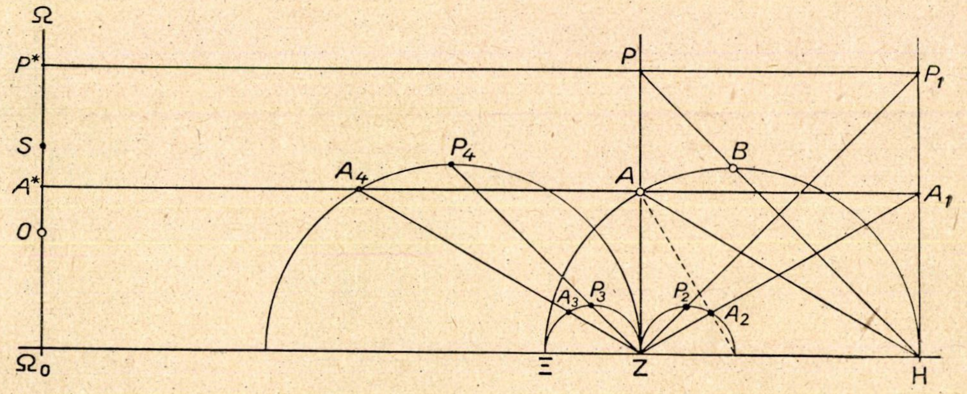
A leképezésből (7), ill. (8) alapján következik, hogy *a felső félsíknak az abszcisszatengely mentén történő eltolásai, ill. a kezdőpontból való hasonlósági transzformációi, a hiperbolikus síknak az Ω végtelen távoli pont körüli* *forgatásait, ill. az $O\Omega$ egyenes menti eltolásait ábrázolják.* Ugyanis a felső félsíkon e két transzformáció mindegyike az abszcisszatengelyt derékszögben metsző félkörök összességét (ehhez számítva az abszcisszatengelyre merőleges félegyeneseket is) önmagába viszi s így ezeknél egy ponton átmenő félkörök — amelyek a hiperbolikus sík egy pontján átmenő egyenesek képei — ismét ilyenekbe mennek át. E félkörök összességét az ordinátatengelyre vonatkozó tükrözés, valamint az egységkörre vonatkozó inverzió ugyancsak önmagába viszi át. Tehát (9), ill. (10)-ből látható, hogy *a hiperbolikus síknak az $O\Omega$, ill. OE egyenesre vonatkozó tükrözését a felső félsík ordinátatengelyre vonatkozó tükrözése, ill. az egységkörre vonatkozó inverziója ábrázolja.* Ebből már következik, hogy *az ordinátatengelyre vonatkozó tükrözés és az egységkörre vonatkozó inverzió összetétele a hiperbolikus sík O pont körüli félforgásának felel meg,* amint (11) közvetlenül is mutatja.

Minthogy az euklideszi sík felső félsíkjának az abszcisszatengely valamely pontjából való hasonlósági transzformációja az abszcisszatengely menti eltolásból, a kezdőpontból való hasonlósági transzformációból és az előbbi eltolás inverzéből tehető össze, a fentebbiekből folyik, hogy *a felső félsíknak az abszcisszatengely Ξ pontjából való hasonlósági transzformációi a hiperbolikus síknak a $\Xi\Omega$ egyenes mentén történő eltolásait ábrázolják.* A fent mondottakból ugyancsak következik, hogy *a felső félsíknak az abszcisszatengely Ξ pontjában emelt merőlegesre vonatkozó tükrözése a hiperbolikus sík $\Xi\Omega$ egyenesre vonatkozó tükrözésének felel meg,* tekintve, hogy a mondott tükrözés nyilván egy abszcisszatengely menti eltolásnak, az ordinátatengelyre vonatkozó tükrözésnek és az előbbi eltolás inverzének az összetétele. S mivel a felső félsíknak az abszcisszatengelyt derékszögben metsző valamely körre vonatkozó inverziója nyilván egy abszcisszatengely menti eltolásból, az egységkörre vonatkozó inverzióból, a kezdőpontból való hasonlósági transzformációból és az előbbi eltolás inverzéből tehető össze, a fentebbiekből folyik még, hogy *a felső félsíknak az abszcisszatengely Ξ, H pontjait összekötő egyenesdarabra mint átmérőre állított körre vonatkozó inverziója a hiperbolikus síknak a ΞH egyenesre vonatkozó tükrözését ábrázolja.*

Annak megállapítását, hogy két egyenesdarab kongruenciájának (egyenlőségének) mi a feltétele a szóban forgó leképezésben, előkészíti a következő

Tétel. Legyenek A és B a felső félsíknak nem egy függélyesbe eső pontjai s az ezeken átmenő és az abszcisszatengelyt derékszögben metsző félkör végpontjai Ξ és H, úgy jelölve, hogy e félkörön B az A és H közé essék. Akkor a BH egyenesnek az A ponton átmenő függélyessel való metszéspontját P-vel jelölve, a hiperbolikus síkon $\overline{AB}=\overline{AP}$ (15. ábra).

Bizonyítás. Toljuk el a felső félsíkon az AP egyenesdarabot az abszcisszatengellyel párhuzamosan úgy, hogy e tengely H pontjában emelt merőleges A_1P_1 szakaszává váljék. Az AP egyenesnek az abszcisszatengellyel való metszéspontját Z-val jelölve, vigyük át az A_1P_1 szakaszt a Z középpontú ZA sugarú körre vonatkozó inverzióval az $\widehat{A_2P_2}$ körívbe, amely nyilván az abszcisszatengelyt derékszögben metsző $\widehat{A_2\mathrm{Z}}$ része, legyen ennek a ZP egyenesre vonatkozó tükörképe az $\widehat{A_3P_3}$ ív, majd vigyük át ezt a Z pontból való



15. ábra

hasonlósági transzformációval az $\widehat{A_4P_4}$ ívbe, ahol A_4 az AA_1 és A_3Z egyenesek metszéspontja. Ez $\widehat{A_4P_4}$ körív most már az abszcisszatengellyel párhuzamosan eltolható az $\widehat{AB}$ ívbe! Ugyanis a szerkesztésből folyólag HP és ZP_1 szimmetrikusan feküsznek a ZH szakasz felező merőlegesére, valamint ZP_2 és ZP_3 a ZP-re vonatkozólag, tehát Z$P_4 \parallel$ HP. Hasonló okból Z$A_4 \parallel$ HA. Ennélfogva a felső félsíkot az abszcisszatengely mentén eltolva addig, amíg Z az H pontba jut, mikor is ZA_4 ⫲ HA folytán az abszcisszatengelyt derékszögben metsző $\widehat{A_4\mathrm{Z}}$ ív $\widehat{A\mathrm{H}}$-ba kerül, az $\widehat{A_4\mathrm{Z}}$ részét képező $\widehat{A_4P_4}$ ív éppen $\widehat{AB}$-vel fog egybeesni. Az előbbiek szerint e transzformációknál a hiperbolikus síkon

$$\overline{AP} = \overline{A_1P_1} = \overline{A_2P_2} = \overline{A_3P_3} = \overline{A_4P_4} = \overline{AB},$$

következőleg $\overline{AP} = \overline{AB}$. Qu. e. d.

Kiemeljük, hogy *e tétel jelölései mellett*

$$(\Xi \mathrm{H} B A) = \frac{\mathrm{Z}P}{\mathrm{Z}A}. \tag{15}$$

Ez azon alapul, hogy THALES tétele értelmében $\Xi B \perp \mathrm{H}P$ valamint $\Xi A \perp \mathrm{H}A$ (16. ábra). Ennélfogva ugyanis egyrészt

$$\frac{\Xi B}{B\mathrm{H}} = \frac{P\mathrm{Z}}{\mathrm{ZH}}$$

másrészt

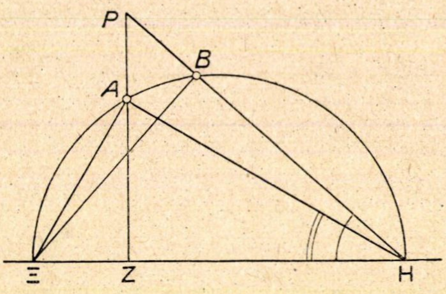
$$\frac{\Xi A}{A\mathrm{H}} = \frac{A\mathrm{Z}}{\mathrm{ZH}}$$

s ezekből osztással előáll (15).

Ennek alapján az előbbi tételből következik, hogy *ha az ordinátatengelyen az O pont fölött S-et az*

$$(16) \qquad \frac{\Omega_0 S}{\Omega_0 O} = (\Xi \mathrm{H} B A)$$

követelésnek megfelelően választjuk, akkor a hiperbolikus síkon $\overline{AB} = \overline{OS}$.



16. ábra

Jelöljük ugyanis (15. ábra) az AA_1 és PP_1 egyeneseknek az ordináta-tengellyel való metszéspontját rendre A^* és P^*-gal. Akkor az AP szakasz az abszcisszatengellyel párhuzamosan eltolható A^*P^*-ba, s mivel $\mathrm{Z}P = \Omega_0 P^*$ és $\mathrm{Z}A = \Omega_0 A^*$ folytán (15) és (16)-ból

$$\frac{\Omega_0 S}{\Omega_0 O} = \frac{\Omega_0 P^*}{\Omega_0 A^*},$$

azért az Ω_0 kezdőpontból való hasonlósági transzformációval az $A^* P^*$ szakasz átvihető OS-be. De a fentebbiek értelmében e transzformációknál a hiperbolikus síkon $\overline{AP} = \overline{A^* P^*} = \overline{OS}$ s így az előbbi tétel alapján egyben $\overline{AB} = \overline{OS}$.

Az okoskodás során egyszersmind bizonyítást nyert az utóbbi tételnek következő kiegészítése: *ha a felső félsík A pontján átmenő függélyesben B az A fölött fekvő pont és az ordinátatengelyen O fölött az S pontot úgy választjuk, hogy az AB függélyesnek az abszcisszatengellyel való metszéspontját Z-val jelölve*

$$\frac{\Omega_0 S}{\Omega_0 O} = \frac{\mathrm{Z}B}{\mathrm{Z}A},$$

akkor a hiperbolikus síkon $\overline{AB} = \overline{OS}$.

E két tétel egyszerű összefoglalása céljából bevezetjük az *egyenesdarab euklideszi karakterisztikájának* fogalmát.

Ha a hiperbolikus sík A és B pontjait összekötő egyenes végtelen távoli pontjai különböznek Ω-tól, akkor legyenek ezek Ξ és H-val úgy jelölve, hogy B az $A\mathrm{H}$ félegyenesre essék. Nevezzük ez esetben az $\overline{AB}$ egyenesdarab *euklideszi karakterisztikájának* a felső félsíkon számított

$$(17) \qquad \{\overline{AB}\} = (\Xi \mathrm{H} B A) = \frac{\Xi B}{B\mathrm{H}} : \frac{\Xi A}{A\mathrm{H}}$$

kettősviszonyt. Ha pedig az AB egyenes egyik végtelen távoli pontja Ω, akkor jelöljük a másikat Ξ-vel s az A és B pontok jelölését válasszuk úgy, hogy B az $A\Omega$ félegyenesre essék. E második esetben legyen az *euklideszi karakterisztika* a felső félsíkon vett

$$\{\overline{AB}\} = (\Xi BA) = \frac{\Xi B}{\Xi A} \tag{18}$$

osztóviszony.

E terminológia használatával ez utóbbi két tételt következőképp foglalhatjuk össze:

Ha a felső félsík két pontja A és B s az ordinátatengelyen O fölött az S pontot úgy választjuk, hogy

$$\frac{\Omega_0 S}{\Omega_0 O} = \{\overline{AB}\},$$

akkor a hiperbolikus síkon $\overline{AB} = \overline{OS}$.

Ezek után könnyen válaszolhatunk arra az alapvető kérdésre, hogy a hiperbolikus síkon felvett két egyenesdarab kongruenciájának mi a feltétele a szóban forgó leképezésben a felső félsíkon?

Legyenek az egyenesdarabok $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$. Válasszuk a felső félsíkon az ordinátatengely O fölötti S és S' pontjait úgy, hogy

$$\frac{\Omega_0 S}{\Omega_0 O} = \{\overline{AB}\}, \quad \frac{\Omega_0 S'}{\Omega_0 O} = \{\overline{A'B'}\} \tag{19}$$

legyen. Az éppen megfogalmazott tétel értelmében ekkor a hiperbolikus síkon

$$\overline{AB} = \overline{OS}, \quad \overline{A'B'} = \overline{OS'},$$

ahol is S és S' az $O\Omega$ félegyenes pontjai. Ennélfogva $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha S és S' összeesnek. Ez viszont (19)-re tekintettel akkor és csak akkor következik be, ha $\{\overline{AB}\} = \{\overline{A'B'}\}$. A feltett kérdésre tehát a válasz a következő:

A hiperbolikus síkon felvett két egyenesdarab akkor és csak akkor kongruens (egyenlő), ha a szóban forgó leképezés révén (17), *ill.* (18) *alatt definiált euklideszi karakterisztikáik egyenlők.*

Megmutatjuk még, hogy *a hiperbolikus síkon felvett két szög akkor és csak akkor kongruens (egyenlő), ha a leképezésünkben a felső félsíkon őket ábrázoló szögek egyenlők.*

Legyenek a szögek $BAC\sphericalangle$ és $B'A'C'\sphericalangle$ s a szárakon a B, C, ill. B', C' pontokat válasszuk úgy, hogy

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \tag{20}$$

álljon. Az első és harmadik kongruencia-tétel értelmében [17] $BAC\sphericalangle \equiv B'A'C'\sphericalangle$

akkor és csak akkor áll fenn, ha $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Ennek szükséges és elegendő feltétele az előbbiek szerint az, hogy

(21) $$\{\overline{BC}\} = \{\overline{B'C'}\}$$

legyen, míg (20) más szóval a

(20*) $$\{\overline{AB}\} = \{\overline{A'B'}\}, \quad \{\overline{AC}\} = \{\overline{A'C'}\}$$

kikötést jelenti. Minthogy pedig a bevezetésben mondottakból folyólag a POINCARÉ-féle félsíkon érvényes az első és harmadik kongruencia-tétel, e (20*) kikötés mellett (21) akkor és csak akkor következik be, ha a felső félsíkon $BAC_{\sphericalangle} = B'A'C'_{\sphericalangle}$. Tehát a hiperbolikus síkon $BAC_{\sphericalangle} \equiv B'A'C'_{\sphericalangle}$ valóban akkor és csak akkor áll fenn, ha a felső félsíkon ezeket ábrázoló szögek egyenlők. Ezt kellett megmutatnunk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy *az axiomatikusan értelmezett hiperbolikus síkgeometria kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban van az előjellel vett paraciklus-ívek alkotta testből konstruált euklideszi sík felső félsíkján értelmezett* POINCARÉ-*féle képgeometriával, függetlenül a folytonosságtól.* Ez más szóval azt jelenti, hogy a POINCARÉ-féle félsík ekvivalens a hiperbolikus síkgeometriával. Vagyis *nemcsak az igaz, hogy a hiperbolikus síkgeometriának minden tétele érvényes a* POINCARÉ-*féle félsíkon, hanem fordítva is: a* POINCARÉ-*féle félsíknak minden tétele érvényes a hiperbolikus síkon.*

4. §.
A folytonosságtól független hiperbolikus trigonometria alapképlete

Megállapodunk abban, hogy *a hiperbolikus síkon valamely szög trigonometriai függvényei alatt a fenti leképezésben e szöget ábrázoló és ugyanavval a betűvel jelölt szögnek euklideszileg definiált trigonometriai függvényeit értjük.* E megállapodás alapján mármost a szóbanforgó ábrázolásból tüstént leolvashatjuk, *hogy a t távolságnak megfetelő τ elpattanási szögre*

(22) $$\operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} = E(t).$$

Ez a folytonosságtól független hiperbolikus trigonometria alapképlete.

E képlet belátására legyen a hiperbolikus síkon az $O\Omega$ félegyenesre felrakva $t = \overline{OT}$ s állítsunk T-ben $O\Omega$-ra merőlegest, amelynek $O\Omega$ pozitív oldalára eső végtelen távoli pontja Ξ (17. ábra). Akkor a $\tau = TO\Xi_{\sphericalangle}$ a t távolságnak megfelelő elpattanási szög. Az O pontot T-be viszi a hiperbolikus síknak az $O\Omega$ egyenes mentén t-vel való eltolása, amelyet (8) szerint az jellemez, hogy minden ξ koordinátájú végtelen távoli pont a

(23) $$\xi' = \mu\xi$$

koordinátájú végtelen távoli pontba megy át, ahol is a paraciklus-ívek szorzásának (2) alatti definíciójára tekintettel szükségképp

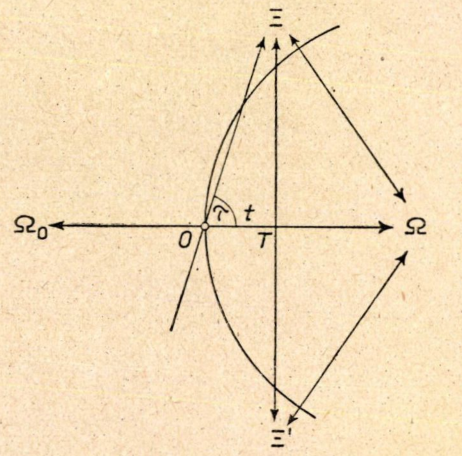
$$\mu = E(t).$$

Ez eltolást a felső félsíkon az Ω_0 kezdőpontból való az a hasonlósági transzformáció ábrázolja (3. §), amelynél O a T pontba megy át (18. ábra), tehát $\Omega_0 O = 1$ folytán a (23) alatti μ értékre

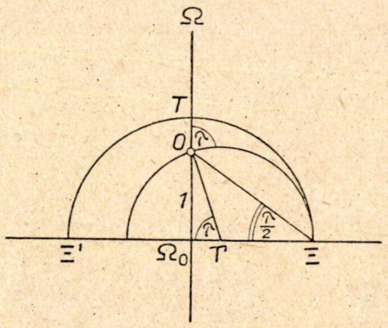
$$\mu = \Omega_0 T.$$

Ennélfogva a hiperbolikus síkon felvett $t = \overline{OT}$ távolsággal kifejezve a felső félsíkon

$$\Omega_0 T = E(t). \tag{24}$$



17. ábra



18. ábra

Minthogy pedig az $O\Omega$-ra merőleges $T\Xi$ egyenest, amelynek Ξ, Ξ' végtelen távoli pontjai ellentetten egyenlő koordinátákkal bírnak (2. §), Ω_0 középpontú félkör ábrázolja, azért $\Omega_0\Xi = \Omega_0 T$, tehát (24) mellett egyben

$$\Omega_0 \Xi = E(t). \tag{25}$$

De az $O\Xi$ egyenest ábrázoló félkör középpontját Γ-val jelölve, a 18. ábrán nyilván

$$\Omega_0 \Gamma O \sphericalangle = TO\Xi \sphericalangle = \tau$$

s így mint kerületi szög

$$\Omega_0 \Xi O \sphericalangle = \frac{\tau}{2}.$$

Tehát $\Omega_0 O = 1$ folytán a $\Xi\Omega_0 O$ derékszögű háromszögben

$$\Omega_0 \Xi = \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2}. \tag{26}$$

Mármost (25) és (26)-ból folyik (22).

E (22) képletet rögtön általánosíthatjuk. Tekintsünk a hiperbolikus síkon olyan $AB\Xi$ háromszöget, amelyben a Ξ szögpont végtelen távoli, A és B viszont valóságos pont. Legyen

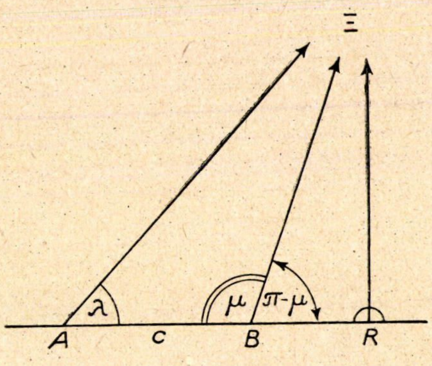
(27) $$BA\Xi\sphericalangle = \lambda,\ AB\Xi\sphericalangle = \mu,\ \overline{AB} = c$$

s példának okáért λ hegyes-, μ pedig tompaszög (19. ábra). Akkor Ξ vetületét az AB egyenesen R-rel jelölve, az $\overline{AB} = c$, $\overline{AR} = c_1$, $\overline{BR} = c_2$ egyenesdarabokra $c = c_1 - c_2$, tehát (2) és (5**)-ra tekintettel

(28) $$E(-c) = E(c_2)E(-c_1) = \frac{E(c_2)}{E(c_1)}.$$

Mivel pedig (22) értelmében (a derékszöget $\frac{\pi}{2}$-lel jelölve)

$$E(c_1) = \operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2},\quad E(c_2) = \operatorname{ctg}\frac{\pi - \mu}{2},$$



19. ábra

(28)-ból adódik, hogy *a (27) alatti alkatrészekkel bíró $AB\Xi$ háromszögben (ahol is Ξ végtelen távoli pont)*

(29) $$E(-c) = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}.$$

Hasonlóképp nyerjük e képletet minden más esetben. Ennek (22) az a speciális esete, midőn a λ, μ szögek egyike derékszög.

5. §.

A derékszögű háromszög trigonometriai képletei

Legyen ABC derékszögű háromszög ($C\sphericalangle$ derékszög), amelynek alkatrészei

$$\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ BAC\sphericalangle = A,\ CBA\sphericalangle = B.$$

J. Hjelmslev [18] elegáns gondolatmenetét követve (amelyet ő a folytonossági axiómák elfogadása mellett alkalmazott), a (29) képlet alapján most már előállíthatjuk azokat az egyenleteket, amelyek ez öt alkatrész közül három-három között állapítanak meg összefüggést.

Vezessük be rövidség kedvéért az (1) alatti távolságfüggvény mellett még a

(30) $$C(t) = \frac{E(t) + E(-t)}{2},\quad S(t) = \frac{E(t) - E(-t)}{2},\quad T(t) = \frac{S(t)}{C(t)}$$

távolságfüggvényeket. (5**)-ból folyólag $C(t)$ és $S(t)$ között fennáll a

(31) $$C(t)^2 - S(t)^2 = 1$$

alapreláció. Mármost a jelzett egyenletek következőképp nyerhetők [19].

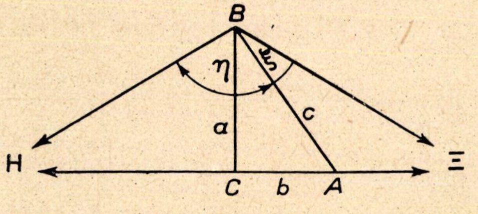
Jelöljük a CA egyenesnek C-től az A irányába eső végtelen távoli pontját Ξ-vel, a másikat H-val (20. ábra) és legyen

$$AB\Xi_{\sphericalangle} = \xi, \quad ABH_{\sphericalangle} = \eta.$$

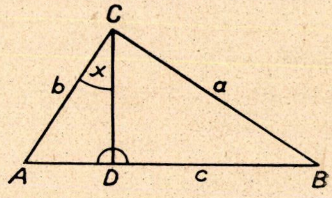
(29)-et az $AB\Xi$, ABH végtelenbe nyúló háromszögekre alkalmazva, adódik

(32) $$\operatorname{tg}\frac{\xi}{2} = E(-c)\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\eta}{2} = E(-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

tehát (5**) alapján (30)-ra tekintettel



20. ábra



21. ábra

(33) $$\operatorname{tg}\frac{\xi+\eta}{2} = \frac{E(-c)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)}{1 - E(-c)^2} = \frac{1}{S(c)\sin A}.$$

De ξ és η jelentésénél fogva

$$CB\Xi_{\sphericalangle} = CBH_{\sphericalangle} = \frac{\xi+\eta}{2}$$

s így (29)-et a $BC\Xi$ háromszögre alkalmazva

$$E(-a) = \operatorname{tg}\frac{\xi+\eta}{4},$$

tehát (5**) alapján (33) mellett másrészt

(34) $$\operatorname{tg}\frac{\xi+\eta}{2} = \frac{2E(-a)}{1 - E(-a)^2} = \frac{1}{S(a)}.$$

(33) és (34)-ből most már

(I) $$\sin A = \frac{S(a)}{S(c)}.$$

Minthogy $B + \xi = \eta - B$, azért $B = \frac{\eta - \xi}{2}$, tehát (32)-ből folyólag

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\frac{\eta-\xi}{2} = \frac{E(-c)\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{1 + E(-c)^2},$$

honnan (5**) felhasználásával (30)-ra tekintettel

(II) $$C(c) = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Az ABC háromszöget az $\overline{AB}$ átfogóhoz tartozó $\overline{CD}$ magassággal két derékszögű háromszögre bontva fel (21. ábra), az $ACD_{\sphericalangle} = x$ jelöléssel a (II) tétel értelmében az ACD háromszögben

$$C(b) = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} x,$$

míg BCD-ben (ahol is $BCD_{\sphericalangle}$ az x komplementuma)

$$C(a) = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} x.$$

Ezek összeszorzásával (II)-re tekintettel adódik

(III) $$C(c) = C(a)C(b).$$

(I), (II) és (III) alapján már könnyen előállíthatjuk a még hiányzó három egyenletet.

Először is (I) és (II)-ből (31) alapján

$$1 = \operatorname{ctg}^2 A \cdot \operatorname{ctg}^2 B - \frac{C(a)^2 - 1}{\sin^2 A},$$

honnan evidens átalakítás után négyzetgyökvonással (tekintve, hogy $C(a)$ pozitív)

(IV) $$C(a) = \frac{\cos A}{\sin B}.$$

Ebből és a B szögre vonatkozó (I)-hez hasonló egyenletből (III) felhasználásával (30)-ra tekintettel adódik

(V) $$\cos A = \frac{T(b)}{T(c)}.$$

Végül (I) és (V)-ből (III) alapján (30) tekintetbe vételével

(VI) $$\operatorname{tg} A = \frac{T(a)}{S(b)}.$$

Ismételjük, e tárgyalásban a szögfüggvények az A, B szögeket a fenti leképezésben a felső félsíkon ábrázoló szögek euklideszileg definiált trigonometriai függvényei. A szereplő távolságfüggvények pedig, amelyeket (30) alatt vezettünk be, (2) és (5*) alapján ugyanazokat a formális törvényeket követik, mint a $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ hiperbolás függvények. Folytonossági axiómák hiányában mindezek nem számok, hanem paraciklus-ívek, amelyekkel az 1. §-ban előadott ívkalkulus szerint számolhatunk.

IRODALOM

[1] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 7. *Aufl., Leipzig und Berlin* 1930, §§ 2—3, 3—5 és § 5, 11—15.

[2] Lásd pl. KERÉKJÁRTÓ BÉLA, A geometria alapjairól I, *Szeged* 1937, 145.

[3] KERÉKJÁRTÓ BÉLA [2], i. m. 145—146.

[4] H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica* 1 (1882), 1—62, *speciálisan* § 2, 6—8.

[5] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Mathematische Annalen* **57** (1903), 137—150, vagy D. HILBERT [1] i. m. *Anhang* III, 159—177, *speciálisan* 137—140, ill. 160—162.

[6] J. BOLYAI, Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc., *Marosvásárhely* 1832, § 1. Lásd még *szerzőtől,* A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával, *A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **3** (1953), 535—559, *speciálisan* 535—536.

[7] Lásd pl. K. FLADT, Der Saccheri-Legendreschen Satz etc., *Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht* **56** (1925), 345.

[8] KERÉKJÁRTÓ BÉLA, A hiperbolikus síkgeometria felépítése, *Matematikai és Természettudományi Értesítő* **59** (1940), 19—59, vagy *ugyanattól* Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatschefski, *Commentarii Mathematici Helvetici* **13** (1940), 11—48.

[9] Ezt teszi (a folytonossági axiómákat is elfogadva) meglehetős részletességgel A. TRESSE, Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes, *Bulletin de la Société Mathématique de France,* **81** (1953) 81—143 és **83** (1955) 1—56.

[10] D. HILBERT [5], i. h. §§ 2—3., 145—149, ill. 170—174.

[11] J. HJELMSLEV, Grundlag for den projektive Geometri, *Kobenhavn* 1943, § 7, 36—37.

[12] Ezeknek a folytonosságtól független síkbeli tárgyalását illetően lásd pl. H. S. CARSLAW, The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry, *London 1916, Chapter* III.

[13] V. ö. KERÉKJÁRTÓ BÉLA [2], i. m. 20. §.

[14] V. ö. D. HILBERT [5], i. h. § 4. Az egyenlet lineárissá tétele céljából D. HILBERT az

$$u = \xi\eta, \quad v = \frac{\xi + \eta}{2}$$

vonalkoordinátákat vezeti be. Erre a mi tárgyalásunkban nincs szükség.

[15] Lásd D. HILBERT [1].

[16] Lásd a [2] jegyzetet.

[17] D. HILBERT [1], i. m. § 6, 16 és 20—21.

[18] Lásd a [11] jegyzetet.

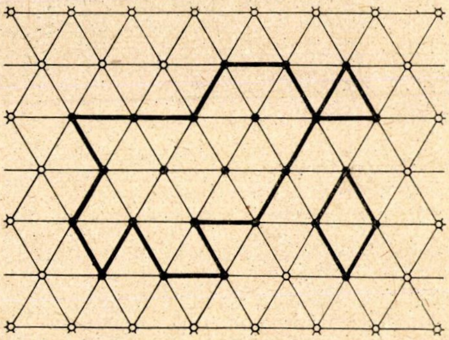
[19] Vö. *szerzőtől,* A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel, *A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **3** (1953), 527—533, *speciálisan* 531—532, ahol is ez okoskodás a folytonossági axiómák elfogadása esetére van előadva.

PONTOK ELHELYEZÉSE EGY TARTOMÁNYBAN

ERDŐS PÁL és FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Hogyan kell egy végesben fekvő, zárt tartományban n pontot úgy elhelyezni, hogy minden pont lehetőleg távol kerüljön a többitől, vagyis pontosabban úgy, hogy a pontok közt fellépő minimális távolság maximális legyen? Erre a kérdésre vonatkozik A. THUE [1] következő tétele: Ragadjuk ki egy egységnyi oldalhosszúságú szabályos háromszögrács végesszámú háromszögét. Ha ezek (határaikat is tekintetbe véve) együttesen n rácspontot tartalmaznak, akkor a háromszögek által borított zárt síkrészen fekvő bármely n pont közül mindig kiválasztható két olyan, amelyek távolsága $\leqq 1$. Ha az n pont közül nem mind rácspont, akkor a „$\leqq$" jel a „$<$" jellel helyettesíthető.

Ez a tétel csupán speciális esetekben oldja meg a fenti problémát, de felvilágosítást ad az extremális pontrendszer aszimptotikus viselkedéséről n-nek nagy értékére: ha d_n jelenti egy T területű, végesben fekvő zárt tartomány n pontja közt fellépő minimális távolság maximumát, akkor [2]



1. ábra

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, d_n = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Durván kifejezve, nagy pontszám esetén a pontokat egy szabályos háromszögrács rácspontjaiba kell helyezni.

Egyikünk [3] még régebben felvetette azt a kérdést, miként kell elhelyezni a pontokat úgy, hogy a pontokat összekötő legrövidebb törtvonal hossza maximális legyen. Ezt a maximumot L_n-nel jelölve, kimondotta azt a sejtést, hogy

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Ez azt jelentené, hogy nagy pontszám esetén ez a probléma is az egyenlőoldalú háromszögrácshoz vezet.

Ezzel a problémával VERBLUNSKY [4] és újabban FEW [5] foglalkozott. A probléma teljes elintézése azonban nehéznek látszik, s így felmerül az a kérdés, kimondható-e legalább valamilyen (2)-nél kevesebbet mondó, de (1)-et tartalmazó állítás. Ilyen állítást tartalmaz a következő

TÉTEL: *Legyen $P_1, \ldots, P_n$ egy síkbeli, Jordan-féle értelemben mérhető, T mértékű, zárt ponthalmaz n pontja és l_i a P_i pont távolsága a hozzá legközelebb fekvő ponttól. Képezzük az $l_1 + \cdots + l_n$ összeget és vizsgáljuk ennek S_n maximumát, amidőn a pontok szabadon változnak a ponthalmazon. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}. \tag{3}$$

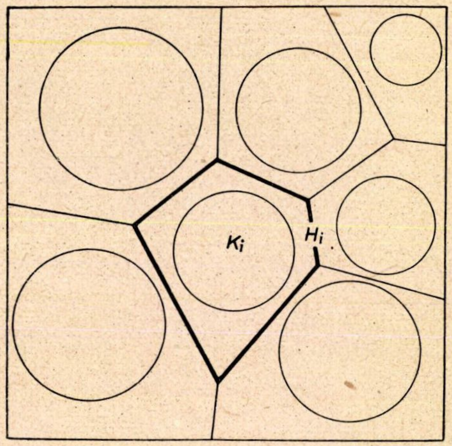
Mindenekelőtt ezt a tételt bizonyítjuk be, majd az előzőkkel kapcsolatos néhány további kérdést említünk.

Tételünk következik az alábbi ismert [6] tételből, amelyet azonban itt teljesség kedvéért bebizonyítunk: egy q területű négyzetben* fekvő, egymásba nem nyúló n kör $r_1, \ldots, r_n$ sugara mindig kielégíti az

$$(r_1 + \cdots + r_n)^2 < \frac{nq}{\sqrt{12}} \tag{4}$$

egyenlőtlenséget.

Jelöljük a köröket $K_1, \ldots, K_n$-nel és tekintsük a négyzetnek és azoknak a K_i-t tartalmazó félsíkoknak közös részét, amelyeket K_i-nek a többi körrel vett hatványvonalai határolnak. Ez nyilvánvalóan egy K_i-t tartalmazó konvex H_i sokszög, amelynek területét is H_i-vel jelöljük. Ámde H_i úgy is definiálható, mint a négyzet azon pontjainak halmaza, amelyeknek a K_i körre vonatkozó hatványa nem nagyobb, mint a többi körre vonatkozó hatványa. Innen kitűnik, hogy a $H_1, \ldots, H_n$ sokszög hézagmentesen és egyrétűen lefedi a négyzetet. H_i oldalszámát p_i-vel jelölve és figyelembe véve, hogy egy kört tartalmazó adott oldalszámú sokszögek közül a körülírt szabályos sokszög területe a legkisebb:



2. ábra

$$H_i \geqq F(r_i, p_i),$$

* Négyzet helyett vehetünk bármely, legfeljebb hat oldalú konvex sokszöget. Szabályos 6-szög és egyetlen beírt kör esetén azonban (4)-ben egyenlőség áll.

ahol

$$F(x, y) = x^2 y \operatorname{tg} \frac{\pi}{y}.$$

Kimutatjuk, hogy a kétváltozós $F(x, y)$ függvény az $y \geqq 3$ félsíkon konvex. Bevezetve a $g(y) = y \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{y}$ jelölést, a $F = x^2 g(y)$ függvény konvexitásásának feltétele, $F_{xx} > 0$ nyilvánvaló teljesülése miatt

$$F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2 = 2x^2 (g g'' - 2g'^2) \geqq 0,$$

vagyis $g g'' \geqq 2g'^2$. Mivel azonban $y \geqq 3$-ra (sőt már $y > 2$-re is) $g > 0$ és

$$g' = \frac{\frac{1}{2} y \sin \frac{2\pi}{y} - \pi}{y \cos^2 \frac{\pi}{y}} < 0,$$

$$g'' = \frac{2\pi^2 \sin \frac{\pi}{y}}{y^3 \cos^3 \frac{\pi}{y}} > 0,$$

azért a konvexitás feltétele így is írható: $\left(\dfrac{1}{2} g g''\right)^{\frac{1}{2}} + g' \geqq 0$, azaz $y \cos^2 \dfrac{\pi}{y}$-nal végigszorozva,

$$\pi \sin \frac{\pi}{y} + \frac{1}{2} y \sin \frac{2\pi}{y} - \pi \geqq 0.$$

A $z = \pi / y$ helyettesítést alkalmazva ki kell tehát mutatnunk, hogy

$$\sin z + \frac{1}{2z} \sin 2z - 1 \geqq 0, \quad 0 < z \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Ámde

$$\sin z + \frac{1}{2z} \sin 2z - 1 > \sin z + \frac{1}{2z}\left(2z - \frac{8z^3}{6}\right) - 1 = \sin z - \frac{2z^2}{3}.$$

Mivel pedig a jobboldali függvény $z = \pi/3$-ra még pozitív, azért (a $\sin z$ és a z^2 függvény egyszerű tulajdonságai miatt) $0 < z < \pi/3$-ra is az. Ezzel $F(x, y)$ konvexitását kimutattuk.

Felhasználjuk most még az Euler-féle poliédertételnek azt az egyszerű folyományát, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i < 6,$$

valamint azt, hogy $g' < 0$ következtében $F(x, y)$ y-nak monoton fogyó függvénye. E tények és a konvex függvényekre vonatkozó Jensen-féle egyenlőtlenség figyelembevételével nyerjük a bizonyítandó (4)-es egyenlőtlenséget:

$$q=\sum_{i=1}^{n} H_i \geqq \sum_{i=1}^{n} F(r_i, p_i) \geqq nF\left(\frac{r_1+\cdots+r_n}{n}, \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right) >$$

$$> nF\left(\frac{r_1+\cdots+r_n}{n}, 6\right) = n\left(\frac{r_1+\cdots+r_n}{n}\right)^2 6\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{n}(r_1+\cdots+r_n)^2.$$

Ezután rátérünk (3) bizonyítására.

A szabályos háromszögrács példájára támaszkodva nem nehéz megmutatni, hogy egy T belső mértékkel bíró ponthalmazra

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqq \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Azt fogjuk ezért csak kimutatni, hogy bármely T külső Jordan-mértékű ponthalmazra

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Ezt először egy b oldalú négyzetre mutatjuk ki. Írjunk P_i köré a hozzá legközelebb eső pont l_i távolságának felével, mint sugárral, egy K_i kört. Nyilvánvaló, hogy a $K_1, \ldots, K_n$ körök nem hatolhatnak egymásba, mert ha K_i K_j-be hatolna és, mondjuk, $l_i \leqq l_j$ lenne, akkor $P_iP_j < l_j$ lenne, s így l_j nem lehetne a P_j-hez legközelebb eső pont távolsága.

Legyen ε egy tetszés szerinti pozitív szám és tekintsük a négyzetünkkel koncentrikus, hasonló helyzetű $b+2\varepsilon$ oldalú négyzetből kinyúló köröket. Ezek sugara $>\varepsilon$, s így számuk egy n-től független k korlát alatt marad. Másrészt nyilvánvalóan valamennyi $l_i \leqq \sqrt{2}\, b$, s így (4) miatt $n>k$-ra

$$l_1+\cdots+l_n < 2\sqrt{\frac{(n-k)(b+2\varepsilon)^2}{\sqrt{12}}} + k\sqrt{2}\, b.$$

Ezért

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}(b+2\varepsilon),$$

vagyis, ε tetszésszerinti volta miatt

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\, b.$$

Másképp kifejezve: létezik egy olyan $2/\sqrt{3}$-hoz tartó $c_1, c_2, \ldots$ számsorozat, hogy

(5) $$S_n \leqq \sqrt{c_n n}\, b.$$

Az általános eset bizonyításához borítsuk le ponthalmazunkat végesszámú, mondjuk m egymásba nem nyúló $q_1, \ldots, q_m$ területű négyzettel. A több négyzet közös határára eső P_i pontokat valamelyik négyzethez számítva, legyen az i-edik négyzethez tartozó pontok száma k_i és a kérdéses távolságösszegnek ezekre a pontokra vonatkozó értéke s_i. Nyilvánvaló, hogy az egész pontrendszerre vonatkozó távolságösszeg $l_1+\cdots+l_n \leqq s_1+\cdots+s_m$. Másrészt (5), illetőleg a Schwarz-féle egyenlőtlenség miatt

$$s_1+\cdots+s_m \leqq \sqrt{c_{k_1}k_1q_1}+\cdots+\sqrt{c_{k_m}k_mq_m} \leqq \sqrt{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}\,\sqrt{q_1+\cdots+q_m}.$$

Ezért

$$\frac{l_1+\cdots+l_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}{k_1+\cdots+k_m}}\sqrt{q_1+\cdots+q_m},$$

és tekintettel a könnyen belátható*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}{k_1+\cdots+k_m}=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

egyenlőségre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}(q_1+\cdots+q_m)}.$$

Mivel azonban a négyzeteket úgy választhatjuk, hogy területösszegük tetszésszerinti kevéssel lépje túl ponthalmazunk mértékét, azért tételünk bizonyítását a fenti egyenlőtlenséggel befejeztük.

Jelentse l_i' a P_i ponthoz legközelebb eső két pont távolságának számtani közepét és legyen $S_n'=\max(l_1'+\cdots+l_n')$. Meg lehetne kísérelni a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n'}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}$$

reláció bizonyítását, amely általánosítása volna (3)-nak, de még mindig kevesebbet mondana (2)-nél.

Felvethető a következő probléma is [7]: Jelentse L_n^k az n pont közül k pontot összekötő legrövidebb törtvonal maximumát. Igaz-e az, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}L_n^k=(k-1)\sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}\,?$$

Ez a kérdés még $k=3$-ra sincs eldöntve. $k=2$-re (1) igenlő választ ad.

Tekintsük most az n pont által meghatározott háromszögek közül a minimális kerületű háromszög kerületének Δ_n maximumát. Δ_n aszimptotikus viselkedésének kérdése már nem vezet a szabályos háromszögrácshoz, amennyiben

* Legyen $\lim_{n\to\infty}c_n=c$, $\max|c_n-c|=M$, δ egy tetszés szerinti pozitív szám és N egy olyan pozitív szám, hogy minden N-nél nagyobb n indexre $|c_n-c|<\delta$ teljesüljön. Akkor

$$\left|\frac{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}{k_1+\cdots+k_m}-c\right| \leqq \frac{|c_{k_1}-c|k_1+\cdots+|c_{k_m}-c|k_m}{k_1+\cdots+k_m} \leqq \frac{MNm}{k_1+\cdots+k_m}+\delta.$$

egy olyan téglalaprács, amelyben a téglalap oldalai 4:3 arányban vannak, jobb pontelhelyezést ad. Ezt a téglalapot az jellemzi, hogy a három csúcsa által meghatározott háromszög kerülete megegyezik a rövidebb oldal mentén fekvő három egymásután következő rácspont által meghatározott elfajult háromszög kerületével, vagyis a rövidebb oldal hosszának 4-szeresével. Ez a példa mutatja, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{n}\,\Delta_n \geqq \sqrt{12T}.$$

A jobboldali $\sqrt{12}$ állandó valóban nagyobb a szabályos háromszögrács által szolgáltatott $3\sqrt{2}/\sqrt{3} = \sqrt{6}\sqrt{3}$ értéknél. Vajon fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\Delta_n = \sqrt{12T}$$

reláció?

HEILBRONN vetette fel azt a kérdést, mi mondható ki egy egységnégyzetben fekvő n pont által meghatározott minimális területű háromszög területének t_n maximumáról. Kimondotta sejtésként, hogy található olyan C állandó, hogy $t_n < C/n^2$. ROTH [8] kimutatta olyan két C' és C'' állandó létezését, hogy

$$\frac{C'}{n^2} < t_n < \frac{C''}{n\sqrt{\log\log n}}.$$

IRODALOM

[1] A. THUE, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Forhdl. Skand. Naturfors.* **14** (1892) 352—353. A szerzőknek nem állt módjában a dolgozat elolvasása.

[2] (1)-nek, amelyben a legsűrűbb körelhelyezkedés problémájának megoldása nyer kifejezést, különféle bizonyításai és általánosításai ismeretesek. V. ö. L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, *Berlin—Göttingen—Heidelberg* 1953.

[3] L. FEJES TÓTH, Über einen geometrischen Satz, *Math. Zeitschrift* **46** (1940), 83—85.

[4] S. VERBLUNSKY, On the shortest path through a number of points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 904—913.

[5] L. FEW, The shortest path and the shortest road through n points, *Mathematika* **2** (1955), 141—144. E cikkben többek között a következő tétel van bizonyítva: Legyen adva n pont az egységnégyzetben, akkor mindig van egy oly $\left((2n)^{1/2}+\frac{7}{4}\right)$-nél nem hosszabb törtvonal, mely ezen n pont mindegyikén áthalad.

[6] L. FEJES TÓTH, Some packing and covering theorems, Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math. **12** A (1950), 62—67.

[7] V. ö. a [2]-ben idézett könyv 97. oldalával.

[8] K. F. ROTH, On a problem of Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **26** (1951) 198—204.

FÜGGETLEN VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK VÉGTELEN SORAINAK KONVERGENCIÁJÁRÓL

PRÉKOPA ANDRÁS

Bevezetés

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független valószínűségi változók. Ebben a dolgozatban azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy milyen feltételek mellett konvergál a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \tag{1}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel.

Végig az egész dolgozatban $\mathfrak{F}$ a pozitív egész számok véges, $\mathfrak{S}$ pedig a tetszőleges részhalmazainak összességét jelenti. Ha $A \in \mathfrak{F}$, vagy $A \in \mathfrak{S}$ akkor a $\xi(A)$ valószínűségi változót a következőképpen definiálom:

$$\xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k, \tag{2}$$

feltéve, hogy végtelen sok elemet tartalmazó A halmaz esetében a (2) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. $\xi(A)$ eloszlásfüggvényét $F(x, A)$-val, karakterisztikus függvényét $f(t, A)$-val jelölöm.

Ha $0 < \lambda < 1$, ξ pedig egy tetszőleges valószínűségi változó, akkor azokat a $Q(\lambda)$ számokat, amelyekre teljesül a következő két egyenlőtlenség:

$$P(\xi \leqq Q(\lambda)) \geqq \lambda, \quad P(\xi \geqq Q(\lambda)) \geqq 1-\lambda,$$

a ξ valószínűségi változó λ-kvantiliseinek nevezzük. A $\xi(A)$ változó egy tetszőleges λ-kvantilisét $Q(\lambda, A)$-val jelölöm.

Arra vonatkozólag, hogy milyen feltételek mellett konvergál az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel, az irodalomban eddig olyan tételek ismeretesek, amelyek feltételeiben a ξ_k valószínűségi változók közönséges, illetve csonkított momentumai, vagy pedig karakterisztikus függvényei szerepelnek. Az ebben a dolgozatban található feltételek ezektől eltérő típusúak, amennyiben bizonyos eloszlásfüggvény-halmaz kompaktságával, illetve kvantilisekkel kapcsolatosak.

1. §. Segédtételek

Ebben a paragrafusban három segédtételt bizonyítok be. Az első kettő egy $\{\xi_z, z\in\mathfrak{Z}\}$ valószínűségi változó-összességgel kapcsolatos, ahol $\mathfrak{Z}$ tetszőleges, adott halmaz. A ξ_z valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(x,z)$-vel, karakterisztikus függvényét $f(t,z)$-vel, egy tetszőleges λ-kvantilisét $Q(\lambda, z)$-vel jelölöm.

P. LÉVY bevezette az egydimenziós eloszlásfüggvények távolságának a fogalmát. Az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ eloszlásfüggvények $L(F_1, F_2)$ Lévy-féle távolsága alatt azoknak a h értékeknek az alsó határát értjük, amelyekre teljesül az

$$F_1(x-h)-h \leqq F_2(x) \leqq F_1(x+h)+h \tag{3}$$

egyenlőtlenség. Ismeretes, hogy ez a távolságfogalom kielégíti a metrikus tér axiómáit:

a) $L(F_1, F_2)=0$, akkor és csak akkor, ha $F_1(x)\equiv F_2(x)$;
b) $L(F_1, F_2)=L(F_2, F_1)$;
c) $L(F_1, F_3)\leqq L(F_1, F_2)+L(F_2, F_3)$.

Tekintsük az egydimenziós eloszlásfüggvények $\mathfrak{F}$ halmazát. Az előbb mondottak szerint $\mathfrak{F}$ metrikus tér. (3) szerint $\mathfrak{F}$ korlátos, [2] 42. o. 2. tétele szerint pedig teljes is. [2] 38. o. 1. tétele szerint az $L(F_n, F)\to 0$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $F_n(x)\to F(x)$ az utóbbi függvény minden folytonossági pontjában. Ennek alapján könnyen belátható, hogy az $\mathfrak{F}$ tér nem kompakt. Megadható ugyanis olyan eloszlásfüggvény-sorozat, amely minden pontban 0-hoz tart. Az első két lemma azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy milyen feltételek mellett kompakt az $\mathfrak{F}$ tér $\mathfrak{F}'=\{F(x,z),\ z\in\mathfrak{Z}\}$ részhalmaza.

Mivel rögzített λ és z esetében a $Q(\lambda, z)$ mennyiség nincs mindig egyértelműen meghatározva, ezért a $\{Q(\lambda, z),\ z\in\mathfrak{Z}\}$ halmaz is általában többféleképpen megválasztható.

1. LEMMA. *Ha minden olyan λ-ra, melyre $0<\lambda<1$, a $Q(\lambda, z)$ $(z\in\mathfrak{Z})$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy $|Q(\lambda,z)|\leqq K(\lambda)$, ahol $K(\lambda)$ nem függ z-től, akkor az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt.*

Megfordítva, ha az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt, akkor minden olyan λ-hoz, melyre $0<\lambda<1$, tartozik olyan z-től független $K(\lambda)$ szám, hogy $|Q(\lambda,z)|\leqq K(\lambda)$.

AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Ha $\varepsilon>0$, $0<\lambda<\varepsilon$ és $x<-K(\lambda)$, akkor feltételünkből azt kapjuk, hogy

$$F(x,z)\leqq F(-K(\lambda),z)=P(\xi_z<-K(\lambda))\leqq P(\xi_z<Q(\lambda,z))\leqq\lambda<\varepsilon.$$

Ha $\lambda>1-\varepsilon$ és $x>K(\lambda)$, akkor pedig azt kapjuk, hogy

$$F(x,z)\geqq F(K(\lambda),z)=P(\xi_z<K(\lambda))\geqq P(\xi_z\leqq Q(\lambda,z))\geqq\lambda>1-\varepsilon.$$

Látható tehát, hogy

$$F(x, z) \to 0, \text{ ha } x \to -\infty,$$
$$F(x, z) \to 1, \text{ ha } x \to \infty,$$

z-ben egyenletesen. Ha $F(x, z_k)$ az $\mathfrak{F}'$ halmaz egy sorozata, akkor ebből Helly tétele szerint kiválasztható egy olyan részsorozat, amely konvergál egy $F(x)$, balról folytonos, nem csökkenő függvényhez z, az utóbbinak minden folytonossági pontjában. Erre azonban az előbbiek szerint teljesülniök kell a $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ relációknak. $F(x)$ tehát eloszlásfüggvény.

A MÁSODIK ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompaktságából következik, hogy van olyan pozitív $K(\varepsilon)$ szám, hogy

$$F(x, z) < \varepsilon, \text{ ha } x < -K(\varepsilon)/2,$$
$$1 - F(x, z) < \varepsilon, \text{ ha } x > K(\varepsilon)/2.$$

Ekkor azonban

$$-K(\varepsilon) < Q(\varepsilon, z) < K(\varepsilon), \; z \in \mathfrak{Z},$$

amivel az állítást bebizonyítottuk.

2. LEMMA. *Az $\mathfrak{F}'$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha az $f(t, z)$, $z \in \mathfrak{Z}$ karakterisztikus függvények a $t = 0$ pontban egyenlő mértékben folytonosak, azaz minden pozitív ε-hoz található olyan δ, hogy*

$$|1 - f(t, z)| < \varepsilon, \text{ ha } |t| < \delta. \tag{4}$$

AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Tegyük fel, hogy adott ε és δ mellett teljesül a (4) egyenlőtlenség. Ekkor az

$$1 - \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{10}, \text{ ha } |x| \geqq 1$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon > \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |1 - f(t, z)| dt \geqq \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - e^{itx}) dt dF(x, z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF(x, z) \geqq \int_{|x| \geqq \frac{1}{\delta}} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF(x, z) \geqq \frac{1}{10} P\left(|\xi_z| > \frac{1}{\delta}\right).$$

Eszerint, ha $x > \frac{1}{\delta}$, akkor

$$F(-x, z) + 1 - F(x, z) < 10\,\varepsilon.$$

Innen ugyanúgy, mint az 1. lemma bizonyításában, $\mathfrak{F}'$ kompaktsága egyszerűen belátható.

A MÁSODIK ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Ha $\varepsilon > 0$, akkor van olyan pozitív K szám, hogy

$$P(|\xi_z| > K) < \frac{\varepsilon}{4}, z \in \mathfrak{Z}.$$

Ebből következik, hogy ha $|t| < \frac{\varepsilon}{2K} = \delta$, akkor

$$|1-f(t,z)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{itx})dF(x,z)\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|1-e^{itx}|dF(x,z) \leqq$$

$$\leqq |t| \int_{|x| \leqq K} |x| dF(x,z) + 2P(|\xi_z| > K) < |t|K + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

3. LEMMA. *Tegyük fel, hogy az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ valószínűségi változókra teljesül a következő feltétel:*

$$\mathbf{P}(\lim_{n \to \infty} \eta_n = \infty) = 1.$$

Ha $0 < \lambda < 1$ és $Q(\lambda, n)$ jelenti az η_n valószínűségi változó egy tetszőleges λ-kvantilisét, akkor

$$\lim_{n \to \infty} Q(\lambda, n) = \infty.$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje Ω_{mn} azt az eseményt, hogy

$$\eta_n > m.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\Omega_{mn}) = 1.$$

Létezik tehát olyan N szám, hogy ha $n > N$, akkor

$$\mathbf{P}(\Omega_{mn}) > 1-\lambda.$$

Ekkor azonban

$$Q(\lambda, n) > m.$$

Mivel m tetszőlegesen megválasztható, ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók nem-negatívak és van olyan $\lambda (0 < \lambda < 1)$, hogy

$$|Q(\lambda, A)| \leqq K, A \in \mathfrak{S},$$

ahol K állandó, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \infty\right) = 1.$$

BIZONYÍTÁS. A 0 vagy 1 törvény szerint (l. [3] 60. o.) a következő két eset közül valamelyik fennáll:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \infty\right) = 1, \quad \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \infty\right) = 1.$$

Az első eset azonban nem lehetséges, mert akkor a 3. lemma értelmében azt kapnánk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} Q(\lambda, \{1, 2, \ldots, n\}) = \infty,$$

ami a feltétellel ellenkezik.

2. §. Az (1) sor konvergenciájának szükséges és elegendő feltételei

Ebben a paragrafusban két tételt bizonyítunk be.

1. TÉTEL. *Ha az* $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ *halmaz kompakt, akkor az* (1) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergál.*

Megfordítva, ha az (1) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergál, akkor az* $\{F(x, A), A \in S\}$ *halmaz kompakt.*

AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Tekintsük a következő sorozatot:

$$F(x, \{1\}), F(x, \{1, 2\}), \ldots, F(x, \{1, 2, \ldots, n\}), \ldots.$$

Mivel az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt, ebből a sorozatból kiválasztható egy olyan konvergens részsorozat, melynek határértéke szintén eloszlásfüggvény. Létezik tehát egy olyan $n_1, n_2, \ldots$ növekvő sorozat, és egy olyan $f(t)$ karakterisztikus függvény, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{l=1}^{n_k} f(t, \{l\}) = f(t).$$

Mivel $|f(t, \{l\})| \leqq 1$, ebből következik, hogy

$$\prod_{l=1}^{\infty} |f(t, \{l\})| = |f(t)|.$$

$f(t)$ karakterisztikus függvény, tehát létezik olyan pozitív T szám, hogy $|f(t)| > 0$, ha $|t| \leq T$. [1] 115. o. 2.7 és 112. o. 2.6 tételeiből következik, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \ldots$ állandók, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - c_k)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. A tétel bebizonyításához tehát csupán azt kell kimutatnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ebben az esetben a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sor átrendezhető oly módon, hogy az átrendezett $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}$ sor összege vagy $+\infty$, vagy $-\infty$.

Feltehetjük, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} = +\infty,$$

mert a $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} = -\infty$ eset a $\zeta_k = -\xi_k$ változók bevezetésével erre visszavezethető. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{i_k}$ jelenti a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ sor megfelelő átrendezettjét, akkor az előbbiek alapján azt kapjuk, hogy

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} \xi_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} (\xi_{i_k} - c_{i_k}) + \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \to +\infty, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Legyen $A_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Az (5) relációból a 3. lemma alapján azt kapjuk, hogy minden rögzített λ-ra $(0 < \lambda < 1)$

$$Q(\lambda, A_n) \to \infty, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ez azonban ellentmondás, mert feltettük, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{T}\}$ halmaz kompakt és ebből az 1. lemma alapján következik, hogy minden λ-hoz $(0 < \lambda < 1)$ tartozik olyan $K(\lambda)$ szám, hogy

$$|Q(\lambda, A)| \leq K(\lambda), A \in \mathfrak{T}.$$

A MÁSODIK ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Ha az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, \{k\})|$$

sor minden véges t-intervallumban egyenletesen konvergál ([1] 115. o. Theorem 2.7 (III)). Legyen $A = \{i_1, i_2, \ldots\}$. Az 1-nél nem nagyobb abszolút értékű $z_1, z_2, \ldots, z_r$ komplex számokra érvényes

$$|1 - z_1 z_2 \cdots z_r| \leq |1 - z_1| + |1 - z_2| + \cdots + |1 - z_r|$$

egyenlőtlenség alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\left|1 - \prod_{l=1}^{r} f(t, \{i_l\})\right| \leq \sum_{l=1}^{r} |1 - f(t, \{i_l\})|.$$

Elvégezve az $r \to \infty$ határátmenetet, következik, hogy

$$(6) \qquad |1 - f(t, A)| \leq \sum_{l=1}^{\infty} |1 - f(t, \{i_l\})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, \{k\})|.$$

A (6) egyenlőtlenség jobboldalán folytonos függvények egyenletesen konvergens sora áll, tehát az összegfüggvény folytonos. Ennek alapján (6)-ból leolvasható, hogy az $f(t, A), A \in \mathfrak{S}$ karakterisztikus függvények a $t = 0$ pontban egyenlő mértékben folytonosak és így a 2. lemma szerint az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Ha minden rögzített λ-ra $(0<\lambda<1)$ a $Q(\lambda, A)(A \in \mathfrak{T})$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{T}\}$ halmaz korlátos, akkor az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.

Megfordítva, ha az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor minden λ-hoz $(0<\lambda<1)$ tartozik olyan $K(\lambda)$ szám, hogy

$$|Q(\lambda, A)| \leqq K(\lambda), A \in \mathfrak{S}.$$

BIZONYÍTÁS. Az állítás az 1. lemma és az (1) tétel közvetlen következménye.

Az előző korolláriumban az (1) sor konvergenciáját biztosító feltétel lényegesen enyhíthető. Erre vonatkozik a

2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy létezik olyan λ_1, λ_2 számpár, $0<\lambda_1<\lambda_2<1$, hogy a $Q(\lambda_1, A) A \in \mathfrak{T})$, $Q(\lambda_2, A)(A \in \mathfrak{T})$ kvantilisek alkalmas választása mellett a $Q_1=\{Q(\lambda_1, A), (A \in \mathfrak{T})\}$, $Q_2=\{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{T}\}$ halmazok korlátosak. Ebben az esetben az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K olyan szám, melyre fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$\left.\begin{array}{l}|Q(\lambda_1, A)| \leq K, \quad Q(\lambda_1, A) \in Q_1, \\ |Q(\lambda_2, A)| \leq K, \quad Q(\lambda_2, A) \in Q_2.\end{array}\right. \quad A \in \mathfrak{T}.$$

Innen következik, hogy

$$\sup_{A \in \mathfrak{T}} \mathbf{P}(|\xi(A)|>K) \leq \sup_{A \in \mathfrak{T}} \mathbf{P}(\xi(A)<-K)+\sup_{A \in \mathfrak{T}} \mathbf{P}(\xi(A)>K) \leqq \lambda_1+1-\lambda_2<1.$$

Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\inf_{A \in \mathfrak{T}} \mathbf{P}(|\xi(A)| \leqq K)=\varrho>0,$$

ahonnan következik, hogy

$$\varlimsup_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right| \leqq K\right) \geqq \varrho>0.$$

Ebből az utolsó egyenlőtlenségből, [1] 121. o. Theorem 2. 9-ből és 112. o. Theorem 2. 6-ból következik, hogy léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots$ állandók, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-c_k)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ugyanúgy, mint az 1. tétel bizonyításánál, belátható, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|<\infty,$$

mert ellenkező esetben nem létezne olyan $\lambda(0<\lambda<1)$, melyre a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{T}\}$ halmaz (elemeinek csak egy megválasztásánál is) korlátos lenne. A

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k=\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-c_k)+\sum_{k=1}^{n} c_k$$

egyenlőségből az előbb mondottak alapján következik, hogy az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Ha a ξ_k valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak, akkor ahhoz, hogy az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergáljon, elegendő, ha valamilyen λ-ra, melyre $0<\lambda<1, \lambda \neq \frac{1}{2}$, a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz korlátos. Ekkor ugyanis minden $\mathfrak{F}$-hez tartozó A halmaz esetén a 0 érték $\frac{1}{2}$-kvantilise a $\xi(A)$ valószínűségi változónak, tehát a 2. tétel feltételei teljesülnek.

MEGJEGYZÉS. A 2. 2. tétel feltétele a korlátos kvantilis-halmazok számát illetőleg tovább már nem gyengíthető. Pontosabban, abból, hogy van olyan $\lambda_1 (0<\lambda_1<1)$, hogy a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz korlátos, még nem következik az (1) sor konvergenciája. Ha ugyanis a ξ_k valószínűségi változók azonos, szimmetrikus eloszlással rendelkeznek és $P(\xi_k=0)<1$, akkor az (1) sor minden sorrendben divergál, de $Q\left(\frac{1}{2}, A\right)$ megválasztható úgy, hogy

$$Q\left(\frac{1}{2}, A\right)=0, \; A \in \mathfrak{F}.$$

Végül megemlítek egy problémát. Ha $A_1, A_2, \ldots, \mathfrak{S}$-nek egy olyan sorozata, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=0$, akkor a (6) egyenlőtlenségből egyszerűen következik, hogy $\xi(A_n) \Longrightarrow 0$, ahol a $\Longrightarrow$ jel a sztochasztikus konvergenciát jelenti. Igaz-e az ennél erősebb

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} \xi(A_n)=0)=1$$

reláció is? Valószínűnek látszik, hogy található erre ellenpélda, mert abból, hogy az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens, még nem következik, hogy 1 valószínűséggel abszolút konvergens is. Példa erre a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \sin 2^n \pi x}{n}$$

sor.

IRODALOM

[1] J. L. DOOB, Stochastic processes (*New York, London,* 1953).
[2] B. V. GNYEGYENKO és A. N. KOLMOGOROV, Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai (*Akadémiai Kiadó, Budapest,* 1951).
[3] A. N. KOLMOGOROV, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Berlin,* 1933).

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZER A SZEKUNDER ELEKTRONEMISSZIÓ VIZSGÁLATÁRA

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

A szekunder elektronemisszió jelensége, amely 1900 óta ismeretes, LENARD, HULL és VON BAYER vizsgálatai nyomán, abban áll, hogy egy fémlemezből beeső elektronok hatására újabb elektronok lépnek ki. A beeső elektronok átadják energiájukat az anyag belsejében levő elektronoknak. Ezek, ha olyan energiára tesznek szert, amely a kilépési munkát le tudja győzni, kilépnek a fémből. Egyetlen beeső elektron hatására kilépő elektronok száma véletlen ingadozást mutat, azaz valószínűségi változó. Ezen változó valószínűség eloszlásának meghatározása képezi vizsgálatunk tárgyát. Ez az eloszlás általában függ a beeső elektron energiájától és a fém felületi sajátságaitól, főképpen a kilépési munkától.

A szekunder elektronok számának várható értékét az ún. szekunder elektronemissziós multiplikációs tényezőt többen (vö. pl. H. BRUINING [1]), a szórását V. K. ZWORYKIN, G. A. MORTON és L. MALTER [2], továbbá W. SCHOKLEY és I. R. PIERCE [3] határozták meg. A valószínűségeloszlás meghatározásával azonban még adós a fizika, amit H. BRUINING [1] (p. 72.) is felemlít.

BAY ZOLTÁN [4], [5], [6] munkáiban mutatott rá először, hogy elektronsokszorzóval a szekunder elektronok számának valószínűségeloszlását meg lehet határozni.

Az elektronsokszorozó oly berendezés, amely alkalmas individuális elektronok észlelésére. A primér elektron vákuumban sokszorozódva észlelhető elektronlavinát hoz létre. Az elektronok száma egymásután egy elektródasoron szekundér emisszióval sokszorozódik. Az első elektronsokszorozó SLEPIAN-tól származik (1923). Ennek hibája, hogy az egyes lemezekből kilépő elektronok nem esnek mind a következő lemezre. V. K. ZWORYKIN olyan elektronsokszorozót szerkesztett (1936), amely az egyes lemezekről jövő elektronokat a következő lemezre elektronoptikailag fokuszálja és így a sokszorozás folyamatában az összes elektronok részt vesznek.

Ha az elektronsokszorozó első lemezére a katódból individuális elektronokat bocsátunk, ami könnyen megvalósítható az elektronsokszorozó 10^{-9} sec-os felbontóképessége miatt (v. ö. BAY Z. és PAPP GY. [7]), úgy azok az egyes lemezeken sokszorozódva végülis az anódra eső elektronok számával arányos nagyságú diszkrét feszültségimpulzusokat okoznak az anódellenálláson. Az impulzusok amplitudói véletlen ingadozást mutatnak a szekunder elektronemisszió valószínűségi jellegének megfelelően.

A feszültségimpulzusok felerősítve katódsugár oszcillográfon szemlélhetők. A feszültségimpulzusok amplitudó szerinti eloszlását úgy határozhatjuk meg, hogy az adatokat mozgó filmre fotografáljuk és az egyes amplitudókat megmérjük (v. ö. BAY Z. [5]). Az így kapott eloszlás többnyire lépcsőzetes. Folytonos eloszlás vehető fel például DALLOS ANDRÁS [8] munkájában leírt eljárással.

BAY ZOLTÁN [4], [5], [6] hívta fel a figyelmet arra, hogy a feszültségimpulzusok amplitudó szerinti eloszlásának valószínűségszámítási vizsgálata megadja a primer elektronok által kiváltott szekunder elektronok számának valószínűség eloszlását.

A fenti gondolat felhasználásával az 1940-es évek után az Egyesült Izzó (Tungsram) Kutatólaboratóriumában több módszert dolgoztak ki a szekunder elektronok száma valószínűségeloszlásának meghatározására. Így BAY ZOLTÁN és PAPP GYÖRGY az ortogonális függvények módszerét, GRÜNWALD GÉZA és tőle függetlenül MAKAI ENDRE a generátorfüggvények módszerét. Ezek a vizsgálatok azonban gyakorlati számításra nehezen alkalmazhatók és eddig nem kerültek publikálásra. A fenti kérdés megoldására gyakorlatilag alkalmazható módszert ad FARAGÓ PÉTER és *szerző* [9] dolgozata.

Az elméleti vizsgálat szempontjából kétféle problémát kell megkülönböztetni:

1. Az elektronkiváltás mechanizmusa minden egyes lemezen ugyanaz, vagyis a szekunder elektronok száma minden egyes lemezen ugyanazon valószínűségeloszlást követi és meg akarjuk határozni az egy lemezre érvényes valószínűségeloszlást.

2. Az elektronkiváltás körülményei lemezenként változnak és meg akarjuk határozni az első lemezre vonatkozó valószínűségeloszlást.

Mindkét probléma tárgyalva van a [9] munkában, abban az esetben, mikor a katódról jövő primér elektronokat először az első, majd a második sokszorozó lemezre engedjük és az ilyen módon kapott két végső impulzus eloszlás összehasonlításából határozzuk meg az első lemezre érvényes valószínűség eloszlást.

Jelen munkánkban megmutatjuk, hogy az 1. probléma megoldására nem szükséges két amplitudó eloszlás megadása, mert egyetlen eloszlás ismerete is megengedi az egy lemezre vonatkozó szekunder elektronok száma eloszlásának meghatározását. Meggondolásainkban feltesszük, hogy az elektronsokszorozónál a sokszorozásban az összes elektronok részt vesznek, ami biztosítva van akkor, ha az elektronoptikai fokuszozás tökéletes, továbbá, hogy nem lép fel számottevő tértöltés, amely visszatérésre kényszeríthet egyes elektronokat.

1. §. Az elektronsokszorozás folyamata

Az elektronsokszorozóban lejátszódó elektronsokszorozás folyamatának leírására az elágazó (vagy kaszkád) folyamatok elmélete használható fel. Ez az elmélet még a múlt században családnevek kihalásának vizsgálatával vette kezdetét. Azóta pedig számos más, gyakorlati és elméleti vizsgálat tárgyát képezte. Ezek közül csak a következőket említjük fel: A. DE CONDOLLE [10], (388 o.) — H. W. WATTSON és F. GALTON [11], [12], A. K. ERLANG [13], A. J. LOTKA [14], R. A. FISHER [15], [16], J. F. STEFFENSEN [17], P. M. WOODWARD [18], T. E. HARRIS [19], [23], J. B. S. HALDANE [20], R. OTTER [21] J. L. GOOD [22], A. N. KOLMOGOROV [24], A. N. KOLMOGOROV és N. A. DIMITRIJEV [25], W. FELLER [26].

Tekintsünk egy olyan elektronsokszorozót, amelynél a katódról individuális elektronok indulnak el és az elektronkiváltás mechanizmusa minden egyes sokszorozó lemezen hasonló törvénynek engedelmeskedik. Mégpedig legyen p_j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ annak a valószínűsége, hogy egy beeső elektron egy lemezből j szekunder elektront vált ki. Feltehetőleg az egyes elektronok által kiváltott szekunder elektronok számai egymástól függetlenek. Jelölje az elektronsokszorozó katódjáról kiinduló primér elektron $(\nu_0=1)$ által létrehozott elektronlavinában az egyes fokozatokban kiváltott elektronok számait rendre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ valószínűségi változó. Ha az elektronsokszorozó fokozatainak száma n, úgy ν_n jelöli az anódra érkező elektronok számát és az elektronsokszorozó anódellenállásán megjelenő feszültségimpulzus amplitudója arányos ν_n-nel.

A fent elmondottak szerint feltehetjük, hogy a $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ valószínűségi változókat a következőképpen értelmezhetjük.

A ν_1 valószínűségi változó eloszlása:

$$\mathbf{P}\{\nu_1=j\}=p_j, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Ha $\nu_n=j$ $(n=1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots)$, úgy ezen feltétel mellett ν_{n+1} egyenlő j számú ν_1-gyel megegyező eloszlású független valószínűségi változó összegével, míg, ha $\nu_n=0$ $(n=1, 2, \ldots)$ úgy $\nu_{n+1}=0$.

A fenti értelmezésből könnyen következik az is, hogy ha $\nu_1=j$ $(j=1, 2, \ldots)$, úgy ezen feltétel mellett ν_{n+1} úgy tekinthető, mint j számú ν_n-nel megegyező eloszlású független valószínűségi változó összege $(n=1, 2, \ldots)$, míg ha $\nu_1=0$, úgy $\nu_{n+1}=0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

A $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n, \ldots$ valószínűségi változók eloszlása könnyen meghatározható az elágazó folyamatok fentemlített elmélete segítségével. Mégpedig legyen a p_j valószínűségek generátorfüggvénye

$$u(t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j, \tag{2}$$

amely konvergens, ha $|t| \leq 1$. $u(t)$ segítségével sorjában felírhatók a ν_n változók generátorfüggvényei. Legyen $n = 0, 1, 2, \ldots$-re

$$(3) \qquad u_n(t) = \mathbf{E}\{t^{\nu_n}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_n = j\} t^j.$$

Ekkor felírható, hogy $u_0(t) = t$, $u_1(t) = u(t)$ és

$$(4) \qquad u_{n+1}(t) = u[u_n(t)], \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ezen utóbbi rekurzív képlet segítségével sorjában kiszámítható $u_2(t), u_3(t), \ldots$. A (4) képlet onnan adódik, hogy ν_{n+1} fenti értelmezése alapján felírható, hogy

$$\mathbf{E}\{t^{\nu_{n+1}}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_n = j\} [\mathbf{E}\{t^{\nu_1}\}]^j.$$

Megjegyezzük, hogy (4)-hez hasonlóan fennáll, hogy

$$(5) \qquad u_{n+1}(t) = u[u_n(t)], \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ugyanis a ν_{n+1} változó fentemlített második értelmezése szerint felírható, hogy

$$\mathbf{E}\{t^{\nu_{n+1}}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_1 = j\} [\mathbf{E}\{t^{\nu_n}\}]^j.$$

A fenti meggondolásokból kitűnik, hogy ha ismerjük a $\{p_j\}$ valószínűség eloszlást, úgy ki tudjuk számitani a $\nu_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ változók eloszlását is. Mégpedig az $u_n(t)$ generátorfüggvény Taylor-sorba fejtésében t^j együtthatója szolgáltatja a $\mathbf{P}\{\nu_n = j\}$ valószínűséget. Mivel egy n fokozatú elektronsokszorozó által szolgáltatott feszültségimpulzusok amplitudói arányosak ν_n-nel, tehát így $\{p_j\}$ ismeretében meghatározhatjuk a feszültségimpulzusok amplitudó eloszlását. Ez a számítás a generátorfüggvények segítségével sokszor elég bonyolult. A $\mathbf{P}\{\nu_n = j\}$ valószínűségek közelítő kiszámítására Jánossy Lajos [27], [28] adott gyakorlatilag alkalmazható módszert.

Az a feladat, amellyel most kívánunk foglalkozni, az előzőnek éppen fordítottja. Most feltesszük, hogy ismerjük az elektronsokszorozó feszültség impulzusainak amplitudó eloszlását, azaz n fokozatú elektronsokszorozó esetén ismerjük a $\mathbf{P}\{\nu_n = j\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűség eloszlást és meg akarjuk határozni az egy lemezre vonatkozó $\{p_j\}$ valószínűségeloszlást.

Megjegyzés. Legyen ν_n várható értéke $a_n = \mathbf{E}\{\nu_n\}$ és szórásnégyzete $\sigma_n^2 = \mathbf{D}^2\{\nu_n\}$. Ha

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j$$

véges, úgy fennáll

$$(6) \qquad a_n = a^n$$

és ha

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (j-a)^2 p_j$$

véges, úgy fennáll

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 \frac{a^{2n} - a^n}{a^2 - a}. \tag{7}$$

A fenti képletek könnyen adódnak annak tekintetbevételével, hogy $n = 0, 1, 2, \ldots$-re:

$$\mathbf{E}\{\nu_{n+1}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_1 = j\}\,[j\,\mathbf{E}\{\nu_n\}],$$

azaz $\mathbf{E}\{\nu_{n+1}\} = \mathbf{E}\{\nu_1\}\,\mathbf{E}\{\nu_n\}$ és

$$\mathbf{E}\{\nu_{n+1}^2\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_1 = j\}\,[j^2\,\mathbf{E}^2\{\nu_n\} + j\,\mathbf{D}^2\{\nu_n\}],$$

azaz $\mathbf{D}^2\{\nu_{n+1}\} = \mathbf{D}^2\{\nu_1\}\,\mathbf{E}^2\{\nu_n\} + \mathbf{D}^2\{\nu_n\}\,\mathbf{E}\{\nu_1\}$.

2. §. A $\{p_j\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

Tegyük fel, hogy az n fokozatú elektronsokszorozónál ismerjük a $\mathbf{P}\{\nu_n = j\} = P_j\ (j = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségeket és meg akarjuk határozni a $p_j\ (j = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségeket. A P_j valószínűségek $u_n(t)$ generátorfüggvénye és a p_j valószínűségek $u(t)$ generátorfüggvénye között (4) és (5) alapján fennáll a következő összefüggés:

$$u_n[u(t)] = u[u_n(t)]. \tag{8}$$

Ha $u_n(t)$ ismeretes, úgy ennek segítségével $u(t)$ még nem határozható meg egyértelműen. Ugyanis $u(t)$ helyére beírva az $u_2(t), u_3(t), \ldots$ generátorfüggvényeket, könnyen látható, hogy azok is kielégítik a fenti függvényegyenletet. Ha azonban az n számot is megadottnak tekintjük, úgy a megoldás határozottá válik. Jelenleg nem foglalkozunk a (8) függvényegyenlet általános vizsgálatával. Csupán arra a speciális esetre szorítkozunk, midőn a ν_1 változó összes momentumai léteznek és végesek, azaz fennáll

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^s p_j < \infty \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Ez a helyzet például akkor, ha ν_1 korlátos valószínűségi változó. A gyakorlatban kizárólag ez az eset fordul elő. Ha ν_1 momentumai végesek, úgy ν_n momentumai is végesek lesznek. Egyszerű összefüggés áll fenn a ν_1 és ν_n változók binomiális momentumai között.

Legyen a ν_1 változó s-edik binomiális momentuma

$$b_s = \mathbf{E}\left\{\binom{\nu_1}{s}\right\} = \sum_{j=s}^{\infty} \binom{j}{s} p_j \tag{10}$$

és a ν_n változó s-edik binomiális momentuma

$$B_s = \mathbf{E}\left\{\binom{\nu_n}{s}\right\} = \sum_{j=s}^{\infty} \binom{j}{s} P_j. \tag{11}$$

A binomiális momentumok könnyen kifejezhetők a generátorfüggvények segítségével, mégpedig fennáll, hogy

$$b_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s u(t)}{dt^s}\right)_{t=1} \tag{12}$$

és

$$B_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s u(t)}{dt^s}\right)_{t=1}. \tag{13}$$

Most nyilvánvalóan felírható, hogy

$$B_0 = b_0 = 1 \tag{14}$$

és (6) szerint

$$B_1 = b_1^n. \tag{15}$$

A többi binomiális momentum pedig (8) differenciálásával határozható meg. Ugyanis fennáll (8) szerint

$$\left(\frac{d^s u[u_n(t)]}{dt^s}\right)_{t=1} = \left(\frac{d^s u_n[u(t)]}{dt^s}\right)_{t=1}.$$

Most alkalmazhatjuk az összetett függvények differenciálásának FAA DI BRUNO formuláját (vö. FAA DI BRUNO [29], CH. JORDAN [30], 33. o. E. LUKÁCS [31]), amely szerint fennáll

$$\sum_{k=1}^{s} b_k \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=k \\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+s\alpha_s=s}} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!} B_1^{\alpha_1} B_2^{\alpha_2}\ldots B_s^{\alpha_s} = \tag{16}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} B_k \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=k \\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+s\alpha_s=s}} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2}\ldots b_s^{\alpha_s}.$$

Innen sorjában felírható, hogy

$$B_2 = b_2 \frac{B_1^2 - B_1}{b_1^2 - b_1},$$

$$B_3 = \frac{b_3(B_1^3 - B_1) + 2b_2 B_2(B_1 - b_1)}{b_1^3 - b_1},$$

stb.

1. Megjegyzés: Abban az esetben, ha $b_1 = 1$, a fenti képletek nem alkalmazhatók, de $b_1 \to 1$ határátmenettel könnyen kapjuk, hogy ekkor

$$B_0 = B_1 = 1$$

és

$$B_2 = n b_2,$$
$$B_3 = 2n b_3 + 2(n-1) b_2 B_2,$$

stb.

2. *Megjegyzés:* A fentiek szerint a $\{b_s\}$ binomiális momentumok segítségével sorjában előállíthatjuk a ν_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ változók binomiális momentumait is és így azok eloszlását is meghatározhatjuk. Azaz, a $\{p_j\}$ valószínűség eloszláshoz $n=1, 2, \ldots$ paraméterekhez tartozó eloszlássorozat rendelhető hozzá. Az eloszlások ezen családja azonban kiterjeszthető az x paraméter $0 \leqq x < \infty$ folytonos értékeire is, ha n helyett egyszerűen x-t írunk a B_s-t kifejező képletekben.

A fentiek szerint a B_s binomiális momentumok ismeretéből a b_s binomiális momentumok is meghatározhatók. Mégpedig fennáll, hogy

$$b_0 = 1$$
$$b_1 = B_1^{1/n}$$

és (16) szerint

$$b_2 = B_2 \frac{b_1^2 - b_1}{B_1^2 - B_1},$$

$$b_3 = \frac{B_3(b_1^3 - b_1) - 2 B_2 b_2 (B_1 - b_1)}{B_1^3 - B_1},$$

$$b_4 = \frac{B_4(b_1^4 - b_1) - b_2(B_2^2 + 2 B_1 B_3) - 3 b_3 B_1^2 B_2 + (b_2^2 + 2 b_1 b_3) B_2 + 3 b_1^2 b_2 B_3}{B_1^4 - B_1},$$

stb.

A $b_1 = 1$ esetre is hasonló képletek írhatók fel, az 1. *Megjegyzés*ben szereplő képletek alapján.

Ha a $\{p_j\}$ valószínűségeloszlás összes b_s binomiális momentumait ismerjük, úgy ezek segítségével a p_j valószínűségek is egyértelműen meghatározhatók. JORDAN KÁROLY következő képlete

$$(17) \qquad p_j = \sum_{s=j}^{\infty} (-1)^{s-j} \binom{s}{j} b_s$$

célra vezet, ha a (17) sor konvergens. Ha a ν_1 változó korlátos, úgy a b_s binomiális momentumok bizonyos s indextől kezdve eltünnek és ekkor (17) is véges összegre redukálódik.

(17) könnyen igazolható

$$b_s = \sum_{k=s}^{\infty} \binom{k}{s} p_k$$

tekintetbe vételével. Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalát $(-1)^{s-j}\binom{s}{j}$-vel szorozzuk és az egyenleteket $s=j, j+1, \ldots$-re összegezzük, úgy megkapjuk

(17)-et, ugyanis

$$\sum_{s=j}^{k}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}\binom{k}{s}=\begin{cases}1 & \text{ha } k=j\\ 0 & \text{ha } k\neq j.\end{cases}$$

Ha a (17) sor nem konvergens, úgy p_j kiszámítására más szokásos módszerek alkalmazhatók.

A fent elmondottak szerint tehát, ha ismerjük a P_j valószínűségek pontos értékeit, úgy az ismeretlen p_j valószínűségeket is ki tudjuk számítani. A gyakorlatban rendszerint csak közelítőleg ismerjük a P_j valószínűségeket. Ekkor az a célunk, hogy a B_s binomiális momentumokat is jó közelítéssel meghatározzuk. Ugyanis a B_s-ek ismeretében a fenti módszer már alkalmazható. Gyakorlatilag a legnagyobb bajt P_0 és általában P_j kis j értékekre történő meghatározása okozza. Ezekre külön mérést kell végezni, ugyanis a feszültségimpulzusok amplitudó statisztikájából P_0 elvben sem határozható meg, míg P_j kis j értékekre a mérési küszöb miatt gyakorlatilag nem határozható meg.

3. §. A $\{p_j\}$ valószínűségeloszlás közelítő meghatározása

Ha a $\{p_j\}$ valószínűségeloszlásnak nem ismerjük az összes binomiális momentumait, hanem csak a $b_0, b_1, \ldots, b_r$ momentumokat, úgy a p_j valószínűségeket is csak közelítőleg tudjuk kiszámítani. Erre nézve legjobban beválik JORDAN KÁROLY [32], [33] ortogonális momentumokon alapuló módszere. Ezen módszer alkalmazásához feltevéssel kell élni a ν_1 változó korlátjára nézve. Tegyük fel, hogy $\nu_1 < N$, azaz $p_N = p_{N+1} = \cdots = 0$. Az N szám megbecsülhető az amplitudó eloszlás alapján vagy akár a b_s momentumok segítségével is. Ha például $\nu_n < N^n$, úgy mindenesetre $\nu_1 < N$. A p_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ valószínűségekre közelítőleg felírható, hogy

$$p_j \sim \bar{p}_j = \sum_{m=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{m} C_{m\nu}\binom{j}{\nu}\Theta_m \tag{18}$$

ahol

$$\Theta_m = \sum_{\nu=0}^{m}\frac{\beta_{m\nu}}{\binom{N}{\nu+1}}b_\nu \tag{19}$$

és

$$\beta_{m\nu} = (-1)^{m+\nu}\binom{m+\nu}{m}\binom{m}{\nu}\frac{1}{\nu+1}, \tag{20}$$

$$C_{m\nu} = (-1)^{m+\nu}(2m+1)\binom{m+\nu}{m}\frac{\binom{N-\nu-1}{m-\nu}}{\binom{N+m}{m}}. \tag{21}$$

A $\beta_{m\nu}$ és $C_{m\nu}$ mennyiségekre JORDAN KÁROLY [32] munkájában találhatók táblázatok.

Ennek a módszernek nagy előnye az, hogy ha a pontosságot növelni kívánjuk olyképpen, hogy egy újabb, a b_{r+1}-edik momentumot is tekintetbe vesszük, akkor a korábban végzett számítások nem mennek veszendőbe, hanem csak egy póttaggal kell kiegészíteni azokat.

A megközelítés hibáját a következő kifejezés méri:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(p_j-\bar{p}_j)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} p_j^2 - \sum_{m=0}^{r} |C_{m0}|\Theta_m^2. \tag{22}$$

Ebből a kifejezésből látszik, hogy miként csökken a hiba, ha a tekintetbe vett momentumok számát növeljük. Eszerint látszik, hogy célszerű először a $|C_{m0}|\Theta_m^2 (m=1,2,\ldots)$ mennyiségeket kiszámítani és csak azokat a momentumokat tekintetbe venni, amelyekre $|C_{m0}|\Theta_m^2$ még nem elhanyagolható.

A $b_s (s=0,1,2,\ldots)$ momentumok ismeretében több más módszert is alkalmazhatunk a p_j valószínűségek közelítő kiszámítására. Ezek közül legismertebb a legkisebb négyzetek elve és a momentumok elve. (Lásd pl. JORDAN KÁROLY [34]).

4. §. Gyakorlati módszer a B_s binomiális momentumok meghatározására

Ha az összes $P_j (j=0,1,2,\ldots,N-1)$ valószínűségeket ismerjük, úgy a B_s binomiális momentumokat célszerűen G. F. HARDY összegező eljárásával határozhatjuk meg (v. ö. CH. JORDAN [30], 460. o.) Eszerint az eljárás szerint, ha

$$\varphi(i,j) = \varphi(i-1,j) + \varphi(i,j-1) \tag{23}$$

differenciaegyenletet tekintjük $\varphi(1,j) = P_{N-1}(j=1,2,\ldots)$ és $\varphi(i,1) = P_{N-i}$ $(i=1,2,\ldots)$ kezdeti feltételekkel, úgy $\varphi(N-s, s+2) = B_s$. A (23) differenciaegyenlet a kezdeti értékekből kiindulva könnyen megoldható egyszerű összegezéssel.

Sok mérési eljárásnál a feszültségimpulzusok amplitudóeloszlása folytonos eloszlásként adódik. Ilyen esetekben rendszerint az $\mathbf{E}\{\nu_n^s\} = M_s (s=0,1,2,\ldots)$ momentumok határozhatók meg könnyen (például Stieltjes-integrátorral). A B_s binomiális momentumok az M_s momentumok segítségével a következőképpen határozhatók meg

$$B_s = \frac{1}{s!}\sum_{j=1}^{s} S_s^j M_j, \tag{24}$$

ahol S_s^j az elsőfajú Stirling-számokat jelöli (vö. CH. JORDAN [30], 142. o.)

5. §. Példa a $\{p_j\}$ valószínűségek meghatározására

Tegyük fel, hogy

(25) $$P_j = p(1-p)^{j-1}$$

azaz $\{P_j\}$ Pascal-eloszlás. Ekkor könnyű számítással $B_0 = 1$ és

(26) $$B_s = \frac{(1-p)^{s-1}}{p^s} \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

adódik.

Most (16) alapján $b_0 = 1$ és

(27) $$b_s = \frac{(1-\varrho)^{s-1}}{\varrho^s}$$

lesz, ahol $\varrho = p^{1/n}$. Most a (17) képlet nem alkalmazható minden esetben p_j meghatározására, de ha tekintetbe vesszük, hogy (27) szerint

$$u(t) = \frac{t\varrho}{1-(1-\varrho)t}$$

úgy azt nyerjük, hogy

(28) $$p_j = \varrho(1-\varrho)^{j-1}.$$

Ha a P_j valószínűségeloszlást olyan módszerrel határozzuk meg, amely folytonos eloszlásra vezet, akkor a $\{P_j\}$ diszkrét eloszlás helyett $g(x) = e^{-px}p$ $(0 \leqq x < \infty)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást nyerünk. Ezen eloszlás s-edik momentuma

$$M_s = \int_0^\infty x^s g(x)\,dx = \frac{s!}{p^s}$$

és így (24) szerint

$$B_1 = 1/p,$$

$$B_2 = \frac{(2-p)}{2p^2},$$

$$B_3 = \frac{3-3p+p^2}{3p^3},$$

stb. Ha $\varrho = p^{1/n}$, úgy ennek segítségével

$$b_1 = 1/\varrho,$$

$$b_2 = \frac{(1-\varrho)}{\varrho^2}\left(1 + \frac{p}{2(1-p)}\right),$$

stb. adódik, amely $n \to \infty$ $(p \to 0)$ határesetben a (27) képleteket szolgáltatja.

6. §. Egyéb eredmények

1. *A félinvariánsok módszere.* A korábbiakban a ν_1 és ν_n valószínűségi változók binomiális momentumai között állapítottunk meg összefüggéseket. Észrevesszük, hogy hasonló összefüggések érvényesek a félinvariánsok között is.

Definiáljuk ν_1 és ν_n félinvariánsait a szokott módon

$$\lambda_s = \left[\frac{d^s \log u(e^\omega)}{d\omega^s}\right]_{\omega=0} \tag{29}$$

és

$$\Lambda_s = \left[\frac{d^s \log u_n(e^\omega)}{d\omega^s}\right]_{\omega=0}. \tag{30}$$

Legyen $f_n(\omega) = \log u_n(e^\omega)$ és $f(\omega) = \log u(e^\omega)$ úgy (8) szerint felírható, hogy

$$f[f_n(\omega)] = f_n[f(\omega)]. \tag{31}$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy (6) szerint fennáll

$$\Lambda_1 = \lambda_1^n \tag{32}$$

úgy

$$\left(\frac{d^s f[f_n(\omega)]}{d\omega^s}\right)_{\omega=0} = \left(\frac{d^s f_n[f(\omega)]}{d\omega^s}\right)_{\omega=0}$$

egyenletekből ($s=2, 3, \ldots$) a $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ félinvariánsok is meghatározhatók. Ugyanis (16)-hoz hasonlóan fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+s\alpha_s=s}} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_s!} \Lambda_1^{\alpha_1}\Lambda_2^{\alpha_2}\cdots\Lambda_s^{\alpha_s} =\\ = \sum_{k=1}^{s} \Lambda_k \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+s\alpha_s=s}} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_s!} \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\cdots\lambda_s^{\alpha_s}\end{aligned} \tag{33}$$

ahonnan

$$\Lambda_2 = \lambda_2 \frac{\Lambda_1^2 - \Lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_1},$$

$$\Lambda_3 = \frac{\lambda_3(\Lambda_1^3 - \Lambda_1) + 2\lambda_2\Lambda_2(\Lambda_1 - \lambda_1)}{\lambda_1^3 - \lambda_1},$$

stb. Ha előállítjuk a $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás Λ_j félinvariánsait, úgy ezek segítségével a $\{p_j\}$ eloszlás λ_j félinvariánsai is egyértelműen meghatározhatók a fenti képletek alapján. Így a $\{p_j\}$ valószínűségeloszlás meghatározására a binomiális momentumok módszere mellett a félinvariánsok módszerét is alkalmazhatjuk.

2. *Az elektronlavina kihalásának valószínűsége.* Legyen $\mathbf{P}\{\nu_n = 0\} = \pi_n$, azaz π_n annak a valószínűsége, hogy az n-edik fokozatig megszűnik az elektronlavina. Könnyen látható, hogy a π_n valószínűségek monoton növekvő sorozatot alkotnak abban az esetben, ha $p_0 \neq 0$ és $p_0 \neq 1$. Ha $p_0 = 0$, úgy $\pi_n = 0$ és ha $p_0 = 1$, úgy $\pi_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Az elmondottak szerint tehát létezik a $\pi^* = \lim_{n\to\infty} \pi_n$ határérték. Mivel (5)-ből $t = 0$ helyettesítéssel $\pi_{n+1} = u(\pi_n)$ adódik, tehát fennáll $\pi^* = u(\pi^*)$. A π^* a $t = u(t)$ egyenletnek a legkisebb abszolút értékű gyöke. Ha $a = \sum j p_j \leq 1$, de $p_j \neq 1$, úgy $\pi^* = 1$ míg, ha $a > 1$, úgy π^* a $t = u(t)$ egyenletnek egyetlen $0 \leq |t| < 1$ feltételnek eleget tevő gyöke (vö. J. F. STEFFENSEN [17]).

3. *A ν_n változó aszimptotikus viselkedése.* Tekintsük a $\nu_n^* = \nu_n / \mathbf{E}\{\nu_n\}$ valószínűségi változót. Ennek várható értéke $\mathbf{E}\{\nu_n^*\} = 1$ és szórásnégyzetének határértéke $\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2\{\nu_n^*\} = \sigma^2 a(a-1)$, ha $a > 1$, míg $\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2\{\nu_n^*\} = 0$, ha $a \leq 1$. Ha $a > 1$, úgy létezik $\lim_{n\to\infty} P\{\nu_n^* \leq x\} = F(x)$ határeloszlás és ha $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$, úgy fennáll $\Re(s) \geq 0$-ra, hogy $\varphi(as) = u[\varphi(s)]$. (D. HAWKINS és S. ULAM [35], A. M. JAGLOM [36]). Továbbá az is érvényes, hogy ha $a > 1$, akkor létezik egy olyan ν^* valószínűségi változó, hogy $\mathbf{P}\{\lim \nu_n^* = \nu^*\} = 1$ (T. E. HARRIS [23]). Egyéb feltételes határeloszlástételek találhatók A. M. JAGLOM [36] munkájában.

Jelen dolgozatban közölt eredményeket szerző 1948—1949-ben az Egyesült Izzó (Tungsram) Kutató Laboratóriumában végzett munkája során nyerte. Szerző akkor remélte, hogy eredményeit kísérleti adatok feldolgozásánál is alkalmazhatja. Mivel erre ezideig nem került sor, ezért célszerűnek gondolta az elméleti eredmények önmagukban való közlését is, remélve, hogy esetleg a kísérleti fizikusok körében felhasználásra talál.

IRODALOM

[1] H. BRUINING, Die Sekunderelektronen-Emission (Berlin, 1942).

[2] V. K. ZWORYKIN, G. A. MORTON—L. MALTER, Secondary emission multiplier a new electronic device. *Proc. Inst. Radio Eng.* **24** (1936) 351—376.

[3] W. SCHOKLEY—I. R. PIERCE, Theory of noise for electronmultipliers *Proc. Inst. Radio Eng.* **26** (1938), 321—332.

[4] BAY Z., Elektronsokszorozó, mint elektronszámláló. *MTA Mat. és Term. Tud. Értesítő* **57** (1938), 513—541.

[5] BAY Z., Nagyenergiájú korpuszkulák és fotonok számlálása elektronsokszorozóval. *MTA Mat. és Term. Tud. Értesítő* **59** (1940) 106—114.

[6] Z. BAY, Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler. *Zeitschrift für Physik* 117 (1941), 227—245.

[7] Z. Bay—Gy. Papp, Coicidence device of 10^{-8}—10^{-9} second resolving power. *Rev. Sci. Inst.* **19** (1948), 565—569.

[8] Dallos A., Impulzus spektrográfia. *MTA III. Osztályközl.* **2** (1952), 173—184.

[9] P. S. Faragó—L. Takács, The probability distribution of the number of secondary electrons. *Hung. Acta Phys.* **1** (1949), 43—52.

[10] A. de Condolle, Histoire des Sciences et des Savants depuis deux siècles. *Geneva*, 1873.

[11] H. W. Wattson—F. Galton, Problem 4001. *Educational Times* **19** (1873), 103—105.

[12] H. W. Wattson—F. Galton, On the probability of the extinction of families. *Journ. Anthrop. Inst.* **4** (1874), 138—144.

[13] A. K. Erlang, Problem 15. *Matematisk Tidsskrift*, B (1929), 36.

[14] A. J. Lotka, The extinction of families. *J. Washington Acad. of Sciences* **21** (1931), 377—380, 453—459.

[15] R. A. Fisher, On the dominance ratio. *Proc. Roy. Soc. Edin.* **42** (1922) 321—341.

[16] R. A. Fisher, The genetical theory of natural selection *Oxford*, 1930.

[17] J. F. Steffensen, Om sandsynligheden for at afkommet uddor. *Matematisk Tidsskrift* B (1930), 19—23.

[18] P. M. Woodward, A statistical theory of cascade multiplication. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **44** (1947), 404—412.

[19] T. E. Harris, Branching processes. *Annals of Math. Stat.* **19** (1948), 474—494.

[20] J. B. S. Haldane, Some statistical problems arising in genetics. *J. Roy. Stat. Soc.* B. **11** (1949), 1—9.

[21] R. Otter, The multiplicative process. *Annals of Math. Stat.* **20** (1949) 206—224.

[22] I. J. Good, The number of individuals in a cascade process. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1949), 360—363.

[23] T. E. Harris, Some mathematical models for branching processes. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium* (1951), 305—327.

[24] А. Н. Колмогоров, К решению одной биологической задачи. Томск, Изв. НИИ матем. и мех. ун—та **2** (1938), 7—12.

[25] А. Н. Колмогоров и Н. А. Димитриев, Ветвяшиеся случайные процессы Доклади Акад. Наук СССР **56** (1947), 7—10.

[26] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications. (*New-York*, 1950).

[27] Jánossy L., Egy az elektronsokszorozó elméletében fellépő sztochasztikus folyamatról. *MTA III. Osztályközl.* **1** (1951), 357—367.

[28] Jánossy L., Az elektronsokszorozó statisztikájáról. *Magy. Fiz. Folyóirat* **3** (1955), 345—362.

[29] Faa di Bruno, Sullo sviluppo delle funzioni. *Annali de scienze mat. e fis. comp. da B. Tortolini* **6** (1855), 479—480.

[30] Ch. Jordan, Calculus of finite differences. *Budapest*, 1939.

[31] E. Lukács, Applications of Faa di Bruno's formula in mathematical statistics. *Amer. Math. Monthly* **62** (1955), 340—348.

[32] Ch. Jordan, Note on approximation and graduation by orthogonal moments. *Hung. Acta Math.* **1** (1949) 4—9.

[33] Ch. Jordan, Approximation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polynomials. *Annals of Math. Stat.* **3** (1932), 257—357.

[34] Jordan K., Matematikai statisztika, *Budapest*, 1927,

[35] D. Hawkins—S. Ulam, Theory of multiplicative processes, I. *Los Alamos dec. doc.* 265, 1944.

[36] А. М. Яглом, Некотоые пределные теоремы теории ветвяшихся случайных процессов Доклади Акад Наук СССР 56 (1947) 795—798.

KÉT GYŰRŰELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

SZÁSZ FERENC

1. §. Bevezetés

A modern algebrában gyakoriak az olyan törekvések, amelyek bizonyos előre kiszabott tulajdonsággal rendelkező algebrai struktúrák teljes osztályának explicit leírására irányulnak. Ebben a dolgozatban két hasonló gyűrűelméleti problémáról van szó, amelyek a [2] és [7] csoportelméleti dolgozatok problémáinak gyűrűelméleti megfelelői.

A modern algebra alapfogalmait az olvasó megtalálhatja pl. a [3], [4] és [6] könyvekben. Ezért mellőzzük a terminológiai és jelölési megjegyzéseket, csupán arra emlékeztetünk, hogy egy tetszőleges R gyűrűt akkor hívunk *ciklikus*nak, ha a gyűrű additív csoportja ciklikus (lásd közelebbről a [6] könyvet). Például a racionális egész számok I gyűrűje ciklikus.

Egy tetszőleges R gyűrűt P_1*-tulajdonságú* gyűrűnek nevezünk, ha az R gyűrű minden S részgyűrűje az R gyűrűnek nR többszöröse, ahol nR jelöli az összes nr elemek halmazát ($n \in I$ és $r \in R$). Világos, hogy P_1-tulajdonságú gyűrű bármely homomorf képe is P_1-tulajdonságú. Az I gyűrű nyilvánvalóan P_1-tulajdonságú gyűrűre is példa.

Egy tetszőleges R gyűrűt P_2*-tulajdonságú*nak nevezünk, ha az R gyűrű bármely S részgyűrűje (gyűrűelméleti értelemben) direkt összeadandója az R gyűrűnek. Például bármely véges K_p prímtest P_2-tulajdonságú.

Dolgozatunknak az a célja, hogy megadjuk a P_1-tulajdonságú, illetve a P_2-tulajdonságú gyűrűk teljes osztályának explicit leírását. Azt találjuk, hogy ezek a gyűrűk kommutatívok.

2. §. A P_1-tulajdonságú gyűrűk leírása

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. TÉTEL. *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor ciklikus, ha P_1-tulajdonságú.*

I. MEGJEGYZÉS. Az 1. tétel problémájának duálisaként megemlítjük azt, hogy a [8] dolgozat tétele alapján világos a következő állítás: egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor ciklikus, ha az R gyűrű bármely nem-triviális nR többszöröse ciklikus (az nR többszörös triviális, ha $n = 1$, 0 vagy -1).

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt azt igazoljuk, hogy zérusosztómentes P_1-tulajdonságú R gyűrű szükségképpen kommutatív. Világos ui. az, hogy R-nek bármely S részgyűrűje ideál az R gyűrűben, következésképpen, ha $a \neq 0$ és $b \in R$ akkor $ab = a' \in \{a\}$, ahol $\{M\}$ jelöli az M részhalmazzal generált részgyűrűt R-ben. Ekkor $aa' = a'a$ alapján kapjuk, hogy $a(ba - a') = (ab - a')a = 0$, és minthogy R zérusosztómentes, $ab = ba = a'$.

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

I. Legyen előbb R olyan P_1-tulajdonságú gyűrű, amelynek R^+ additív csoportja torziomentes.

Ha vannak az R gyűrűben zérusosztók, $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $ab = 0$, akkor a P_1-tulajdonság miatt $\{a\} = mR$ és $\{b\} = nR$, tehát $\{0\} = \{a\} \cdot \{b\} = mn \cdot R^2$, ami csak úgy lehet, ha R zéró-gyűrű. Ezért a [7] dolgozat tétele szerint R a végtelen ciklikus csoportra épített zérógyűrű.

Ha pedig R zérusosztómentes, akkor kommutatív is. Bármely $a \neq 0$ elemre nézve $Ra \neq \{0\}$, ezért $Ra = nR$, ahol $n \neq 0$. Nyilván van olyan $b \in R$ elem, amelyre $ab = ba = na$. Tekintsük mindazon c gyűrűelemek S halmazát, amelyekhez van olyan (c-től függő) egész szám, legyen ez n_c, amelyre $ac = ca = n_c \cdot a$. Könnyen igazolható, hogy S részgyűrű, amely $b \in S$ miatt különbözik a zéruselemből álló gyűrűtől, ezért van olyan m egész szám, amelyre $S = mR$. Következésképpen $Sa = (mR)a = mnR$ is részgyűrű R-ben, mégpedig az S értelmezése szerint szükségképpen ciklikus. Másfelől az $r \rightarrow mn \cdot r$ leképezés nyilván izomorfizmusa az R^+ csoportnak az $(mnR)^+$ ciklikus csoportra, vagyis R ciklikus gyűrű.

II. Legyen mármost R olyan P_1-tulajdonságú gyűrű, amelynek R^+ additív csoportjában van végesrendű $a \neq 0$ elem is. Ha az a elem rendje $O(a) = n$ és $\{a\} = mR$, akkor $mn \cdot R = \{0\}$, tehát az R^+ csoport legfeljebb mn-korlátos. Az R gyűrűben a p-hatványrendű elemek R_p halmaza (p prímszám) nyilván ideál R-ben, sőt — mint R-nek direkt összeadandója endomorf képe is. Ennek folytán R_p is P_1-tulajdonságú gyűrű. Így nyilván elegendő a tételt p-gyűrűkre bebizonyítani. Megállapíthatjuk, hogy az R_p gyűrű összes részgyűrűi: $R, pR, \ldots, p^{k-1}R, p^kR = \{0\}$. Minthogy a P_1-tulajdonságú R_p/pR_p faktorgyűrűben nincsenek valódi részgyűrűk, ezért [9] és a [6] könyv 85. tétele szerint R_p/pR_p vagy prímszámrendű zéró-gyűrű, vagy véges prímtest. Tehát R_p/pR_p mindkét esetben ciklikus faktorgyűrű, minthogy pedig az [1] dolgozat szerint a korlátos elemrendű $(R_p)^+$ Abel-féle csoport ciklikus csoportok direkt összege, a [6] könyv 99. tétele szerint az $(R_p)^+$ csoport és ezzel együtt az R gyűrű is ciklikus.

Fordítva, természetesen bármely ciklikus gyűrű P_1-tulajdonságú, amivel az I. tétel bizonyítását befejeztük.

3. §. A P_2-tulajdonságú gyűrűk leírása

Bebizonyítjuk a következő tételt:

2. TÉTEL. *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csakis akkor P_2-tulajdonságú, ha primszámrendű gyűrűk direkt összege és minden p-komponense bármely direkt felbontásában a primszámrendű gyűrűk közt legfeljebb csak egy K_p test fordul elő.*

2. MEGJEGYZÉS. Egy P_2-tulajdonságú, vagy egy P_1-tulajdonságú R gyűrű bármely S részgyűrűje ideál R-ben, azaz R általános értelemben vett teljes ideál-gyűrű, amelyeknek a leírása bizonyos speciális esetre vonatkozólag az [5] dolgozatban található meg.

Mindenekelőtt bebizonyítunk néhány segédtételt:

1. SEGÉDTÉTEL. *P_2-tulajdonságú R gyűrű bármely részgyűrűje is P_2-tulajdonságú.*

BIZONYÍTÁS: Minthogy az R gyűrűnek bármely részgyűrűje endomorf kép, elegendő megmutatni, hogy az R gyűrű bármely $R' = R\varphi$ homomorf képe is P_2-tulajdonságú.

Legyen S' tetszőleges részgyűrű R'-ben, ekkor a $T = (S')\varphi^{-1}$ teljes inverz kép részgyűrű R-ben, ezért $R = T + T_1$, következésképpen $R' = S' + T_1\varphi$.

2. SEGÉDTÉTEL: *P_2-tulajdonságú gyűrű bármely a eleme algebrai a racionális egész számok I gyűrűje vagy annak valamely I' homomorf képe felett.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy az 1. segédtétel szerint az $\{a\}$ gyűrű is P_2-tulajdonságú, ezért van olyan $R_1 \subseteq \{a\}$ részgyűrű és $f(x) \in x \cdot I[x]$, polinom, hogy $\{a\} = \{a^2\} + R_1$ és $a = f(a^2) + r_1$, ahol $r_1 \in R_1$. Ekkor $a^2 \cdot r_1 \in R_1 \cap \{a^2\} = 0$ miatt $a^3 = a^2 \cdot f(a^2)$, és itt a jobboldal vagy 0, vagy legalább negyedfokú polinomja a-nak.

3. SEGÉDTÉTEL. *P_2-tulajdonságú gyűrű nem lehet 0-karakterisztikájú.*

BIZONYÍTÁS. Ha volna olyan $a \neq 0$ elem, amely a 0-karakterisztikájú P_2-tulajdonságú gyűrűnek eleme, akkor az 1. segédtétel szerint $\{a\} = \{na\} + R_1$, ezért $R_1 \simeq \{a\}/\{na\}$ miatt $R_1 = \{0\}$. Így $\{a\} = \{na\}$ folytán és a-nak I felett való algebrai mivolta miatt feltehető, hogy az $\{a\}$ gyűrűben van olyan $\{b\} \neq 0$ részgyűrű, amely végesrangú I- vagy I'-algebra (az n rang jelenti a $\{b\}$ gyűrű bármely maximális lineárisan független elemrendszerének a számosságát, amely nyilvánvalóan egyértelműen meg van határozva.) Válasszunk a $\{b\}$ gyűrűben egy $c \neq 0$ elemet úgy, hogy a $\{c\}$ gyűrű rangja minimális legyen. Ekkor $\{c\}$ nyilván direkt felbonthatatlan, ezért nem lehetnek benne az 1. segédtétel alapján öröklődő P_2-tulajdonság miatt valódi részgyűrűk, sem valódi balideálok. De [9] és a [6] könyv 85. tétele szerint ekkor $\{c\}$ vagy primszámrendű zérógyűrű, ami lehetetlen, hiszen a $\{c\}$ gyűrű 0-karakterisztikájú, vagy pedig ferdetest, ami szintén lehetetlen, mert 0-karakterisztikájú ferdetest mindig tartalmaz valódi részgyűrűt. Tehát mindkét esetben ellentmondáshoz juthatunk, ezért kell, hogy $a=0$ legyen, ami a segédtétel érvényességét igazolja.

4. SEGÉDTÉTEL. *Bármely primszámrendű gyűrű test vagy zérógyűrű.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha $\{a\}^{+}$ az R gyűrű ciklikus additív csoportja, akkor a [6] könyv 164. tétele alapján az a elem úgy is megválasztható, hogy $a^2=da$ és $pa=0$, ahol $d|p$. Ezért $d=p$ esetén $a^2=0$, tehát $R^2=\{0\}$, míg $d=1$ esetén az a elem idempotens. Ekkor az $n\rightarrow na$ leképezés az I gyűrűnek homomorf leképezése az R gyűrűre, ahol a homomorfizmus magva a maximális (p) primideál és minthogy I egységelemes, $I/(p)$ test, és a homomorfizmus-tétel szerint, $R\simeq I/(p)$.

5. SEGÉDTÉTEL. *Véges, zérusosztómentes P_2-tulajdonságú R gyűrű primtest.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy R véges zérusosztómentes gyűrű, ezért test, amely a P_2-tulajdonság és zérusosztómentessége miatt egybeesik primtestével.

6. SEGÉDTÉTEL. *Abel-féle elemi p-csoportra épített, egy elemmel generált, P_2-tulajdonságú R gyűrű végesszámú primszámrendű gyűrű direkt összege.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy a 2. segédtétel szerint bármely $a\in R$ elem algebrai a K_p primtest felett, az R gyűrű nyilván véges. Jelöljük n-nel az $\{a\}^{+}$ additív csoport ciklikus direkt összeadandóinak számát. A bizonyítást n szerint végrehajtandó teljes indukcióval végezzük el. A segédtétel $n=1$ esetén nyilván igaz. Legyen most $n>1$, ekkor az 5. segédtétel szerint szükségképpen léteznek az $\{a\}$ gyűrűben zérusosztók, vagyis olyan $g(a)\neq 0$ és $h(a)\neq 0$ elemek, amelyekre $g(a)\cdot h(a)=0$. Ennek folytán, ha az $\{a\}=\{g(a)\}+R_2$ felbontásban $R_2=\{0\}$, akkor nyilván $\{a\}\cdot\{h(a)\}=\{0\}$, ezért $\{h(a)\}$ zérógyűrű. Ha az $\{a\}=\{h(a)\}+R_3$ felbontásban $R_3\neq\{0\}$ akkor az indukciós feltevést erre a felbontásra alkalmazzuk, $R_3=\{0\}$ esetén pedig az indukciós feltevés alkalmazása nélkül a [2] tétel alapján igaz a 6. segédtétel, ugyanis $R_3=\{0\}$ esetén $\{a\}=\{h(a)\}$ zérógyűrű. Míg, ha $R_2\neq\{0\}$, már az $\{a\}=\{g(a)\}+R_2$ felbontásra is elegendő alkalmazni az indukciós feltevést.

A 2. tétel bizonyítása. Legyen R tetszőleges P_2-tulajdonságú gyűrű és F az R torzió-része. Világos az, hogy F ideál R-ben, ezért $R=F+R_1$. Az 1. és 3. segédtétel szerint $R_1=\{0\}$ és $R=F$. Legyen R_p az R gyűrű p-komponense, ekkor $R=\sum_p R_p$. Ha E_p az R_p gyűrű legfeljebb p-rendű elemeiből álló ideálja, akkor $R_p=E_p+R_p'$ miatt szükségképpen $R_p'=\{0\}$.

Ezért az 1. segédtétel és az $R=\sum_p E_p$ felbontás alapján elég vizsgálni az olyan P_2-tulajdonságú R gyűrűk szerkezetét, amelyek elemi p-gyűrűk.

Egy tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_\alpha, \dots$ elemrendszert az R gyűrűben akkor nevezünk algebrailag függetlennek, ha létezik a gyűrűelméleti direkt összeg: $\sum_\alpha \{a_\alpha\}$. Világos, hogy az így értelmezett algebrai függetlenség véges jellegű tulajdonság. Legyen $b_1, \dots, b_\alpha, \dots$ az R gyűrű egyik maximális algebrailag független elemrendszere; ilyennek a létezését ZORN lemmája biztosítja. Ha $R_1=\sum_\alpha \{b_\alpha\}$, akkor $R=R_1+R_2$. Bebizonyítjuk, hogy $R_2=\{0\}$, azaz, hogy $R=R_1$. Ha volna ugyanis olyan $0\neq b\in R_2$ elem, amelyre $R_2=\{b\}+R_3$, akkor a 6. segédtétel szerint lenne a $\{b\}$ gyűrűben egy $\{c\}\neq\{0\}$ ciklikus direkt összeadandó is. De a $b_1, \dots, b_\alpha, \dots$ elemrendszer maximális választása következtében nyilván $\{c\}\cap R_1\neq\{0\}$ lenne. Ezért $O(\{c\})=p$ miatt $\{c\}\subseteq R_1$, ami ellentmond annak, hogy $R_1\cap R_2=\{0\}$. Következésképpen $R_2=\{0\}$ és $R=\sum_\alpha \{b_\alpha\}$. Ekkor $R=\sum_p R_p$ és a 6. segédtétel alapján az R gyűrű az általános esetben is primszámrendű gyűrűk direkt összege.

Megmutatjuk, hogy bármely p-komponens legfeljebb egy K_p primtestet tartalmazhat.

Ha ugyanis a P_2-tulajdonságú R_p gyűrű egyik direkt felbontásában $\{a\}$ és $\{b\}$ két különböző prímtest volna, akkor az 1. segédtétel szerint $\{a\}+\{b\}$ is P_2-tulajdonságú gyűrű. Feltehető, hogy $a^2=a$, és $b^2=b$. De ekkor az $\{a\}+\{b\}$ gyűrűben $\{a+b\}$ szükségképpen direkt összeadandó. Minthogy $p(a+b)=0$ és $(a+b)^2=a^2+b^2=a+b$ — ugyanis $ab=0$, — ezért $\{a+b\}$ is p-rendű ferdetest. Ezért az $\{a\}+\{b\}$ gyűrűben $\{a+b\}$ valódi direkt összeadandó volna. A komplementer direkt összeadandó részgyűrűnek szintén p-eleműnek, tehát ciklikusnak kell lenni és legyen $ma+nb$ egyik generátoreleme, ahol m és n alkalmas egész számok. Egy feltételezett $\{a\}+\{b\}=\{a+b\}+\{ma+nb\}$ direkt felbontás miatt kell, hogy $0=(a+b)(ma+nb)=ma^2+nb^2=ma+nb$ legyen, tehát maga a generátorelem 0 legyen, ami lehetetlenség. Tehát egy P_2-tulajdonságú R gyűrű mindig prímszámrendű gyűrűk direkt összege és az R gyűrű bármely p-komponensének akármelyik direkt felbontásában legfeljebb csak egy K_p direkt összeadandó lép fel (K_p prímtest).

Fordítva, tegyük fel, hogy egy R gyűrű prímszámrendű gyűrűk direkt összege és bármelyik R_p p-komponensben direkt összeadandóként legfeljebb csak egy K_p direkt összeadandó fordul elő. Bebizonyítjuk, hogy ekkor az R gyűrű P_2-tulajdonságú.

A bizonyítást előbb p-gyűrűkre végezzük el. Legyen R p-rendű gyűrűk direkt összege és S tetszőleges részgyűrű R-ben.

Ha R direkt felbontásában nem fordul elő K_p prímtest, akkor R zérógyűrű, ezért a [2] tétel alapján igaz, hogy $R = S + T$, ahol T alkalmas részgyűrű R-ben.

Ezek után tegyük fel azt, hogy R-nek prímszámrendű gyűrűk direkt összegére való egyik felbontásában pontosan egy K_p prímtest van. Ha az S részgyűrű nem tartalmaz olyan $s = k_p + z_p$ elemet ($k_p \in K_p$, $z_p \in Z_p$, $R = K_p + Z_p$, és Z_p zérógyűrű), amelynél $k_p \neq 0$, akkor nyilván $SR = RS = \{0\}$ és $S \subseteq Z_p$. Ekkor a [2] tétel szerint van olyan $C_p \subseteq Z_p$, hogy $Z_p = S + C_p$, ezért $S + (C_p + K_p) = (S + C_p) + K_p = K_p + Z_p = R$ miatt S direkt összeadandója R-nek.

Ha pedig van olyan $s = k_p + z_p \in S$, amelynél $k_p \neq 0$, akkor $k_p = n e_p$, ahol e_p a K_p test egységeleme és $1 \leqq n \leqq p-1$.

Legyen m az $nx \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia megoldása. Ekkor $ms = e_p + mz_p$, amiből $m^2 s^2 = e_p^2 = e_p \in S$. Tehát $\{e_p\} = K_p \subseteq S$. Nyilván létezik az $S_1 = K_p + (S \cap Z_p)$ direkt összeg és $S_1 \subseteq S$. Legyen $s' = k_p' + z_p'$ tetszőleges elem S-ben, ekkor $K_p \subseteq S$ miatt $z_p' = s' - k_p' \in S \cap Z_p$, tehát $S \subseteq S_1$, vagyis $S = K_p + (S \cap Z_p)$.

Legyen mármost $Z_p = (S \cap Z_p) + C$, ugyanis egy ilyen direkt felbontás létezik a [2] dolgozat tétele alapján. Ekkor $S + C = K_p + (S \cap Z_p) + C = K_p + Z_p = R$, amivel igazoltuk azt, hogy az R p-gyűrű P_2-tulajdonságú.

Ha pedig R nem p-gyűrű, akkor egyértelműen felbomlik p-komponenseinek direkt összegére: $R = \sum R_p$. Legyen S tetszőleges részgyűrű R-ben, amelyre hasonlóan $S = \sum_p S_p$ áll fenn. Ekkor $S_p \subseteq R_p$ és az előzőek szerint $R_p = S_p + T_p$. Legyen $T = \sum_p T_p$, így $S + T = \sum_p S_p + \sum_p T_p = \sum_p (S_p + T_p) = R$, ezért állításunkat az általános esetben is igazoltuk, és ezzel a 2. tételt is teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] R. Baer, Der Kern, eine charakteristische Untergruppe, *Comp. Math.*, (1935), 254—283.

[2] A. Kertész, On groups every subgroup of which is a direct summand, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951), 74—75.

[3] А. Г. Курош: Теория групп, Москва (1953).

[4] G. Pickert, Einführung in die höhere Algebra, *Göttingen* (1951).

[5] L. Rédei, Vollidealringe im weiteren Sinn I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 3 (1952), 243—268.

[6] L. Rédei, Algebra I. kötet, *Budapest* (1954).

[7] F. Szász, On groups every cyclic subgroup of which is a power, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* VI. 3—4 (1956), 475—477.

[8] F. Szász, Csoportokról, amelyeknek összes nem-triviális hatványai ciklikus alcsoportok, Az *MTA* III. Oszt. *Közleményei* 5 (1955), 491—492.

[9] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Stiintific Bucuresti*, 1 (1950), 783—789.

I. SCHUR EGY SEJTÉSÉNEK IGAZOLÁSA

SERES IVÁN

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1955. november 25-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

I. SCHUR az Archiv der Mathematik und Physik XIII. kötetében a következő feladatot tűzte ki [1]: „Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egymástól különböző racionális egész számok, akkor az

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

polinom irreducibilis a racionális számtest fölött."

W. FLÜGEL a feladatot megoldotta [2] és kimutatta, hogy az

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$$

polinom is, néhány kivételtől eltekintve, irreducibilis a racionális számtest, Γ fölött [3].

I. SCHUR az Archiv der Mathematik und Physik-nak ugyanebben a kötetében az a_k-kra vonatkozó fenti feltétel mellett feladatul tűzte ki annak kimutatását, hogy az

$$f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$$

polinom irreducibilis a $\Gamma[x]$ polinomgyűrűben [4]. Ennek megoldása megtalálható G. PÓLYA—G. SZEGŐ „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis" II. kötetében [5].

A. BRAUER, R. BRAUER és H. HOPF [6] kimutatták, hogy az

$$f_4(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)^4 + 1 \quad \text{és} \quad f_8(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)^8 + 1$$

polinomok az a_k-ra adott fenti feltételek mellett irreducibilisek a $\Gamma[x]$-ben.

Jelen dolgozatomban négy tételt bizonyítok.

1. tétel: Az $F(x) = \prod_{k=1}^{M} (x - a_k)^{2^n} + 1$ *irreducibilis a* $\Gamma[x]$*-ben, ha az* a_k*-k egymástól különböző racionális egész számok, n pozitív egész szám és* $M \geqq 1$.

(Ezen állítást I. SCHUR egyik sejtésének nevezik. A. és R. BRAUER „Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. PÓLYA" című cikkükben [7] közlik, hogy I. SCHUR sejtette az $F(x)$ polinom irreducibilitását a fenti feltételek mellett. A tétel, miként ők megjegyzik, bizonyítva még nincs, legfeljebb csak $n=0, 1, 2, 3$-ra).

I. SCHUR fenti problémájának két általánosítását igazolom.

2. tétel: Legyenek az $a_1, \dots a_M$ egymástól különböző racionális egész számok és $f_m(x)$ az m-edik körosztási polinom. Az $f_m(P(x))$ polinom irreducibilis $\Gamma[x]$-ben, ha a $P(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$ polinom foka, $M \geqq 5$. Néhány kivétellel akkor is kimutatható az $f_m(P(x))$ polinom irreducibilitása a $\Gamma[x]$-ben, ha $M<5$.

3. tétel: Legyenek $a_1, a_2, \dots a_M$ egymástól különböző racionális egész számok és $Q(x)$ racionális egész együtthatós polinom, melynek főegyütthatója 1, továbbá jelentse $f_m(x)$ az m-edik körosztási polinomot $m>2$-re és $R(x)$ a $Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$ polinomot. Azt bizonyítom, hogy az $f_m(R(x))$ polinom irreducibilis a $\Gamma[x]$-ben, feltéve, hogy $M>6$ és a $Q(x)$ polinom foka kisebb $P(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$ polinom fokánál.

4. tétel: Bizonyítás közben még azt az eredményt is nyerjük, hogy a

$$\psi(x)=Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)-\zeta \qquad \left(\zeta=e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$$

polinom irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ test fölött, ha $Q(x)$, $a_1, \dots, a_M$, M és m a 3.-ban felsorolt követelményeknek tesz eleget.

Az eredményeket a körosztási testek egységei speciális tulajdonságainak felhasználásával, L. KRONECKER erre vonatkozó alapvető tételeinek segítségével fogjuk bizonyítani [8].

Segédtételek

Szükségünk van néhány segédtételre:

1. segédtétel: Jelentse $f_m(x)$ az m-edik $(m>2)$ körosztási polinomot, és legyen $R(x)$ racionális együtthatójú polinom. A $\Phi_m(x)=f_m(R(x))$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis a racionális számtest, Γ fölött, ha a $\psi(x)=R(x)-e^{\frac{2\pi i}{m}}=R(x)-\zeta$ polinom is irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel először, hogy a $\psi(x)$ polinom irreducibilis a $\Gamma(\zeta)[x]$ polinom-gyűrűben, ellenben ugyanekkor a $\Phi_m(x)$ polinom felbomlik a $\Gamma[x]$-ben két polinom szorzatára: $\Phi_m(x)=G(x)\cdot H(x)$.

Nyilván $\psi(x) | \Phi_m(x)$, és, mivel $\psi(x)$ polinom irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött, azért $\psi(x)$ osztja $G(x)$ és $H(x)$ valamelyikét; például vehetjük, hogy $\psi(x)|G(x)$. A $\psi(x)$ polinom minden konjugáltjával is osztható a $G(x)$ polinom. A $\psi(x)$ polinom konjugáltjai az $R(x)-\zeta^s$ polinomok, $((s, m)=1)$, szintén irreducibilisek, egymástól különbözőek; ha N a norma jele $\Gamma(\zeta)$-ra vonatkozólag, úgy

$$N(\psi(x))|G(x); \quad \text{gr}\, N(\psi(x)) = \varphi(m)\, \text{gr}\, \psi(x).$$

A $\Phi_m(x)$ polinom foka szintén ennyi:

$$\text{gr}\, \Phi_m(x) \leqq \text{gr}\, G(x).$$

Ezek miatt $\Phi_m(x)$ irreducibilis.

2. Annak bizonyítása, hogy ha a $\psi(x)$ polinom $\Gamma(\zeta)[x]$-ben reducibilis, akkor a $\Phi_m(x)$ is reducibilis a $\Gamma[x]$-ben, igen egyszerű. Legyen

$$\psi(x) = \tau(x) \cdot \omega(x),$$

ahol

$$\tau(x), \omega(x) \in \Gamma(\zeta)[x], \text{gr}\, \tau(x) > 0, \text{gr}\, \omega(x) > 0$$

és legyen $\Phi_m(x)$ irreducibilis $\Gamma[x]$-ben. Mármost

$$N(\psi(x)) = \Phi_m(x) = N(\tau(x)) \cdot N(\omega(x)),$$

ami lehetetlen, mert

$$\text{gr}\, N(\tau(x)) > 0, \text{gr}\, N(\omega(x)) > 0$$

és a $\Phi_m(x)$ polinom $\Gamma[x]$-ben irreducibilis.

Ezzel az I. segédtétel igazolva van.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy feltehető, hogy

$$\psi(x) = Q(x) \prod_{k=1}^{M} (x-a_k) - \zeta$$

polinom $\Gamma(\zeta)$ fölött reducibilis

$$\psi(x) = \tau(x) \cdot \omega(x),$$

ahol $\tau(x), \omega(x) \in \Gamma(\zeta)[x]$ és mindkét polinom főegyütthatója 1. (Ezt később megcáfoljuk.)

A II. segédtétel előkészítésére hangsúlyozzuk a következőket: $\tau(a_k)$ számok algebrai egészek a $\Gamma(\zeta)$-ből $(k=1, \ldots, M)$, mert $\tau(x)$ együtthatói egészek és a_k-k racionális egészek; továbbá, mivel $\tau(a_k) | \zeta$, ezért a $\tau(a_k)$ számok egységek a $\Gamma(\zeta)$-ból $(k=1, \ldots, M)$.

II. segédtétel: A $\tau(x)$ polinom együtthatói legyenek a $\Gamma(\zeta)$ körosztási test egész számai. Ha az a_k és a_l racionális egészekre a $\tau(x)$ polinom egységeket vesz fel helyettesítési értékül, akkor $|a_k-a_l|>2$ esetén a $\tau(a_k)$ és $\tau(a_l)$ egységek a komplex számsíkon ugyanarra a 0-n keresztülmenő egyenesre esnek.

Bizonyítás: L. KRONECKER egy tétele szerint [8] $\Gamma(\zeta)$ egységei így írhatók:

$$\vartheta = \eta^{\alpha} \varepsilon,$$

ahol ε valós egység a $\Gamma(\zeta)$-ból, továbbá

$$\eta = \zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}, \text{ ha } m \text{ prímszámhatvány,}$$

$$\eta = e^{\frac{2\pi i}{2m}}, \text{ ha } m \text{ páros szám és nem prímszámhatvány,}$$

$$\eta = e^{\frac{2\pi i}{4m}}, \text{ ha } m \text{ páratlan szám és nem prímszámhatvány.}$$

Legyen

$$\tau(a_k) = \eta^{\alpha_k} \varepsilon_k, \quad \tau(a_l) = \eta^{\alpha_l} \varepsilon_l.$$

Az $(a_k - a_l) | (\tau(a_k) - \tau(a_l))$ oszthatóság miatt

$$(a_k - a_l) | (\eta^{\alpha_k} \varepsilon_k - \eta^{\alpha_l} \varepsilon_l);$$

elosztva az osztandót az $\eta^{\alpha_l} \varepsilon_k$ egységgel:

$$(a_k - a_l) \left| \left(\eta^{\alpha_k - \alpha_l} - \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_k} \right) \right. .$$

A konjugált komplexre kapjuk:

$$(a_k - a_l) \left| \left(\eta^{-\alpha_k + \alpha_l} - \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_k} \right) \right. .$$

A két utóbbi osztandóinak különbségét véve kapjuk:

$$(a_k - a_l) | (\eta^{\alpha_k - \alpha_l} - \eta^{-\alpha_k + \alpha_l}).$$

Ez utóbbi nem állhat fenn, ha

$$N(\eta^{\alpha_k - \alpha_l} - \eta^{-\alpha_k + \alpha_l}) \neq 0.$$

Ugyanis $N(a_k - a_l) | > 2^{\varphi(m_1)}$, ahol m_1 az η-nak megfelelően m-et, $2m$-et, illetve $4m$-et jelent; viszont

$$|N(\eta^{\alpha_k - \alpha_l} - \eta^{-\alpha_k + \alpha_l})| = \left| N\left(2i \sin \frac{\alpha_k - \alpha_l}{m_1} 2\pi\right) \right| \leq 2^{\varphi(m_1)}.$$

Márpedig ha $N(\eta^{\alpha_k - \alpha_l} - \eta^{-\alpha_k + \alpha_l}) = 0$, akkor $\frac{\alpha_k - \alpha_l}{m_1} 2\pi$ a π-nek racionális egész számú többszöröse. Tehát $\tau(a_k)$ és $\tau(a_l)$ a kívánt tulajdonsággal rendelkeznek, és

$$\tau(a_l) = \pm \eta^{\alpha_k} \varepsilon_l,$$

qu. e. d.

III. segédtétel: Legyenek $a_1 < a_2 < \cdots < a_M$ racionális egész számok, $M \geq 6$ és $\tau(x)$ a $\Gamma(\zeta)[x]$-ből vett egész együtthatós polinom. Ha $\tau(a_k)$ $(k = 1, \ldots, M)$ a $\Gamma(\zeta)$-ba tartozó egységek, akkor mindegyikük ugyanarra a 0-n keresztülmenő egyenesre esik.

Bizonyítás: Fennállnak a következő relációk:

$$2 < a_4 - a_1 < a_5 - a_1 < \cdots < a_M - a_1$$

és

$$2 < a_M - a_3 < a_M - a_2.$$

A II. segédtétel szerint $\tau(a_1), \tau(a_4), \ldots, \tau(a_M)$ ugyanarra a 0-n átmenő egyenesre esik és ugyanerre esik $\tau(a_M)$-mel együtt $\tau(a_2)$, $\tau(a_3)$ is. Qu. e. d.

A tételek bizonyítása

Ezen segédtételekkel bebizonyítható a

3. tétel. Bizonyítás: Feltesszük, hogy $\Phi_m(x)$ polinom reducibilis a racionális számtest fölött:

$$\Phi_m(x) = G(x) \cdot H(x), \quad (G(x), H(x) \in \Gamma[x]).$$

A $G(x)$ és $H(x)$ polinomok főegyütthatója legyen 1. A $\psi(x) = Q(x) \prod_{k=1}^{M} (x - a_k) - \zeta$ polinomnak az I. segédtétel szerint szintén reducibilisnak kell a $\Gamma(\zeta)$ fölött lennie. $\psi(x)$ polinomot bontsuk a $\Gamma(\zeta)$ fölött irreducibilis tényezők szorzatára:

$$\psi(x) = \tau_1(x) \cdots \tau_r(x).$$

A $\tau_i(x)$ $(i = 1, \ldots, r)$ polinomok főegyütthatói legyenek 1-gyel egyenlők. Szükséges, hogy az egyik, pl. a $\tau_1(x)$ polinom foka, $s \leq \dfrac{M + \operatorname{gr} Q(x)}{2} < M$ legyen. A $\tau_1(a_k)$ $(k = 1, \ldots, M)$ egységek a III. segédtétel szerint így írhatók:

$$\tau_1(a_k) = \pm \eta_1^{\alpha_1} \varepsilon_k \quad (k = 1, \ldots, M),$$

ahol $\eta_1 = e^{\frac{2\pi i}{m_1}}$; ε_k valós egység a $\Gamma(e^{\frac{2\pi i}{m}})$ testből.

Alkalmazva LAGRANGE interpolációs formuláját

$$\tau_1(x) = \eta_1^{\alpha_1} \sum_{k=1}^{s+1} \frac{P_1(x)\ (\pm \varepsilon_k)}{P_1'(a_k)\,(x - a_k)} = \eta_1^{\alpha_1} L(x),$$

ahol $P_1(x) = \prod_{l=1}^{s+1} (x - a_l)$ és $L(x)$ valós együtthatós polinom a $\Gamma(\zeta)[x]$-ből.

A $\tau_1(x)$ polinom főegyütthatója 1, ezért $\eta_1^{\alpha_1} = \pm 1$ valós egységgyöknek adódik. Tehát a $\tau_1(x)$ polinom is valós.

$\tau_1(x) | \psi(x)$ miatt $\tau_1(x) | \overline{\psi(x)}$, ahol a $\overline{\psi(x)}$ polinom a $\psi(x)$ polinomnak konjugált komplex polinomja.

Ez nem lehetséges, mert

$$\tau_1(x) \nmid (\psi(x) - \overline{\psi}(x)) = \zeta - \zeta^{-1}.$$

Az ellentmondás megszűnik, ha $\Phi_m(x)$ irreducibilis a Γ fölött.

Ezzel a 3. tételt igazoltuk.

A most bizonyított tétel alkalmazható a 2. tétel igazolására.

A 2. tétel bizonyítása: Az $M \geqq 6$ esetben a 3. tétel szerint a tétel igaz. (Természetesen $Q(x) = 1$). $M \leqq 5$-re minden esetet külön megvizsgálunk.

$M = 5$. *Az $f_m P(x)$ polinom irreducibilis a Γ fölött.*

Az I. segédtétel szerint csak a $\psi(x) = \prod_{k=1}^{5} (x - a_k) - \zeta$ polinomnak a $\Gamma(\zeta)$ fölötti irreducibilitását kell igazolnunk. Ha $\psi(x)$ polinom reducibilis $\Gamma(\zeta)$ fölött, akkor van oly $\tau(x)$ polinom-osztója, amely irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött, foka $\leqq 2$ és főegyütthatója 1.

$2 < a_4 - a_1$, $2 < a_5 - a_1$ következtében a II. segédtétel szerint a $\tau(a_1)$, $\tau(a_4)$, $\tau(a_5)$ egységek ugyanazon a 0-n átmenő egyenesen vannak. A $\tau(x)$ polinom valós együtthatójú. Hasonlóképpen mint a 3. tételnél, itt is belátható, hogy $\psi(x)$ irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött.

Ha $M = 4$, illetve $M = 3$ és az $a_k = a_1 + k - 1$ $(k = 1, \ldots, M)$ nem teljesül, a $\psi(x) = \prod_{k=1}^{M} (x - a_k) - \zeta$ polinom irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött és $\Phi_m(x)$ irreducibilis a Γ fölött.

$M = 4$. Ugyanis, ha $\psi(x)$ reducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött, akkor egyik irreducibilis tényezőjének, a $\tau(x)$ polinomnak foka: $s \leqq 2$ kell, hogy legyen (a főegyüttható legyen ismét 1)

$$a_4 - a_1 > 2 \text{ és } \begin{array}{l} \text{vagy } a_3 - a_1 > 2, \\ \text{vagy } a_4 - a_2 > 2. \end{array}$$

Mindkét esetben $\tau(x)$ három helyen vesz fel helyettesítési értékül olyan egységet, melyek ugyanazon a 0-n átmenő egyenesre esnek, ami ellentmondás.

$M = 3$. Ha a $\psi(x)$ polinom a $\Gamma(\zeta)$ fölött reducibilis volna, akkor léteznék $\psi(x)$ polinomnak oly $\tau(x)$ irreducibilis tényezője, amelynek foka: $s = 1$, főegyütthatója szintén 1. A feltétel szerint $a_3 - a_1 > 2$ így $\tau(a_1)$, $\tau(a_3)$ ugyanarra a 0-n keresztülmenő egyenesre esnek. Az ellentmondásra ugyanúgy jutunk, mint az előbb.

Ha $M = 2$, akkor a $\Phi_m(x)$ polinom irreducibilis a $\Gamma(\zeta)$ fölött, feltéve, hogy $|a_2 - a_1| > 2$.

Ha $\psi(x)$ reducibilis, akkor kell, hogy legyen egy lineáris tényezője 1 főegyütthatóval. Hasonlóan jutunk ellentmondásra, mint az $M = 4$ esetben.

Kiegészítés

Avégből, hogy I. SCHUR problémáját maradék nélkül igazoljuk, nézzük meg a $\Phi_m(x) = f_m(P(x))$ polinom irreducibilitásának taglalásánál kimaradt eseteket, természetesen a Schur-féle problémában szereplő

$$F(x) = \prod_{k=1}^{M} (x-a_k)^{2^n} + 1$$

polinomra vonatkozólag.

Előzőleg egy segédtételt bizonyítunk:

4. segédtétel: Az $F(x) = \prod_{k=1}^{M} (x-a_k)^{2^n} + 1$ *polinom racionális egész* a_k*-k* $(k = 1, \ldots, M)$ *mellett irreducibilis a racionális számtest fölött, ha létezik oly egész együtthatós* mod 2 *— irreducibilis* $\psi(x)$ *polinom, hogy*

$$K(x) = \prod_{k=1}^{M} (x-a_k) + 1 \equiv [\psi(x)]^r \pmod 2$$

és r *pozitív egész.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $F(x)$ reducibilis a Γ fölött.

Érvényes a következő kongruencia:

$$F(x) \equiv \left[\prod_{k=1}^{M} (x-a_k) + 1\right]^{2^n} \pmod 2.$$

Ennek helyességéről ismételt négyzetreemelésekkel győződhetünk meg.

Ha feltesszük, hogy

$$K(x) = \prod_{k=1}^{M} (x-a_k) + 1 \equiv \psi(x)^r \pmod 2,$$

akkor

$$F(x) \equiv G(x) \cdot H(x) \equiv [\psi(x)]^{2^n \cdot r} \pmod 2.$$

Mivel $\psi(x)$ mod 2 irreducibilis, azért

$$G(x) \equiv \psi^\alpha(x) \pmod 2 \text{ és } H(x) \equiv \psi^\beta(x) \pmod 2.$$

Az $\alpha > 0$, $\beta > 0$, mivel $G(x)$ polinom foka és $H(x)$ polinom foka pozitív, még az esetben is, ha a két polinom együtthatóit mod 2 vesszük.

A kongruenciák helyett a következő egyenlőtlenséget írhatjuk:

$$G(x) = \psi^\alpha(x) + 2A(x)\,*$$

ill.

$$H(x) = \psi^\beta(x) + 2B(x),$$

ahol

$$gr\,A(x) < gr\,\psi^\alpha(x) \quad \text{és} \quad gr\,B(x) < gr\,\psi^\beta(x).$$

* Az alábbiakban szereplő polinomok együtthatói racionális egészek.

A $G(x)\cdot H(x)$-et tekintsük mod 4:

(1) $F(x)=G(x)\cdot H(x)\equiv\psi^{\alpha+\beta}(x)+2\psi^{\beta}(x)A(x)+2\psi^{\alpha}(x)B(x) \pmod 4$;

másrészt

$$\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)=\psi^{r}(x)-1+2K_1(x),$$

és így ismételt négyzetreemelésekkel adódik:

(2) $F(x)=[\psi^{r}(x)-1+2K_1(x)]^{2^n}+1\equiv[\psi(x)]^{r\cdot2^n}+2[\psi(x)]^{r\cdot2^{n-1}}+2 \pmod 4$.

Az (1) és (2) alatti kongruenciákat összehasonlítva, rendezés és 2-vel való osztás után kapjuk a

$$[\psi(x)]^{\beta}A(x)+[\psi(x)]^{\alpha}B(x)-[\psi(x)]^{r\cdot2^{n-1}}\equiv 1 \pmod 2$$

kongruenciát.

Ez nem állhat fenn, mert α, β, $r\cdot2^{n-1}$ pozitív egészek és így a baloldal osztható a $\psi(x)$ polinommal, a jobboldal viszont nem. Ezzel az ellentmondással a segédtétel be van bizonyítva.

Ezek után vizsgáljuk meg még azon eseteket, amelyeket I. SCHUR szóban forgó problémájánál kihagytunk:

Ha $M=4$ és $a_k=a_1+k-1\,(k=1,\dots,M)$, akkor

$$a_1\equiv a_3 \pmod 2,\quad a_2\equiv a_4\equiv a_1+1 \pmod 2$$

miatt adódik:

$$K(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1\equiv[(x-a_1)(x-a_1-1)+1]^2 \pmod 2.$$

Minthogy a $\psi(x)=(x-a_1)(x-a_1-1)+1$ polinom mod 2 nyilván irreducibilis, ezért $F(x)$ a IV. segédtétel szerint irreducibilis a Γ fölött.

Ha $M=3$ és $a_k=a_1+k-1$, akkor

$$K(x)\equiv(x-a_1)^2(x-a_1-1)+1 \pmod 2.$$

$\psi(x)\equiv K(x)$ mod 2— irreducibilis, ezért $F(x)$ irreducibilis a Γ fölött.

Ha $M=2$ és $|a_1-a_2|\leqq 2$, akkor vagy

$$a_1\equiv a_2 \pmod 2 \text{ és } K(x)\equiv(x-a_1)^2+1\equiv(x-a_1+1)^2 \pmod 2$$
$$\psi(x)=x-a_1+1,$$

vagy $a_2\equiv a_1+1 \pmod 2$ és

$$K(x)\equiv(x-a_1)(x-a_1-1)+1=\psi(x).$$

Mindkét esetben $\psi(x)$ mod 2— irreducibilis, ezért $F(x)$ irreducibilis a Γ fölött. Ezzel I. SCHUR szóban forgó sejtése teljesen igazolva van.

Megjegyzés: Ahhoz, hogy az $F(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)^{2^n}+1$ polinom az $a_k\,(k=1,\dots,M)$ racionális egészek megadása esetén $n>0$-ra irreducibilis legyen a Γ fölött, nem szükséges, hogy a $K(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)+1$ polinom valamely mod 2— irreducibilis polinom pozitív egész kitevőjű hatványával mod 2 kongruens legyen. Példa erre az $F(x)=[x(x-4)(x-8)]^{2^n}+1$ polinom. Ez a polinom az 1. tétel szerint irreducibilis a Γ fölött, viszont nem teljesíti a IV. segédtétel követelményeit, mert

$$K(x)\equiv x^3+1 \pmod 2$$

és ez mod 2 reducibilis.

IRODALOM

[1]. A $P(x)-1=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)-1$ polinom irreducibilitási kérdésének felvetése. *Archiv der Math. u. Phys.* XIII. (1908), 367.

[2]. A $P(x)-1$ polinom irreducibilitásának bizonyítása. *Archiv. der Math. u. Phys.* XV. (1909), 271.

[3] W. Flügel a $P(x)+1$ polinom irreducibilitásáról. *Archiv. der Math. u. Phys.* XV. (1909), 272.

[4] A $[P(x)]^2+1$ polinom irreducibilitásának kérdése. *Archiv der Math. u. Phys.* XV. (1909), 259.

[5] A $[P(x)]^2+1$ polinom irreducibilitásának bizonyítása. G. Pólya—G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II. *Berlin, Springer* (1925), 347.

[6] A $[P(x)]^4+1$ és $[P(x)]^8+1$ polinomok irreducibilitásának bizonyítása. *A. Brauer—R. Brauer—H. Hopf:* Über Irreduzibilität einiger speziellen Klassen von Polynomen. *Jahresbericht der Deutschen Math. Ver.* XXXV. (1926), 99—112.

[7] „Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya." *Mathematische Zeitschrift* XL (1935), 204.

[8] L. Kronecker: Über complexe Einheiten. Crelle, *Journal für die reine und angew. Math.* LVI. 188.

MEGJEGYZÉS SZELE TIBOR EGYIK DOLGOZATÁHOZ [1]

STEINFELD OTTÓ

Az R gyűrű $\mathfrak{a}$ részgyűrűjét *triviálisnak* nevezzük, ha $\mathfrak{a}=(0)$ vagy $\mathfrak{a}=R$. SZELE TIBOR egyik dolgozatában [2] a következőt bizonyítja be:

Csak triviális balideált (jobbideált) tartalmazó gyűrű vagy ferdetest vagy prímszámrendszerű zérógyűrű.

Ebből azonnal nyerhető:

Következmény: Ha az R gyűrűnek van nemtriviális balideálja, akkor van nemtriviális jobbideálja is.

Dolgozatunkban az R gyűrű egy adott nemtriviális balideáljából meghatározzuk az R egy nemtriviális jobbideálját. Mégpedig érvényes a következő:

1. TÉTEL. *Ha $\mathfrak{a}$ az R gyűrű egy nemtriviális balideálja, akkor a következő modulusok közül legalább az egyik az R nemtriviális jobbideálja:*

1. *αR az $\mathfrak{a}$ egy alkalmas α elemére,*
2. *az $\mathfrak{a}$ azon elemeinek a halmaza, amelyek balról annullálják R-et.*
3. *az R azon elemeinek halmaza, amelyek $\mathfrak{a}$ egy alkalmas elemét jobbról annullálják.*
4. *az R azon elemeinek halmaza, amelyek $\mathfrak{a}$-t balról annullálják.*

Dolgozatunk második részében az előzőkhöz hasonló eredményeket mutatunk ki a gyűrű kváziideáljaira vonatkozóan. Az R gyűrű $\mathfrak{a}$ modulusát *kváziideálnak* nevezzük, ha $R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R\subseteq\mathfrak{a}$ teljesül. [3] Azonnal látható, hogy a kváziideál az egy-és kétoldali ideál fogalmának általánosítása.. Érvényesek

2. TÉTEL. *Ha az R gyűrűnek van nemtriviális kváziideálja, akkor van nemtriviális bal- és jobbideálja is.*

3. TÉTEL. *Ha az R gyűrű $\mathfrak{a}$ nemtriviális kváziideálja nem egyoldali ideál, akkor $R\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}R$) az R nemtriviális balideálja (jobbideálja).*

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő segédtételt:

Ha az R gyűrű $\mathfrak{a}$ kváziideáljára vagy $\mathfrak{a}\subseteq R\mathfrak{a}$, vagy $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}R$ teljesül, akkor $\mathfrak{a}$ az $(\mathfrak{a}, R\mathfrak{a})$ balideálnak és az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}R)$ jobbideálnak a metszete.

[1] Kivonat a szerző „Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele", (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955), 479—484) c. dolgozatából.

[2] T. SZELE, *Die Ringe ohne Linksideale, Buletin Ştiinţific (Bucureşti) 1* (1950) 783-789.

[3] A kváziideál fogalma először a szerző: On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4* (1953), 289-298 cimű dolgozatában szerepel.

A DISZTRIBÚCIÓ-ELMÉLET ALAPJAI

FENYŐ ISTVÁN

A dolgozat célja az ún. disztribúcióelmélet alapjainak rövid ismertetése. Csupán néhány esztendős ez az elmélet, de ez alatt a néhány év alatt is bebizonyította, hogy a matematika — pontosabban a matematikai fizika — számos problémáját oldotta meg, így méltán keltette fel a matematikusok érdeklődését. A disztribúcióelméletet összefüggő matematika diszciplinaként először LAURENT SCHWARTZ francia matematikus Théorie des Distributions c. kétkötetes monográfiájában dolgozta ki 1951-ben, bár alapvető gondolatai lényegében CAUCHY-ra nyúlnak vissza. A harmincas években SZOBOLJEV szovjet matematikus a függvény fogalmát SCHWARTZéhoz némileg hasonló módon általánosította és alkalmazta a matematika-fizika több problémájának megoldására. L. SCHWARTZ-cal csaknem egy időben, de tőle különböző módon hasonló elméletet dolgozott ki MIKUSIŃSKI[1] lengyel matematikus. Elmélete nagyon rokon JACOB KOREVAAR nemrégen napvilágot látott megalapozásával. A disztribúcióelmélet axiomatikus felépítése KÖNIG német és SIKORSKI lengyel matematikustól ered. Az elmélet rövid, áttekinthető összefoglalását IZRAEL HALPERIN Introduction to the Theory of Distributions c. kitűnő kis könyvében adta, melyben új gondolatokkal is gazdagította a szóban forgó elméletet.[1]

Jelen ismertetés lényegében a SCHWARTZ-féle elméletet írja le.

1. *Előzetes megjegyzések, jelölések és definíciók.* A könnyebb érthetőség kedvéért előrebocsátunk néhány jelölést és elnevezést. R^n jelölje az n-dimenziós euklideszi teret. Ennek egy pontja legyen x, ezen az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-dimenziós vektort értjük. Azt mondjuk $x \dot{\leqq} y$, ha $x_i \leqq y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $x < y$, ha $x_i < y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ha $a = (a_1, \ldots, a_n)$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, akkor a és b által meghatározott zárt intervallumon értjük azokat az x pontokat, melyek az $a \leqq x \leqq b$ egyenlőtlenségnek tesznek eleget. Jelölése: $[a, b]$. Ha Ω az $a < x < b$ feltételnek eleget tevő x pontok halmaza, akkor azt mondjuk Ω az R^n egy nyílt intervalluma. Jelölése: (a, b). Valamely x pont környezetén értünk olyan nyílt intervallumot, mely tartalmazza x-et.

Adott $f(x)$ függvényhez tekintsük az x pontok azon zárt F halmazát, melyeknek nincsen olyan környezetük, melyben $f(x) = 0$. Ezt az F zárt hal-

[1] Részletes irodalom a dolgozat végén megtalálható.

mazt az $f(x)$ *tartójának* fogjuk nevezni. F komplementer halmaza, $\bar{F}$ halmaz azon legnagyobb nyílt halmaz (az R^n azon nyílt halmazainak egyesített halmaza), melyen $f(x) \equiv 0$.

Tekintsük most az R^n egy (a, b) intervallumát $(a < b)$ és mindazon φ függvények $\Phi[a, b]$ halmazát, melyek *mindenütt* végtelen sokszor differenciálhatók (bármelyik parciális differenciálhányadosuk létezik) és (a, b)-n kívül azonosan eltűnnek. Nyilván az azonosan zérus függvényen kívül léteznek ilyen függvények. Vegyük például ezt a függvényt

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin (a, b) \\ \exp\left[-\sum\left(\frac{1}{x_i - a_i} + \frac{1}{b_i - x_i}\right)\right], & \text{ha} \quad a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ha az így definiált függvényt bármely más végtelen sokszor differenciálható függvénnyel megszorozzuk, újból egy $\Phi[a, b]$ függvényt kapunk. Természetesen véges sok $\Phi[a, b]$ függvény lineáris kompozíciója is $\Phi[a, b]$ függvény.

Azt mondjuk, hogy a $\Phi[a, b]$ függvények egy $\{\varphi_j\}$ végtelen sorozata tart a 0-hoz, jelben $\varphi_j \to 0$, ha φ_j és összes differenciálhányadosai egyenletesen konvergálnak 0-hoz. Legyen Ω valamely nyílt, korlátos intervallum. $\Phi(\Omega)$-val jelöljük mindazoknak a mindenütt végtelen sokszor differenciálható függvényeknek a halmazát, melyek tartója Ω valamely zárt részintervalluma. Azt mondjuk a $\Phi(\Omega)$ függvények egy $\{\varphi_j\}$ sorozatára, hogy tart a zérushoz $(\varphi_j \to 0)$, ha a sorozat összes függvényeinek tartója Ω-nak ugyanabba a zárt részintervallumába esik és φ_j, valamint összes differenciálhányadosai egyenletesen konvergálnak 0-hoz. Ha Ω R^n bármely nyílt intervalluma lehet, akkor $\Phi(\Omega)$ helyett röviden a Φ függvények halmazáról beszélünk.

A jövőben a φ betűvel mindig valamely $\Phi(\Omega)$-hoz tartozó függvényt jelölünk.

2. *A disztribúció fogalma.* Legyen T a $\Phi[a, b]$ függvények halmazán definiált lineáris folytonos funkcionálé (l. f. f.), tehát olyan előírás, mely $\Phi[a, b]$ minden φ függvényéhez egy (valós vagy komplex) számot rendel hozzá a következőképpen:

1. $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(a, b)$
2. $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$, ahol λ tetszőleges állandó.
3. Ha $\varphi_j \to 0$ (a fent leírt értelemben), akkor $T(\varphi_j) \to 0$.

Legyen most már Ω az R^n valamely nyílt (véges vagy végtelen) intervalluma, azt mondjuk *T az Ω nyílt intervallumban értelmezett disztribúció, ha T a $\Phi[a, b]$ függvények halmazán értelmezett lineáris és folytonos funkcionálé, ahol $[a, b]$ az Ω tetszőleges zárt intervalluma.*

Könnyű két, ugyanazon Ω nyílt intervallumon definiált disztribúció T_1 és T_2 összegét definiálni: ez ismét disztribúció, melyet T_1+T_2-vel jelölünk és melyre érvényes

$$(T_1+T_2)(\varphi)=T_1(\varphi)+T_2(\varphi) \qquad (\varphi\in\Phi(\Omega)).$$

Hasonlóképpen beszélünk egy Ω-ban definiált T disztribúció és egy μ szám szorzatáról. Ez ismét disztribúció, melyet μT-vel jelölünk és melyre

$$\mu T(\varphi)=\mu[T(\varphi)] \qquad (\varphi\in\Phi(\Omega))$$

Azt mondjuk, hogy $T=0$ az Ω-ban, ha bármely $\Phi(\Omega)$ függvényre

$$T(\varphi)=0.$$

Ennek alapján azt mondjuk Ω-ban, hogy $T_1=T_2$, ha $T_1-T_2=0$.

A disztribúció felfogható, mint a függvény fogalmának általánosítása. Ha ti. f valamely Ω minden zárt részintervallumán integrálható pontfüggvény, úgy ez generál egy disztribúciót, éspedig a következőt:

$$f(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{(n)}{\cdots}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (\varphi\in\Phi).$$

Hogy ez valóban disztribúció, könnyen belátható. Ilyen esetben a függvényt azonosítjuk a disztribúcióval. Ez a legegyszerűbb példa a disztribúcióra.[2]

További példa disztribúciókra a Dirac-féle δ-disztribúció. Ezt a következő módon definiáljuk:

$$\delta(\varphi)=\varphi(0,0,\ldots,0).$$

Hogy ez valóban disztribúció, azonnal belátható.

Disztribúciókon az eddig ismertetteken kívül még más műveleteket is értelmezünk. Ilyen a transzláció operációjának művelete. Egy függvény $h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ méretű transzlatáltján értjük a következő módon értelmezett $\tau_h\varphi$-vel jelölt függvényt:

$$\tau_h\varphi=\varphi(x_1-h_1,x_2-h_2,\ldots,x_n-h_n).$$

Valamely T disztribúcióra alkalmazva a τ_h transzláció-operátort ismét egy $\tau_h T$-vel jelölt disztribúciót nyerünk, melyet a következő módon definiálunk:

$$\tau_h T(\varphi)=T(\tau_{-h}\varphi).^{3}$$

Ennek segítségével definiálhatjuk T függetlenségét valamelyik változótól, pl. x_k-tól. Ezen azt értjük, hogy a T minden $h=(0,0,\ldots,0,h_k,0,\ldots,0)$ mértékű τ_h transzlációval szemben invariáns, vagyis, hogy

$$\tau_h T=T.$$

[2] Világos, hogy két Ω-n lényegesen különböző függvény mindig különböző disztribúciókat generál.

[3] A $\tau_h T$ disztribúció értelmezési tartománya az $x-h$ koordinátájú pontokból áll, ahol $x\in\Omega$.

Definiáljuk továbbá valamely T disztribúciónak bármely, mindenütt végtelen sokszor differenciálható $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvénnyel való szorzatát (melynek tartója természetesen akármilyen halmaz lehet):

$$\alpha T(\varphi) = T(\alpha\varphi).$$

Hogy ennek a definíciónak van értelme, az következik abból, hogy ha $\varphi \in \Phi$, akkor nyilván $\alpha\varphi$ is $\in \Phi$ és ha $\varphi_j \to 0$, akkor $\alpha\varphi_j$ is $\to 0$ a fenti értelemben.

3. *A disztribúció differenciálhányadosa.* A disztribúció differenciálhányadosának egyik definíciójára úgy juthatunk, ha megvizsgáljuk, milyen disztribúció rendelhető egy differenciálható függvényhez.

Legyen f például x_k szerint parciálisan differenciálható, akkor az f függvényhez tartozó disztribúció

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Ha a $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ függvényhez tartozó disztribúciót tekintjük, (feltéve, hogy $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ az Ω minden zárt részintervallumán integrálható), ez generálja a következő disztribúciót

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx,$$

vagyis valamely differenciálható függvénnyel identifikálható disztribúció esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right).$$

Egészen általánosan, ha T bármilyen disztribúció, akkor ennek x_k szerinti differenciálhányadosát így definiáljuk:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy ez is disztribúció, mert ha $\varphi_j \to 0$, akkor $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ is $\to 0$.

Ha a T disztribúció azonosítható egy f függvénnyel, akkor $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ vagy azonosítható $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ függvénnyel, vagy pedig egy „általánosabb" disztribúció. $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ disztribúció akkor és csak akkor azonosítható egy függvénnyel, ha primitív függvénye x_k-ban ($(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ az $[(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_n)]$-ben fekszik) abszolút folytonos $a_k < x_k < b_k$ minden zárt részintervallumán. Ez esetben $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ nullmértékű halmaztól eltekintve, a mindenütt definiált $\frac{\partial f}{\partial x_k}$-val azonosítható.

Ha f nem feltétlenül abszolút folytonos x_k-ban, akkor is tartozik f-hez egy disztribúció, melynek van differenciálhányadosa. E differenciálhányadost az f függvény d-differenciálhányadosának nevezzük.

Hogy a d-differenciálhányados nem mindig azonosítható a differenciálhányadossal, a következő tényből is kiolvasható:

A definícióból nyilvánvaló, hogy minden disztribúció végtelen sokszor differenciálható és hogy minden esetben

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Ha az f olyan függvény, melyre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_i},$$

akkor ennek megfelelő második „vegyes“ d-differenciálhányadosa a közönséges második „vegyes“ differenciálhányadossal nem azonosítható, mert a második d-differenciálhányadosok között a felcserélhetőségi reláció mindig évrényes.

Disztribúció differenciálhányadosa másképpen is értelmezhető és ez utóbbi értelmezés a közönséges differenciálhányados definícióhoz jobban hasonlít.

Valamely $f(x)$ pontfüggvény esetében

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(\ldots, x_k + h_k, \ldots) - f(\ldots, x_k, \ldots)}{h_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tau_{-h_k} f - f}{h_k}.$$

Ennek mintájára

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tau_{-h_k} T - T}{h_k}.$$

Könnyen bebizonyítható, hogy a jobboldalon álló limes mindig létezik és a határátmenet eredménye az első definícióval megegyező eredményre vezet. Ennek igazolására elég annyit bebizonyítani, hogy minden $\varphi \in \Phi$-re

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{\tau_{-h_k} T - T}{h_k}\right)(\varphi) \to 0,$$

midőn $h_k \to 0$, ahol $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ jelenti az első definíció szerint képezett differenciálhányadost.[4]

[4] Ezt a tényt röviden így is jelölhetjük

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{\tau_{-h_k} T - T}{h_k} \to 0.$$

Tekintsük az

$$S_{h_k}=\frac{\partial T}{\partial x_k}-\frac{1}{h_k}(\tau_{-h_k}T-T)$$

különbség-disztribúciót. Legyen $\varphi\in\Phi$ tetszőleges, de megválasztása után már rögzített függvény, akkor

$$S_{h_k}(\varphi)=\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi)-\frac{1}{h_k}(\tau_{-h_k}T(\varphi)-T(\varphi))=T\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\tau_{h_k}\varphi-\varphi}{h_k}\right)=$$

$$=T\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\frac{\tau_{h_k}\varphi-\varphi}{-h_k}\right).$$

Ha tehát $h_k\to 0$, a zárójelben levő kifejezés összes parciális deriváltjaival együtt egyenletesen konvergál 0-hoz és Ω egy belső zárt intervallumán kívül eltűnik, következésképpen $S_{h_k}\to 0$, amivel állításunkat igazoltuk.

Lássunk néhány példát.

A Heaviside-féle impulzusfüggvény, mint ismeretes a következő:

$$Y(x)=\begin{cases}0, \text{ ha } x<0\\ 1 \text{ ha } x>0.\end{cases}$$

Az $x=0$ helyen nincsen definiálva, ott tehát nem is differenciálható, de d-differenciálhányadosa létezik. Y-hoz tartozó disztribúció:

$$Y(\varphi)=\int_0^\infty\varphi(x)dx$$

és

$$\frac{dY}{dx}(\varphi)=-Y(\varphi')=-\int_0^\infty\varphi' dx=-[\varphi(x)]_0^\infty=\varphi(0)=\delta(\varphi).$$

A Heaviside impulzusfüggvény d-differenciálhányadosa tehát a Dirac δ. Ezt, mint fenomenologiai-tényt már régen alkalmazzák az operátorszámításban.

Képezzük a δ differenciálhányadosát:

$$\delta'(\varphi)=-\delta(\varphi')=-\varphi'(0).$$

Általában

$$\delta^{(p)}(\varphi)=(-1)^p\varphi^{(p)}(0).$$

A disztribúciók körében is érvényes a klasszikus differenciálási szabály: ha α bármilyen végtelen sokszor differenciálható függvény és T disztribúció, akkor

$$\frac{\partial(\alpha T)}{\partial x_k}=\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}T+\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Ez szinte magától értetődő, hiszen a differenciálhányados és szorzás definíciója szerint:

$$\frac{\partial(\alpha T)}{\partial x_k}(\varphi)=-\alpha T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)=T\left(-\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)=T\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\varphi-\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\varphi-\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)=$$

$$=T\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\varphi\right)+T\left(-\frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}T(\varphi)+\frac{\partial T}{\partial x_k}(\alpha\varphi)=$$

$$=\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}T(\varphi)+\alpha\frac{\partial T}{\partial x_n}(\varphi).$$

Igaz továbbá az is, hogy ha a T disztribúció nem függ x_k-tól, akkor

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}=0.$$

Ha ti. T nem függ x_k-tól, akkor

$$\tau_{-h}T=T,$$

ahol $h=(0,\dots,0,h_k,0,\dots,0)$. Így a különbségi hányados:

$$\frac{\tau_{-h}T-T}{h_k}=0$$

amiből az állítás igazsága azonnal következik. Az állítás megfordítása is igaz: ha $\frac{\partial T}{\partial x_k}=0$, akkor T az előbbi értelemben x_k-tól nem függ. Ennek bizonyítását a következő fejezetben adjuk.

4. *A primitív disztribúció.* Az adott S disztribúció x_k-primitív disztribúcióján olyan T disztribúciót értünk, melyre

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}=S.$$

Bebizonyítjuk, hogy minden S-hez tartozik végtelen sok primitív disztribúció és konkrét eljárást is adunk azok kiszámítására.

A feladatot először az $S=0$ disztribúcióra végezzük el. Bebizonyítjuk, hogy ha Ω nyílt intervallumban

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}=0,$$

akkor T olyan Ω-ban definiált disztribúció, mely nem függ x_k-tól.

Tekintsük a következő valós változós függvényt

$$\psi(h_k)=\tau_h T(\varphi),\ \text{ahol}\ h=(0,\dots,0,h_k,0,\dots,0)\qquad(\varphi\in\Phi(\Omega)).$$

h_k változó legyen olyan kicsiny, hogy $\tau_{-h}\varphi\in\Phi(\Omega)$. Mivel T lineáris és folytonos, a $\psi(h_k)$ függvény végtelen sokszor differenciálható, tekintve, hogy a különbségi hányados egyenletesen konvergál a differenciálhányadoshoz. ψ differenciálhányadosa éppen T folytonosságát felhasználva:

$$\frac{d\psi}{dh_k}=\frac{d}{dh_k}\tau_h T(\varphi)=\frac{d}{dh_k}T(\varphi(x_1,\ldots,x_k+h_k,\ldots,x_n))=$$

$$=T\left(\frac{\partial\varphi(\ldots,x_k+h_k,\ldots)}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi(\ldots,x_k+h_k,\ldots))=0,$$

mert feltevés szerint $\frac{\partial T}{\partial x_k}=0$. De akkor $\psi(h_k)$ állandó, vagyis $\tau_k T$ a h_k-tól nem függ, azaz T a τ_k transzlációval szemben invariáns. Ez volt a bizonyítandó állítás.

Legyen ezek után S tetszőleges (nem feltétlenül zérus) disztribúció. Ha valamely T disztribúcióra az Ω nyílt intervallumban teljesül a

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}=S$$

egyenlet, akkor

$$S(\varphi)=\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi)=-T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right),\text{ azaz } T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)=-S(\varphi)\qquad(\varphi\in\Phi(\Omega)).$$

Ez azt jelenti, hogy a T primitív disztribúció egyértelműen értelmezve van a $\Phi(\Omega)$ halmaz minden elemére, melynek x_k szerinti határozatlan integrálja szintén $\Phi(\Omega)$-ba tartozik. Hátra van még T értékének megállapítása $\Phi(\Omega)$ halmaz többi elemére is. Legyen $H_k\subset\Phi(\Omega)$ azon ψ függvényeinek részhalmaza, melyek x_k szerinti határozatlan integrálja is $\Phi(\Omega)$-ba tartozik. Ha $\psi\in H_k$, akkor ilyen ψ függvényre jellemző az, hogy[5]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_1,\ldots,x_{k-1},t_k,x_{k+1},\ldots,x_n)dt_k=0.$$

Legyen $\varphi_0\in\Phi(a_k,b_k)$ olyan, csak x_k-tól függő függvény, melynek integrálja

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x_k)dx_k=1.$$

Akkor a $\Phi(\Omega)$ tér bármely φ függvénye egyértelműen a

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\varphi_0(x_k)+\psi(x_1,\ldots,x_n)$$

[5] Nyilván a H_k függvényhalmaz minden ψ függvénye a $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\ldots,x_k,\ldots)dx_k=0$ tulajdonsággal rendelkezik. És fordítva: ha valamely $\psi\in\Phi$ függvény integrálja 0, akkor az a H_k függvényosztályba tartozik.

alakban írható fel, ahol $\psi \in H_k$. x_k szerint integrálva ugyanis a

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \, d x_k$$

eredményt kapjuk és λ_k ismeretében

$$\psi = \varphi - \lambda_k \varphi_0$$

meghatározható. Ezen egyértelmű felbontás segítségével a tetszőleges φ-re a T disztribúciót így definiáljuk:

$$T(\varphi) = T(\lambda_k \varphi_0) + T(\psi).$$

A $T(\psi)$ az előbbiek szerint definiálva van, $T(\lambda_k \varphi_0)$-at pedig tetszőlegesen definiáljuk a $\lambda_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\varphi_0(x_k)$ alakú függvények halmazán úgy, hogy ha $\lambda_k^{(j)} \to 0$ egyenletesen, összes differenciálhányadosával együtt, akkor $T(\lambda_k^{(j)} \varphi_0)$ is $\to 0$.

Először is könnyű belátni, hogy az így definiált T valóban disztribúció, ti. ha $\varphi_j \to 0$, akkor $\lambda_k^{(j)}$ is $\to 0$. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ez tényleg primitív disztribúció, mert $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in H_k$ azért

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = S(\varphi).$$

Két különböző x_k-primitív disztribúció különbsége olyan disztribúció, mely x_k-tól nem függ. Mert legyen T_1 és T_2 két x_k szerinti primitív disztribúció, akkor

$$\frac{\partial (T_1 - T_2)}{\partial x_k} = 0$$

az Ω nyílt intervallumban. De akkor $T_1 - T_2$ e fejezet elején már bebizonyított tétel alapján x_k-tól független.

5. *Elsőrendű differenciálegyenletrendszerek.* Tekintsük most azokat a disztribúciókat, melyek egyváltozós függvényeken vannak értelmezve és Ω legyen ezúttal az egész valós számegyenes.

A $T_1, \ldots, T_n$ disztribúciókból álló vektort jelöljük a szokásos

$$T = \begin{Vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Vmatrix}$$

jellel és az $A_{ik}(x)$ közönséges értelemben végtelen sokszor differenciálható függvények által képezett négyzetes mátrixot $\mathbf{A}(x)$-szel:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x), \ldots, A_{1n}(x) \\ \vdots \\ A_{n1}(x), \ldots, A_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Ezek után tekintsük a következő közönséges lineáris differenciálegyenletrendszert

$$\frac{dT_j}{dx}+\sum_{k=1}^{n} A_{jk}(x)T_k=B_j, \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

ahol a B_j-k adott disztribúciók. Ugyanez az egyenletrendszer mátrix írásmóddal így hangzik

$$\frac{dT}{dx}+\mathbf{A}(x)T=B.$$

Bebizonyítjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek mindig vannak disztribúció megoldásai, bármilyen, adott B_j disztribúciók mellett.

Tekintsük először a homogén egyenletrendszert, vagyis tegyük fel, hogy $B_j=0\ (j=1,2,\ldots,n)$. Ismeretes, hogy a homogén egyenletrendszernek van végtelen sokszor differenciálható megoldása. E differenciálegyenletrendszer főmegoldásai legyenek $C_{jk}(x)\ (j,k=1,2,\ldots,n)$ és válasszuk ezeket úgy, hogy a

$$C_{jk}(0)=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq k\\ 1, & \text{ha } j=k\end{cases}$$

feltételek teljesüljenek. Közismert, hogy a főmegoldások ilyen megválasztása mindig lehetséges. A homogén differenciálegyenletrendszer tetszőleges $U(x)$ függvénymegoldása a következő módon állítható elő a főmegoldások segítségével

$$U(x)=\mathbf{C}(x).\ U(0).$$

Az is ismert, hogy a $\mathbf{C}(x)$ mátrix determinánsa egyetlen pontban sem tűnik el, vagyis minden x érték mellett reguláris mátrix.

Ezek után keressük az inhomogén egyenletrendszer megoldását a következő alakban:

$$T=\mathbf{C}S.$$

Világos, hogy minden T disztribúciómátrix ilyen alakban írható, mert ha T adott vektor, akkor

$$S=\mathbf{C}^{-1}T,$$

ahol $\mathbf{C}^{-1}$ a $\mathbf{C}$ függvénymátrix inverz mátrixa, mely létezik, (disztribúciónak végtelen sokszor differenciálható függvénnyel való szorzatát definiáltuk).

T előbb megállapított értékét helyettesítjük a megoldandó differenciálegyenletrendszerbe:

$$\mathbf{C}'S+\mathbf{C}S'+\mathbf{A}\mathbf{C}S=B.$$

$\mathbf{C}$ definíciója értelmében $\mathbf{C}'+\mathbf{A}\mathbf{C}=0$, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{C}S'=B,$$

amiből

$$S' = \mathbf{C}^{-1}B.$$

Miután minden disztribúciónak van primitív disztribúciója, S'-re érvényes egyenletből S kiszámítható, és segítségével T meghatározható.

A most vázolt gondolatmenettel be lehet bizonyítani, hogy a homogén egyenletrendszernek más megoldása, mint a szokásos függvénymegoldása nem létezik. Mert, feltéve, hogy disztribúció-megoldása lenne, akkor írjuk ezt ismét $T = \mathbf{C}S$ alakba, ami mindig megtehető. Az előbbi számítást megismételve az $S' = 0$ egyenletre jutunk, aminek egyetlen megoldása van, ti. $S' = \text{konst.}$ disztribúció, ami az állandó függvénnyel identifikálható. Sőt, még általánosabban: ha B folytonos függvényből álló vektor, akkor az inhomogén egyenletrendszerek összes megoldásai a szokásos függvények.

6. *A disztribúcióelmélet alaptétele.* A disztribúcióelméletnek a differenciálegyenletekre való alkalmazása kapcsán merül fel a kérdés: voltaképpen mi is a disztribúció? Ha egy differenciálegyenletről például megállapítjuk, hogy nincs függvénymegoldása csak disztribúció-megoldása van, mit kaptunk ezzel.

Legyen ismét $n = 1$. Bebizonyítjuk azt a tételt, hogy ha T egy zárt intervallumban lineáris folyton funkcionál, akkor T vagy egy integrálható függvénnyel identifikálható, vagy pedig van olyan pozitív N egész szám és egy $f(x)$ integrálható függvény, hogy $T = f^{(n)}$ (a differenciálást természetesen disztribúció-értelemben véve).

Bizonyítás. Azt mondjuk, hogy T r-ed rendű, ($r \geq 0$), ha van olyan $f(x)$ mérhető függvény, hogy $T(\varphi) = f^{(r)}(\varphi)$ legyen (disztribúció-értelemben). Világos, hogy ha T r-ed rendű, akkor T' $(r+1)$-ed rendű. Ezzel az elnevezéssel élve a bebizonyitandó tétel azt mondja, hogy a $\Phi[a, b]$-n értelmezett minden lineáris folytonos funkcionálé rendje véges.

T folytonosságából következik, hogy létezik olyan $r \geq 0$ szám, mely kizárólag T-től függ, hogy minden $0 \leq n \leq r$ egész számra, ha $\varphi_j^{(n)} \to \varphi^{(n)} (j \to \infty)$ maga után vonja, hogy $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ (φ_j és $\varphi \in \Phi[a, b]$).

Ez első pillanatra erősebbnek látszik az eredeti konvergenciakövetelésnél. Ha ti. $\varphi_j^{(n)} \to \varphi^{(n)}$ minden n-re, akkor $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$. Itt viszont azt állítjuk, hogy ha $\varphi_j^{(n)} \to \varphi_j^{(n)}$ $n \leq r$, már akkor is $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$.

Az állítás bizonyítása indirekt módon történhet. Tegyük fel, hogy ez a tulajdonság egyetlen r számra sem teljesül. Ez azt jelenti, hogy kiválasztható a $\Phi[a, b]$-ből olyan φ_j függvénysorozat, melyre $|\varphi_j^{(n)}| < 2^{-j}$, ha $n \leq j$ és $T(\varphi_j) > 1$. De akkor minden n-re $\varphi_j^{(n)} \to 0$ egyenletesen, és mivel T folytonos $T(\varphi_j) \to 0$ ami ellentétes azzal, hogy $T(\varphi_j) > 1$.

Ez a tulajdonság egyenértékű azzal, hogy T-hez mindig van olyan véges r szám, hogy ha $\varphi_j^{(r)} \to \varphi^{(r)}$ egyenletesen, akkor $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$. Ez nyilvánvaló, mert ha $n < r$, akkor

$$\varphi^{(n)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{r-n-1}}{(r-n-1)!}\varphi^{(r)}(t)\,dt.$$

Ebből viszont következik, hogy $\max|\varphi^{(n)}(x)| < K.\max|\varphi^{(r)}(x)|$, ahol K kizárólag r-től függ. Ha tehát $\varphi_j^{(r)} \to 0$ egyenletesen, akkor $\varphi_j^{(n)}$ is $\to 0$ egyenletesen. Ennek az állításnak következménye, hogy

$$T(\varphi) < A_r \max|\varphi^{(r)}(x)|,$$

ahol A_r csak r és T-től függő állandó.

Ezt ismét indirekt módon bizonyítjuk be. Az állítás ellenkezője azt jelenti, hogy van olyan $\varphi_j \in \Phi[a, b]$ függvénysorozat, amelyre

$$|T(\varphi_j)| \geqq j \max|\varphi_j^{(r)}|.$$

De akkor a $\mu_j(x) = \max|\varphi_j^{(r)}|^{-1} j^{-1}\cdot\varphi_j(x)$ olyan $\Phi[a, b]$-be tartozó függvények sorozata, melyek d-deriváltjai egyenletesen tartanak 0-hoz, mert $\max|\mu_j^{(r)}| = j^{-1}$. De akkor $T(\mu_j) \to 0$ kellene, hogy legyen, ez viszont ellentétben áll azzal, hogy $|T(\mu_j)| \geqq 1$.

Vegyük most az összes $\varphi^{(r)}$ függvényeket ($\varphi \in \Phi[a, b]$), ahol r az előbbi tulajdonságok által definiált egész szám. Ez egy lineáris függvényteret alkot. Ebben a $\varphi^{(r)} \in \Phi^{(r)}[a, b]$ függvénytérben definiáljuk $L[\varphi^{(r)}]$ funkcionálét a következő módon:

$$L[\varphi^{(r)}] = T(\varphi),$$

akkor $|L[\varphi^{(r)}]| = |T(\varphi)| < A_r \max|\varphi^{(r)}|$. A $\Phi^{(r)}[a, b]$ térben a norma legyen $\max|\varphi^{(r)}|$, akkor a Hahn—Banach eljárással L értelmezése kiterjeszthető (a, b)-ben definiált összes folytonos függvényre, anélkül, hogy L normája növekednék. Az így kiterjesztett funkcionáléra alkalmazható a Riesz-féle előállítási tétel, vagyis van olyan $[a, b]$-ben korlátos variációjú ψ függvény, hogy

$$L[\varphi^{(r)}] = \int_a^b \varphi^{(r)}\,d\psi,$$

ahol ψ totális variációja $\leqq A_r$ és $\max|\psi| < A_r$. De akkor

$$T(\varphi) = L[\varphi^{(r)}] = \int_a^b \varphi^{(r)}\,d\psi = -\int_a^b \psi\varphi^{(r+1)}\,dx.$$

A kimondott tétel disztribúciókra már általában nem érvényes. Ha ti. T disztribúció egy nyílt Ω intervallumban, legyen $[a, b]$ ennek egy zárt részintervalluma, akkor T az $[a, b]$-n véges rendű. Ha a és b változik általában r is változik és ha a és b befutja az Ω nyílt halmazt, előfordulhat, hogy az r számok halmaza nem marad korlátos.

Tekintsük például a következő

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$$

disztribúciót és legyen Ω a $(-\infty, \infty)$ számköz. A jobboldal minden $\varphi \in \Phi$-re csak véges sok 0-tól különböző tagot tartalmaz. Ha kijelölünk egy $[a, b]$ véges intervallumot $T(\varphi)$ rendje az a legnagyobb r, melyre $a < r < b$. (Ha ti. $\varphi_j^{(r)} \to 0$, akkor az előbbiek alapján $\varphi_j^{(m)} \to 0$ ha $m < r$ és $T(\varphi_j) \to 0$). De ha $b \to \infty$ akkor r is $\to \infty$.

A bebizonyitott tételhez hasonló érvényes akkor is, ha $n > 1$. Mivel a bizonyítás gondolatmenete teljesen azonos az $n = 1$ esetével, ezért csupán a tétel kimondására szorítkozunk.

Ha T az R^n valamely zárt $[a, b]$ intervallumán egy $l \cdot f \cdot f$, akkor létezik olyan f mérhető függvény és olyan nem negatív egész komponensű $N = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ vektor, hogy

$$T = \frac{\partial^{N_1 + N_2, \ldots, N_n} f}{\partial x_1^{N_1} \partial x_2^{N_2} \ldots \partial x_n^{N_n}},$$

a jobboldalon d-differenciálhányadosok értendők.

7. *Disztribúciók határértékéről.* Legyen ismét először $[a, b]$ zárt fix számköz és tekintsük ebben a T_j lineáris folytonos funkcionálékat. A T_j operátorok halmazát korlátosnak mondjuk, hogyha

$$|T_j(\varphi)| < M, \qquad \varphi \in \Phi[a, b]$$

ahol M véges állandó, mely általában φ-től függ: $M = M(\varphi)$, de j-től független. A $\{T_j\}$ sorozatról azt mondjuk, hogy konvergál T-hez, ha minden $\varphi \in \Phi[a, b]$ mellett, a $T_j(\varphi)$ számok konvergálnak $T(\varphi)$-hez. Hasonló a sor definiciója: $\sum_{j=1}^{\infty} T_j$ konvergens, ha $\sum_{j=1}^{n} T_j (n = 1, 2, \ldots)$ sorozat konvergens.

Tekintsünk ezentúl egy T disztribúciót egy Ω nyílt intervallumban. Azt mondjuk, hogy T_j-k korlátosak, ha minden φ-re a $T_j(\varphi)$ számok egy a j-től nem függő korlát alatt maradnak és $T_j \to T$, ha minden φ-re $T_j\varphi \to T\varphi$ $(\varphi \in \Phi(\Omega))$.

Egy fontos tulajdonsága van a disztribúciónak: ha $T_j \to T$, akkor $T_j' \to T'$. Ez azonnal következik abból, hogy

$$T_j'(\varphi) - T'(\varphi) = -[T_j(\varphi') - T(\varphi')].$$

Ez egyenértékű azzal, hogy egy disztribúciókból álló végtelen konvergens sort szabad tagonként differenciálni, konvergenciája megmarad és határértéke az eredeti sor határértékének d-differenciálhányadosa.

Ismeretes az, hogy ha $T_j = f_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ abszolút folytonos függvények és $\sum_1^\infty f_j$ egyenletesen konvergens, akkor e sor összege $f(x)$, általában nem abszolút folytonos, de folytonos függvény, melynek van $f'(x)$ d-differenciálhányadosa, mely a d-limese $\sum_{j=1}^n f_j'(x)$-nek. Ha $f(x)$ abszolút folytonos, akkor $\sum_{j=1}^n f_j'(x)$ konvergál $f'(x)$-hez, mint disztribúció de nem szükségképpen pontonként.

Az előbbieknek további érdekes alkalmazása, hogy bizonyos, közönséges értelemben nem létező integráloknak adhatunk értelmet. Tekintsük ehhez az Ω-ban definiált T_t disztribúciót, mely a t paramétertől függ. Tegyük fel, hogy $\lim_{t \to t_0} T_t = T$. Akkor, mint az előbb $\lim_{t \to t_0} T_t' = T'$.

Legyen

$$f(x) = \lim_{t \to \infty} \int_1^t -\frac{\cos \tau x}{\tau^2} \, d\tau.$$

Képezzük $f(x)$ második d-differenciálhányadosát:

$$f'' = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \cos \tau x \, d\tau.$$

Közönséges értelemben $\int_1^\infty \cos \tau x \, d\tau$-nak nincs semmi értelme, de meggondolásaink értelmében ez az integrál is értelmet nyert.

Vegyünk egy másik gyakorlatilag is fontos példát. Legyen

$$f_t(x) = \int_0^t 2 \cos 2\pi \tau x \, d\tau = \frac{\sin 2\pi t x}{\pi x}.$$

Tekintsük $f_t(x)$-et disztribúcióként:

$$f_t(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi t x}{\pi x} \varphi(x) \, dx \to \varphi(0) = \delta(\varphi) \text{ midőn } t \to +\infty$$

ti. ez a Fourier-sorok elméletéből jól ismert Dirichlet-integrál. Tehát

$$f = 2 \int_0^\infty \cos 2\pi \tau x \, d\tau = \delta.$$

Ez a formula az elektrotechnikában, a hullámmechanikában általában használatos, konkrét értelmezés nélkül. E formulának a disztribúcióelmélet segítségével adtunk matematikai szempontból is szabatos értelmet.

8. *Disztribúciók direkt szorzata és disztribúciók konvolúciója.* Legyen S_x az R_x^1-en és S_y az R_y^1-n definiált disztribúció. Be lehet bizonyítani, hogy ha $\varphi(x, y) \in \Phi_{xy}$, akkor $S_y[\varphi(x, y)] \in \Phi_x$ és $S_x[\varphi(x, y)] \in \Phi_y$, továbbá

$$S_x[S_y\varphi(x, y)] = S_y[S_x\varphi(x, y)].$$

$S_x[S_y\varphi(x, y)]$ tehát egy kétváltozós disztribúció, melyet az S_x és S_y *direkt szorzatának* nevezünk. Jele: $S_x \times S_y$, δ_x és δ_y direkt szorzata például

$$\delta_x \times \delta_y(\varphi(x, y)) = \delta_x[\delta_y(\varphi(x, y))] = \delta_x(\varphi(x, 0)) = \varphi(0, 0) = \delta_{xy}(\varphi).$$

A direkt szorzatot fel lehet használni a konvolúció definiálására. Ha f és g függvények, akkor

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\, f(t)\, dt.$$

Két disztribúció konvolúciójának definíciója a következő formális számoláson alapszik:

$$[f * g](\varphi) = \iint f(x-t)\, g(t)\, \varphi(x)\, dx\, dt = \iint f(\xi)\, g(\eta)\, \varphi(\xi + \eta)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= [f_\xi \times g_\eta](\varphi).$$

Így tehát

$$(S * T)_x(\varphi) = [S_\xi \times T_\eta]\, \varphi(\xi + \eta).$$

Ezek után két disztribúció, S és T konvolúcióját $S * T$ disztribúciót a következőképpen definiáljuk. Feltesszük, hogy az S és T tényezők közül legalább az egyiknek tartója korlátos. Legyen például S tartója az s zárt intervallum, akkor $S_x \times T_y$ direkt szorzat tartója az $s \times R_y^1$ halmazban fekszik. Legyen $\alpha(x) \in \Phi$ és értéke legyen 1 az s egy környezetében, akkor

$$(S * T)\, \varphi = (S_x \times T_y)[\alpha(x)\, \varphi(x + y)].$$

Nyilván $\alpha(x)\, \varphi(x + y) \in \Phi_{xy}$ és tartója $S_x \times T_y$ tartójának környezetében van. Be lehet bizonyítani, hogy ez a definíció független α megválasztásától és hogy az így definiált $S * T$ valóban disztribúció.

Az operátorszámítás szabatos megalapozása szempontjából fontosak a következő formulák:

$$\delta * T = T;\quad \delta_h * T = \tau_h T;\quad \frac{\partial \delta}{\partial x_k} * T = \frac{\partial T}{\partial x_k},\qquad (\delta_h(\varphi) = \varphi(h_1, h_2, \ldots, h_n)).$$

Ezek könnyen beláthatók, mert (legyen most ismét egyszerűség kedvéért $n = 1$)

$$(\delta_h * T)(\varphi) = T_\xi[\delta_{h_\eta}(\varphi(\xi + \eta))] = T_\xi(\varphi(\xi + h)) = T[\tau_{-h}(\varphi)] = \tau_h\, T(\varphi).$$

Legyen $h=0$, akkor

$$(\delta * T)(\varphi) = \tau_0 T(\varphi) = T(\varphi).$$

És végül

$$(\delta' * T)(\varphi) = T_\xi[\delta'_\eta(\varphi(\xi+\eta))] = T_\xi[-\varphi'(\xi+0)] = T_\xi[-\varphi'(\xi)] = T'(\varphi).$$

Igaz továbbá az, hogy

$$\tau_h(S * T) = \delta_h * (S * T) = (\delta_h * S) * T = \tau_h S * T = S * \tau_h T,$$

és

$$(S * T)' = \delta' * (S * T) = (\delta' * S) * T = S' * T = S * T'.$$

Ezekből következik, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}(S * T) = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\, \partial x_j} * T = \frac{\partial S}{\partial x_i} * \frac{\partial T}{\partial x_j} = S * \frac{\partial^2 T}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial S}{\partial x_j} * \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Ezeket a képleteket a hullámmechanikában alkalmazzák, holott tudvalevően ezek függvényekre nem mindig igazak. Disztribúciókra mindig igazak. Pl. ha Y a Heaviside impulzus-függvény, akkor

$$\frac{d}{dx}(Y * f) = \frac{dY}{dx} * f = \delta * f = f.$$

Ha Y és f mint függvényeket fogjuk fel, akkor $\frac{dY}{dx} = 0$ majdnem mindenütt és $\frac{dY}{dx} * f = 0$. Pedig a most igazolt formula nem más, mint a kvantum-mechanikából jól ismert

$$f(x) = \int \delta(x-t) f(t)\, dt \quad \text{és} \quad \frac{dt}{dx} = \int \frac{d\delta(x-t)}{dx} f(t)\, dt$$

képlet.

A konvolúció a potenciál fogalmának általánosítását is lehetővé teszi. Ha $n > 2$, akkor az $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ sűrűség potenciálja

$$U^{(f)} = \int \frac{f(t_1, \ldots, t_n)}{\sqrt{\Sigma(x_i - t_i)^2}^{\,n-2}}\, dt = f * \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Ha f nem függvény, hanem egy T disztribúció, akkor

$$U^{(T)} = T * \frac{1}{r^{n-2}},$$

és ebből az előbbi képletek szerint

$$\Delta U^{(T)} = \Delta * \frac{1}{r^{n-2}} * T = -\frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta * T = -\frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} T.$$

Itt

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \text{és} \quad \Delta * = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \delta}{\partial x_j} * \frac{\partial \delta}{\partial x_j} * = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_j^2} *,$$

az előbbiek szerint.

9. *A disztribúciók Fourier-sora.* Egyszerűség kedvéért vegyük alapul a $[0, 1]$ intervallumot.

Képezzünk egy az előbbiektől eltérő disztribúció-fogalmat. A Φ függvénytér helyett vegyük a P függvényteret: $\varphi \in P$, ha φ mindenütt folytonos, végtelen sokszor differenciálható 1 szerint periodikus függvény. Azt mondjuk $\varphi_j \to \varphi$, ha $\varphi_j^{(n)} \to \varphi^{(n)}$ egyenletesen ($n \geqq 0$). T legyen a P-n értelmezett lineáris folytonos funkcionálé (ún. P-disztribúció).

A disztribúciók előbb vázolt kalkulusa átvihető ezekre a funkcionálékra is azzal a megjegyzéssel, hogy $S * T$ ez esetben mindig definiálható.

Egy f-függvény Fourier-együtthatói

$$a_k(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \exp(-2\pi i k x)\, dx.$$

Mivel $\exp(-2\pi i k x) \in P$, azért ha T P-disztribúció, akkor $a_k(T)$ értelmezhető:

$$a_k(T) = T(\exp(-2\pi i k x)).$$

$|a_k(T)| \leqq p_k(T)$, ahol p k-nak polinomja. Ha ti. $T = f$ folytonos függvény, akkor ennek Fourier-együtthatói korlátosak, tehát az állítás igaz, ha $T = f^{(r)}$, akkor

$$a_k(T) = (2\pi i k)^r a_k(f).$$

Egy T disztribúció Fourier-sora mindig konvergens és a T disztribúcióhoz konvergál. Ezt először egy speciális disztribúcióra a $T = \delta$-ra bizonyítjuk be. Ennek Fourier-együtthatói:

$$\delta(\exp(-2\pi i k x)) = \exp 0 = 1,$$

tehát Fourier-sora $\sum_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i j x)$. Ha $\varphi \in P$, akkor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi k x)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \exp(2\pi i k x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

mert $\varphi \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \exp(2\pi i k x)$; így $\varphi(0) = \sum a_k$.

Ha T akármilyen disztribúció, akkor

$$\sum{}' a_k(T) \exp(2\pi i k x) = \sum{}' T_\xi(\exp(-2\pi i k \xi)) \exp 2\pi i k x =$$
$$= \sum{}' T_\xi(\exp 2\pi i k (x-\xi)) = \sum{}' T * \exp(2\pi i k x) =$$
$$= T * \sum{}' \exp(2\pi i k x) = T * \delta = T.$$

* * *

E rövid összefoglalás során nem érintettünk számos a disztribúciókkal kapcsolatos kérdést. Célunk csupán rövid összefoglalást adni, a részletek taglalása nagyon is túlmenne a megszabott kereteken. A részletek iránt érdeklődő olvasót az irodalmi összeállításban felsorolt művekre utaljuk.

IRODALOM

LAURENT SCHWARTZ: Théorie des distributions. Paris I. 1950, II. 1951.

H. KÖNIG: Neue Begründung der Theorie der „Distributionen" von L. Schwartz. *Math. Nachr.* 9. 1953. 130—148.

R. SIKORSKI: A Definition of the Notion of Distribution. *Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences.* Cl. III. Vol. II. 1954. 209—211.

J. KOREVAAR: Distributions defined from the point of view of applied Mathematics. I. II. III. IV. *Indagationes Mathematicae.* XVII. 1955. 368—378, 379—389. 483—493; 494—503.

J. HALPERIN: Introduction to the Theory of Distributions. *Toronto.* 1952.

KRÜLOV: Sur l'existence des derivées généralisées des fonctions sommables. *Mat. Sbornyik* 55. 1947. 375—378.

SZOBOLJEV: Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les éq. hyperboliques normales. *Mat. Szbornyik* 1 (1936). 39—71.

MIKUSINSKI: Sur la méthode de géneralisation M. L. Schwartz et sur la convergence faible Fund. Math. 35. 235—229 (1948)

FRIEDMAN: Technics of applied mathematics. Theory of distributions New-York 1952.

KÖNYVISMERTETÉSEK

Kerékjártó Béla „A geometria alapjai" című könyvének ismertetése

KERÉKJÁRTÓ BÉLA jelen műve 1938-ban jelent meg először magyar nyelven. „A geometria alapjai" címmel. Felépítésében és célkitűzésében lényegesen különbözik más, hasonló tárgyú könyvektől. Úgy véljük, hogy e könyv francia nyelvű kiadása a tárgykör irodalmának igen értékes gazdagodását jelenti, annak ellenére, hogy az elhunyt szerző műve tartalmilag teljesen változatlan maradt.

Állításunk igazolására néhány megjegyzést teszünk az elemi euklideszi és nem-euklideszi geometriákat tárgyaló könyvekről. A szerzők túlnyomó többségükben saját axiómarendszerükből indulnak ki, következésképpen ezek a könyvek inkább monográfia-jellegűek. Gondoljunk például az euklideszi és nem-euklideszi geometriáknak az egész térre vonatkozó alapvető Hilbert-féle, vagy a korlátos térrészre vonatkozó, ugyancsak klasszikusnak mondható I. SCHURTÓL származó megalapozásra. Ezekben és számos más műben a szerzők főleg az elvi kérdések tisztázására fektetnek súlyt (az axiómarendszer teljessége, ellentmondástalansága, az axiómák egymástól való függetlensége). Ily módon a legrövidebb úton jutnak el végcéljukhoz, a geometria analitikus előállításához.

Ez a tény, valamint a tárgy sajátossága a szerzőket arra csábítja, hogy a monográfiáknál megszokott tömörségen túlmenően bonyolultabb tételek esetén nem közlik ezek bizonyítását, hanem legfeljebb utalnak arra, hogy a szóban forgó tételek milyen axiómacsoportok következményei. Arra, hogy itten nem csupán olyan hézagokról van szó, amelyeket a „szorgalmas diák" könnyen pótolhat, helyesen mutat rá R. BALDUS „Nichteuklidische Geometrie" c. könyvének (WALTER DE GRUYTER, 1927.) 21. oldalának a következő megjegyzése: Leider gibt es noch keine Darstellung des Hilbertschen Aufbaues der Geometrie mit vollständig durchgeführten Beweisen."

A különböző axiómarendszerek összehasonlításáról a tankönyvek nemigen számolnak be. Az F. ENRIQUES szerkesztésében megjelent „Questioni" több, különböző szerzőtől származó, az elemi geometriára vonatkozó cikket tartalmaz, amelyekben a különböző axiómarendszerek összefüggését is elemzik. E cikkek, azonban enciklopédia-jellegűek.

Hasonló vonatkozik BONOLA-LIEBMANN „Die nichteuklidische Geometrie" című könyvére, amely főleg a párhuzamossági axiómára tesz kritikai megjegyzéseket. Az alapvetésen kívül ezek a művek a geometria további kiépítésével alig foglalkoznak. Ahol ez viszont megtörténik, mint pl. N. ZACHARIAS

„Elementargeometrie“ c. könyvében, ott az axiomatikus felépítés elvi kérdéseiről legjobb esetben is csak említés történik.

KERÉKJÁRTÓ BÉLA könyvében elsősorban a Hilbert-féle axiómarendszerhez igazodik. Öt fejezetben tárgyalja az összetartozási, rendezési, egybevágósági, párhuzamossági és folyamatossági axiómákat.

A szerző a könyv egyes fejezeteiben a lehetőség szerint kitér a Hilbert-féle axiómarendszertől eltérő axiómacsoportok, és a Hilbert-féle axiómák összefüggésére, s tárgyalja a Hilbert-féle rendszer bizonyos későbbi elemzéseit is. Így például a rendezési axiómákra vonatkozó második fejezetben a lényegében E. V. HUNTINGTONTÓL származó lineáris rendezési axiómák képezik a vizsgálat tárgyát. HILBERT ugyanis csak a síkbeli Pasch-féle rendezési axióma segítségével tudja az egyenes pontjaira vonatkozó rendezési tételeket levezetni. Az általa adott lineáris rendezési axiómák nem elegendők a cél eléréséhez. Ebben a fejezetben szó esik még a ciklikus rendezésről is. Ez azért fontos, mert enélkül a sík és a tér irányítása nem értelmezhető.

A harmadik fejezetben a szerző a Hilbert-féle tárgyalástól eltérően egyedüli alapfogalomként a szakaszok egybevágóságát vezeti be. A sík egybevágó leképezései innen már levezethetők. HILBERTnél a szögek egybevágósága is alapfogalomként szerepel. KERÉKJÁRTÓnál ezek az axiómák az előbbi megjegyzés alapján tételekként szerepelnek. Rámutat arra, hogyan következik a Hilbert-féle tárgyalásból az ő felépítése.

Részletesen megvizsgálja a sík és a tér önmagára való egybevágó leképezéseit és kimutatja, hogyan származtathatók ezek speciális, forgásnak, eltolásnak, illetve tükrözésnek nevezett leképezésekből. Mivel ezekben a bizonyításokban a párhuzamossági axiómák nem szerepelnek, ezek a tételek még az abszolút geometriához tartoznak. E fejezetekben végül az egyenesseregekre illetve nyalábokra vonatkozó HJELMSLEV-féle vizsgálatokat találjuk, amelyek a geometria korlátos térrészre vonatkozó megalapozásának kiindulópontját képezik. Ezekhez szervesen kapcsolódik az epiciklus és episzféra értelmezése. A BOLYAI-féle párhuzamossági axióma feltételezése esetén e vonalakból illetve felületekből a paraciklus és a paraszférát nyerjük. KERÉKJÁRTÓ kimutatja, hogy az episzférán a „síkbeli“ összetartozási, rendezési és egybevágósági tételek igazak. Ez általánosítása BOLYAI azon alapvető tételének, mely szerint a paraszférán a síkbeli geometria érvényes.

A háromszög nevezetes pontjai az egyenessereg fogalmának segítségével az abszolút geometriában is értelmezhetők. Az idevonatkozó tételek elvi jelentősége majd a párhuzamossági axiómával foglalkozó negyedik fejezetben mutatkozik meg.

A Legendre-féle szögtételek egyszerű, HJELMSLEV-től származó bizonyítása az előző fejezetek alapján könnyen adódik. A szóban forgó fejezet elvileg különösen fontos tételei közé tartozik a speciális (affin, PASCAL-, illetve DESARGUES-féle tétel. KERÉKJÁRTÓ levezeti HESSENBERGnek azt a fontos tételét, mely szerint a Desargues-féle tétel bizonyítható a síkbeli összetartozási, rendezési és párhuzamossági axiómákkal Pascal-féle tétel segítségével. A jelzett tételek segítségével bevezeti a szakaszkalkulust s ily módon eljut az analitikus geometriához. Ebben a fejezetben megtalálható még az euklideszi sík és tér mozgáscsoportjainak beható tárgyalása.

A folytonossági axiómákat két főbb szempontból tárgyalja az ötödik fejezet. Az egyik pusztán topologikus alapon történik. A lineáris rendezés alapján Hausdorff-féle környezet-axiómák vezethetők be. A két folytonossági axióma most már azt követeli, hogy az egyenes pontjainak halmaza összefüggő és szeparábilis legyen. A másik ezen kívül a szakaszok egybevágóságát is felhasználja. Ennek alapján a folytonosságot az archimedeszi axióma és a Cauchy-féle konvergencia-elv biztosítja. A negyedik fejezetben bevezetett analitikus geometria elemei most már nem szakaszok, hanem közönséges valós számok. A fejezet végén az axiomatikus felépítés elvi kérdéseit teszi vizsgálat tárgyává.

A referátum hézagos lenne, ha nem mutatnánk rá arra, hogy a könyv nemcsak a geometria megalapozásával foglalkozik, hanem egész sor alapvető elemi tétel bizonyításával, az euklideszi geometria tényleges kiépítését is adja. E fejezetben találjuk az egyszerű sokszögekre és poliéderekre vonatkozó Jordan-féle, valamint a sokszögekre és körökre vonatkozó alapvető tételeket, továbbá az Euler-féle poliéder-tételt, és más, gömbökre és szabályos poliéderekre kimondott tételeket.

Reméljük, hogy ismertetésünkkel alátámasztottuk a könyv értékére vonatkozó állításunkat. Tudományos érdemein túlmenőleg a könyv, ha csak gazdag elemi geometriai anyagát tekintjük, didaktikailag is sikerültnek mondható. Az elhunyt kitűnő geométer könyve nemcsak a tárggyal tudományos szempontból foglalkozóknak szolgál biztos bevezetésül, hanem a leendő tanár részére is hasznos és megbízható segédeszköz.

Varga Ottó. lev. tag

L. Sz. Pontrjagin „Kombinatorikus topológia" című könyvének ismertetése

A magyar nyelvű matematikai könyvkiadásban kevés hely jutott idáig a topológiával foglalkozó munkáknak. KŐNIG DÉNES „Az analysis situs elemei" (1918) c. könyvecskéjén kívül egyedül P. Sz. ALEKSZANDROV „Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe" (1952) c. könyve került kiadásra. Pedig a topológia, és ezen belül a kombinatorikus topológia, az elmúlt fél évszázadban a matematika fontos ágává fejlődött. Nemcsak a matematikán belül alkalmazzák, hanem a fizika egyes területein is.

Ez a munka a szerző ama egyféléves előadásának anyagát tartalmazza, amelyet a Moszkvai Állami Egyetemen több ízben megtartott. PONTRJAGIN a szovjet topológiai iskola kimagasló képviselője. Más területeken végzett munkássága mellett a kombinatorikus topológia több fontos problémájának megoldása fűződik nevéhez. Ez a könyve — más, hasonló jellegű munkákkal ellentétben — nem ölel fel nagy anyagot. Az ún. „homológia-elmélettel" foglalkozik és ezt az elméletet is csak a poliéderek körében tárgyalja, bár néhol más területen történő alkalmazások is szerepet kapnak. A tárgyalt anyag a kombinatorikus topológiának az az alapvető magja, amely nélkülözhetetlen az ehhez a tárgykörhöz tartozó modern cikkek tanulmányozásánál.

A bevezetésben rövid történelmi áttekintést találunk a kombinatorikus topológia problémakörének fejlődéséről POINCARÉ fellépésétől napjainkig. Maga a könyv három fejezetből ill. 16 paragrafusból áll.

Az I. fejezet a komplexusokat és azok Betti-féle csoportjait definiálja. A kombinatorikus topológia a poliédereket egymáshoz szabályosan csatlakozó szimplexekre bontja fel. Egy ilyen felbontást geometriai komplexusnak hivunk. A Betti-féle csoportok, vagy más néven homológia-csoportok a komplexuson értelmezett végesen generálható additív csoportok, amelyek azonban magának a poliédernek is topológiai invariánsai.

A tárgyalást a könyv az n dimenziós euklideszi tér, és a tér legfontosabb geometriai alakzatainak (általános helyzetű pontrendszer, konvex test, szimplex, stb.) értelmezésével kezdi meg. Az n dimenziós euklideszi tér itt a valós számok testén értelmezett n rangú modulus, amelyen a skaláris szorzás művelete is értelmezve van. A továbbiakban a geometriai és absztrakt komplexus fogalmát definiálja a könyv. Az absztrakt komplexus már tiszta kombinatorikus alakzat. A szimplexeknek itt már semmi geometriai jelentésük nincs, csupán egymáshoz való csatlakozásuk módja van feltüntetve. Fontos az egyik realizációs tétel, amely kimondja, hogy minden n dimenziós absztrakt komplexus realizálható a $2n+1$ dimenziós euklideszi térben. Ezen alapszik a továbbiakban következő beágyazási tétel, ti. az, hogy minden n dimenziós kompaktum homeomorf a $2n+1$ dimenziós euklideszi tér egy részhalmazával. A dimenzió fogalmát a könyv csak kompaktumokra értelmezi zárt ε fedőrendszerek rendjének a segítségével. Ezután a komplexusok Betti-féle csoportjainak a definíciója következik. Külön paragrafus tárgyalja a nulldimenziós Betti-féle csoportok struktúráját.

A fejezet végén az Euler-Poincaré formula bizonyítása áll. Egy n dimenziós K komplexus Euler-féle karaktarisztikáján a $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\alpha^r$ számot értjük, ahol α^r a K komplexus r dimenziós szimplexeinek a száma. Az Euler-Poincaré formula az Euler-féle karakterisztika és a Betti-féle csoportok között ad összefüggést, pontosabban a

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\alpha^r=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r p^r$$

formuláról van szó, ahol a p^r számok, az ún. Betti-féle számok, a K komplexus r dimenziós Betti-féle csoportjainak a rangját jelentik.

A II. fejezet a Betti-féle csoportok invarianciájáról szól. Annak a tételnek a bizonyítása szerepel itt, hogy két homeomorf poliéder tetszőleges K ill. L szimplexekre bontása esetén a K és L komplexusok akárhány dimenziós Betti-féle csoportjai izomorfok. Ennek a ténynek az igazolása nem egyszerű, eléggé bonyolult apparátus szükséges hozzá. Az apparátusban két segédeszköz tölt be fontos szerepet.

Az egyik a geometriai komplexusok szimpliciális leképezésének a fogalma. A K komplexusnak az L komplexusba történő f folytonos leképezését szimpliciális leképezésnek hívjuk, ha f a K komplexus minden szimplexét affin módon képezi le az L komplexus valamely szimplexére. Egy ilyen szimpliciális leképezés maga után vonja a K komplexus Betti-féle csoportjainak homomorf leképezését az L komplexus Betti-féle csoportjaiba.

A másik segédeszköz a geometriai komplexusok baricentrikus felbontása. Ezen azt értjük, hogy a komplexus minden szimplexét kisebb szimplexekre bontjuk fel, méghozzá úgy, hogy az új szimplexek csúcsai az eredeti szimplexeknek, ill. azok oldalainak súlypontjai legyenek. A szimplexeknek így adódó rendszere újra egy geometriai komplexust alkot. Az eredeti K komplexusnak és a K komplexus baricentrikus felbontásának akárhány dimenziós Betti-féle csoportjai izomorfok. Ez valójában az invariancia-tételnek egy speciális esete. A baricentrikus felbontás struktúrájának áttekinthető volta miatt ebben a speciális esetben az invariancia-tétel tisztán kombinatorikus és algebrai eszközökkel igazolható.

Az invariancia-tétel bizonyítása mármost úgy történik, hogy a K komplexusnak az L komplexusra történő φ topologikus leképezését approximáljuk egy K^{α} komplexusnak egy L^{β} komplexusba történő f szimpliciális leképezésével, ahol K^{α} ill. L^{β} a K ill. L komplexusok többször egymásután történő baricentrikus felbontásaiból adódó komplexusok. Ha ezek a baricentrikus felbontások elég finomak, akkor az f leképezés a K^{α} komplexus Betti-féle csoportjainak izomorf leképezését indukálja az L^{β} komplexus Betti-féle csoportjaira. Ilyen módon igazolást nyer a Betti-féle csoportok invariancia-tétele.

A II. fejezetben Brouwer tételének bizonyítása is szerepel. Brouwer tétele azt mondja ki, hogy egy n dimenziós szimplex bármely önmagába történő folytonos leképezésének legalább egy fixpontja van. Itt szerepel továbbá az a tétel is, amely szerint egy geometriai komplexus kombinatorikus értelemben vett és halmazelméleti értelemben vett dimenziószáma megegyezik. A fejezet végén a Betti-féle csoportok definícióját találjuk közvetlenül poliéderekre, sőt görbe poliéderekre vonatkozólag is.

A III. fejezetben a könyv két problémakörrel foglalkozik.

Az egyik a poliéderek folytonos leképezéseinek homotópia-ekvivalenciájára vonatkozik. Egy P poliédernek egy Q poliéderbe történő két folytonos leképezését akkor nevezzük homotópnak, vagy ekvivalensnek, ha egyik a másikba folytonos deformációval átvihető. Az ekvivalencia így definiált fogalma reflexív, szimmetrikus és tranzitív, és így a P poliéder Q poliéderbe történő összes folytonos leképezései homotópia, vagy más néven ekvivalencia-osztályokra bomlanak.

Egy P poliédernek egy Q poliéderbe történő folytonos leképezése meghatározza a P poliéder akárhány dimenziós Betti-féle csoportjának homomorf leképezését a Q poliéder ugyanazon dimenziójú Betti-féle csoportjába. Két homotóp leképezés ugyanazt a homomorfizmust szolgáltatja, vagyis egy ilyen homomorfizmus egy egész homotópia-osztályra jellemző.

Az előbbi tárgykörrel szoros kapcsolatban áll a homotóp-ekvivalens poliéderek fogalma. Két P és Q poliéder homotóp-ekvivalens, ha létezik P-nek Q-ra történő olyan φ, és Q-nak P-re történő olyan ψ folytonos leképezése, hogy P-nek önmagába történő $\psi\varphi$ leképezése, és Q-nak önmagába történő $\varphi\psi$ leképezése az identikus leképezéssel homotóp legyen. (Pl. két faalakú gráf geometriai realizációja homotóp ekvivalens [de általában nem homeomorf] poliédereket ad meg.) Az itt szereplő φ és ψ leképezésekről azt mondjuk, hogy egymásnak homotóp inverzei. Homotóp ekvivalens poliéderek akárhány dimenziós Betti-féle csoportjai izomorfok, mégpedig maguk az ekvivalenciát előállító homotóp inverz leképezések létesítenek izomorf leképezéseket a poliéderek Betti-féle csoportjai között, és itt egyik izomorfizmus a másiknak az inverze. Ez a Betti-féle csoportok invariancia-tételének messzemenő általánosítása.

A másik problémakör a poliéderek önmagukba történő folytonos leképezéseinek fixpontjaival foglalkozik. Egy n dimenziós P poliéder ω folytonos leképezése önmagába az előzőek folytán indukálja a P poliéder Betti-féle csoportjainak endomorfizmusait. Egy ilyen endomorfizmus nyomát* $S(\hat{\omega}, \hat{B}^r(P))$-vel jelölve bevezeti a könyv a

$$J(\omega, P) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S(\hat{\omega}, \hat{B}^r(P))$$

jelölést. Ha ez a $J(\omega, P)$ szám nullától különböző, akkor az ω leképezésnek van fixpontja. Ennek bizonyítása az ún. Euler—Poincaré—Hopf-féle formulán alapszik, amely az I. fejezetben szereplő Euler—Poincaré-formulának általánosítása. Az itt leírt fixponttételnek speciális esete a Brouwer-féle fixponttétel.

A könyv végén rövid irodalomjegyzék ismerteti a kombinatorikus topológiára vonatkozó alapvető irodalmat.

A könyv nemcsak a topológiai, hanem a többdimenziós euklideszi terekkel és a csoportelmélettel foglalkozó részeket is rendkívül szabatosan tárgyalja, de példaanyagot egyáltalán nem tartalmaz. Az olvasást némileg megkönnyíti, hogy a fejezetek elején az illető fejezetben tárgyalt anyagról és a főbb módszerekről szóló összefoglalás található. Egyébként a könyv a paragrafusok elején található néhánysoros bevezetéseken kívül a tárgyalt anyag megértéséhez feltétlenül szükséges szövegnél sem többet sem kevesebbet nem ad. Ennek következtében, bár jóformán semmi matematikai előismeretet nem tételez fel, első bevezetésre nem alkalmas. Erre maga a szerző is utal, és a kombinatorikus topológiában járatlan olvasó számára kiegészítésképpen más, szemléletes anyagot tartalmazó munkát is ajánl.

Mindezek következtében célszerűbb lett volna ennek a könyvnek a kiadása előtt más, könnyebben olvasható és bő példaanyagot tartalmazó munkákat lefordítani, mint pl. P. ALEKSZANDROFF: Einfachste Grundbegriffe der Topologie, Berlin, 1932. (A topológia legegyszerűbb alapfogalmai) vagy П. С. Александров и В. А. Ефремович: Очерк основных понятий топологии, Москва-Ленинград, 1936. (P. Sz. ALEKSZANDROV és V. A. JEFREMOVICS: A topológia alapfogalmainak összefoglalása) és K. KURATOWSKI: Wstęp do teorii mnogości i topologii, Warszawa, 1955. (Bevezetés a halmazelméletbe és a topológiába). Mivel ez idáig nem történt meg, fontos lenne minél hamarább ezt a hiányt pótolni, és magyar nyelven kiadni az előbb említett, vagy más, hasonló jellegű könyveket. Már csak azért is szükség van erre, hogy létrejöjjön a kombinatorikus topológia magyar olvasóközönsége. Ekkor válik majd ez a szabatosságban, tömörségben, és a stílus világos voltában egyedülálló könyv nagyobb közönség számára is igazán használhatóvá.

Mindemellett a kombinatorikus topológiában kevésbé jártas olvasó számára is ajánlható a könyv első fejezete, esetleg az 1. és 3. §. kihagyásával.

* Egy véges rangú kommutatív csoport valamely endomorfizmusa lineáris transzformációt határoz meg a csoport lineárisan független elemeinek bármely maximális rendszerén. A transzformáció mátrixának a nyoma (a főátlóban álló elemek összege) nem függ a lineárisan független elemek maximális rendszerének speciális megválasztásától, és így ezt a számot joggal nevezzük az endomorfizmus nyomának.

Ebben a részben könnyen érthető formában megtalálja az olvasó a kombinatorikus topológiának azokat az alapfogalmait, melyek ma már az általános matematikai műveltségnek részét képezik.

A magyar nyelvű kiadáshoz HAJÓS GYÖRGY írt előszót. A fordítás VARGA TAMÁS munkája. Pontosan követi az eredeti szöveget. Néhány sajtóhiba előfordul ugyan a könyvben, de ezek a munka olvasásakor komoly zavart nem okoznak. Ennek ellenére helyesebb lett volna a könyvhöz hibajegyzéket csatolni.

Bognár Mátyás

Rényi Alfréd: „Valószínűségszámítás" c. könyvének ismertetése

A valószínűségszámítás hazai oktatása, eredményeinek a tudományos kutatás és a népgazdaság legkülönbözőbb területein való felhasználása igen jelentős feladat. E téren a felszabadulás előtt igen kevés történt, és éppen szerző érdeme, hogy a felszabadulást követő néhány év után ezen a területen erőteljes munka indult meg. A budapesti, debreceni és szegedi tudományegyetemeken tartott valószínűségszámítási előadások mellett a Mérnök Továbbképző Intézet és más intézmények számos esetben tartottak tanfolyamokat a valószínűségszámítás és matematikai statisztika köréből. Ezeket az előadásokat az érdeklődés állandó fokozódása is szükségessé tette: népgazdaságunk rendkívüli mértékű fejlesztése, az ipari és mezőgazdasági kutatóintézetek létesítése és azok munkája szükségképpen igényeket támasztottak a valószínűségszámítási módszerek iránt. Ezek az igények mind a külföldi szakirodalom tanulmányozása, mind pedig a munka folyamán felmerült problémák megoldása következtében támadtak. Ilyen körülmények között égetően időszerűvé vált olyan magyar nyelvű kézikönyv megjelentetése, amely alkalmas a valószínűségszámítás elsajátítására és segítséget nyújt az eredmények gyakorlati felhasználása tekintetében is. Ez ideig magyar nyelven e tárgykörből 1927-ben JORDÁN KÁROLYnak „Matematikai Statisztika" című és 1950-ben SZENTMÁRTONY TIBORnak „Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban" című munkái jelentek meg, továbbá az Akadémiai Kiadó 1951-ben megjelentette A. N. KOLMOGOROV és B. V. GNYEGYENKO: „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai" c. könyvét.

Az első két könyv tárgyát a valószínűségszámításnak egy fejezete: a matematikai statisztika képezi. KOLMOGOROV és GNYEGYENKO könyve nagyigényű tudományos munka, amely a valószínűségszámításon belül nagy jelentőségű, speciális témakört ölel fel és nem célja az olvasónak a valószínűségszámítás elméletébe való bevezetése.

Szerző alapvető feladata *egyetemi tankönyv* megírása volt. Ezt a célkitűzést azonban igyekezett kiterjeszteni olyan irányban, hogy a könyv a *műszaki és természettudományok kutatói és szakemberei számára* is jelentős segítséget nyújtson. A felölelt anyag áttekintést ad a valószínűségszámításnak jóformán egészéről, ugyanakkor annak számos fejezete az újabb eredmények tárgyalását és sok esetben szerző saját — részben még publikálatlan — eredményeit is tartalmazza. Ennélfogva a könyv a *valószínűségszámítás tudományos művelői, így aspiránsok részére is* jelentős forrásnak tekinthető. Tanulságosak azonban a könyv egyes részletei az *ismeretelmélet iránt érdeklődők számára* is. A valószínűségszámítás elvi kérdéseit igen részletesen tárgyalja és e téren számos eredeti megállapítást tesz. Több utalást ad a matematika elvi kérdéseit illetően is.

E tárgykör számos külföldön megjelent tankönyvét tekintve megállapítható, hogy e munka a valószínűségszámításnak újszerű feldolgozását adja. Ez vonatkozik mind tárgyalt anyagára és terjedelmére, mind felépítésére.

Mielőtt a könyv tárgyának részletes tárgyalására térnénk, röviden szólunk arról, hogy mit nyújt a könyv a fentebb említett, különböző érdeklődési körű olvasó számára.

A könyv, mint *tankönyv* szembetűnően jó tulajdonságokkal rendelkezik. Igen könnyen olvasható, magyarázatai részletesek, stílusa egyszerű. Még a megengedettnél hosszabb mondatai is legtöbbször igen könnyen áttekinthetőek. Nem takarékoskodik ismétlésekbe bocsátkozással ott, ahol valamely részlet tárgyalását, ill. könnyű megértését megbontaná a rövid utalás.

Vita tárgyát képezheti a könyv első részének felépítése, amely a valószínűség és a valószínűségi változó fogalmai köré csoportosuló alapvető ismereteket tartalmazza. Itt az olvasó csak lassan nyer áttekintést, ha oldal szerint halad. A valószínűségi változó szórása pl. közel a 300-ik oldalon kerül sorra, ellentétben számos más azonos tárgyú könyvvel, amely szinte oldalakon belül hozza a legfontosabb fogalmakat. Ezt az áttekintést azonban a hallgató az egyetemi előadásban kapja meg, amelynek alapján el tudja bírálni, hogy az egyes fogalmakkal kapcsolatban tárgyalt bő anyag mely részét kell első olvasásra átvennie és melyeket hagyhat későbbre. Igaz ugyan, hogy a szabatos megalapozás már maga is szükségessé teszi az új fogalmak bevezetésének részletesebb előkészítését, de helyes lett volna legalább diszkrét valószínűségi változóra bevezetni jóval előbb a várható érték és szórás fogalmát. Az egy-egy anyagrész feletti áttekintést egyébként nagyban elősegítik szerző világos összefoglalásai, utalásai, esetleg egy-egy elvi kérdésnek szentelt önálló fejezete. Kétségtelen azonban, hogy a „magántanuló" számára fáradságos lehet az áttekintés megszerzése.

Matematikai előismeretek tekintetében a tudományegyetemi tanterv első két évfolyamára támaszkodik. A további matematikai segédeszközök általában részletesen kifejtésre kerülnek a tárgyalás során, vagy a függelékben találhatók. E fejezetekben a könyv a hallgató számára több matematikai studium alapjainak, vagy részleteinek elsajátítását teszi lehetővé.

Önmagában is értékes része a könyvnek a több mint 500 igen jól megválogatott feladat. Ezek a tárgyalt anyag alaposabb megértését szolgálják és mind az elmélet, mind a különféle gyakorlati alkalmazások köréből valók. E feladatgyűjtemény, amely igen egyszerű példáktól komoly elmélyülést igénylő problémákig a feladatok egész skáláját magában foglalja, nagyban emeli a könyv értékét. Emellett szerző számos esetben a feladatokon keresztül ad betekintést egy-egy — a könyvben részletesebben ki nem fejtett — problémakörbe. A nehezebb feladatokat csillaggal jelöli és sokat a megoldáshoz vezető útmutatással lát el. A feladatok megoldásai a könyv végén találhatók.

A valószínűségszámítás: a véletlen tömegjelenségekre vonatkozó tudomány. Ez módot ad arra, hogy ezt a matematikai stúdiumot a valósággal, a gyakorlattal való számos vonatkozásában fejtsük ki. Szerző messzemenően él ezzel a lehetőséggel: azon túlmenően, hogy a valószínűség fogalmát ilyen módon körültekinthetően, nagy alapossággal magyarázza meg, de a további tárgyalás során is törekszik az új fogalmaknak, új témaköröknek olyan megvilágítására, amely a valósággal való kapcsolatukat nyilvánvalóvá teszi, s ezzel jobb megértésüket is elősegíti. Az itt elmondottak még nem érintik a könyvben található nagyszámú alkalmazásra vonatkozó fejezetet, amely a jobb megértésen túl már konkrét segítség az alkalmazott matematikus és más kutató, vagy szakember munkájához. A fizikus, csillagász, meteorológus, kémikus, mérnök, orvos, a legkülönfélébb iparágak szakembere, mezőgazdász, számos jelentős és részletesen kifejtett alkalmazását találja a valószínűségszámításnak szaktudománya több területén. Ugyanakkor perspektívát nyerhet a valószínűségszámításnak más irányú alkalmazásaira is az ő foglalkozási körében. Néhányra ezek közül alább, az anyag részletes ismertetésénél található utalás.

A valószínűségszámítást sokáig nem tekintették egzakt matematikai stúdiumnak. A matematikának általánosan ismert fejezetévé azután vált, hogy A. N. KOLMOGOROV a valószínűségszámításnak szabatos matematikai megalapozását megadta. KOLMOGOROV alapvető munkáját, amely 1933-ban jelent meg, éles és szenvedélyes viták előzték meg, amelyek a valószínűségszámítás legalapvetőbb kérdéseit: a valószínűség objektív vagy szubjektív voltát, a valószínűség és gyakoriság kapcsolatát érintették. Az állásfoglalások hátterében — nyíltan vagy burkoltan — az idealista vagy materialista felfogás húzódott meg. Az itt felmerülő kérdések szorosan kapcsolódnak a filozófia általános elvi kérdéseihez: a véletlen, az okság, szükségszerűség, a matematika alkalmazásainak kérdéséhez. KOLMOGOROV a valószínűségszámítás megalapozásában a dialektikus materializmus elvi alapján állt és megalapozását — igen kevés kivétellel — a matematikusok magukévá tették. Szerző az itt felmerülő problémákat élesen megvilágítja és rámutat MISES pozitivista elméletének és más elméletek idealista, tudománytalan gyökereire, leleplezi a „fizikai" idealizmus helytelen álláspontját. Ezeken túlmenően több helyen megvilágítja a matematikai absztrakció folyamatát, a matematikai modellválasztás kérdéseit.

Összefoglalva a mondottakat: szerző a valószínűségszámítás e tankönyvében az ismeretelméleti, tudományos, didaktikai és gyakorlati szempontoknak messzemenő figyelembevételével alkotta meg munkáját, amely igen gazdag anyagot tartalmaz. A könyv felépítése és tárgyalásmódja gondos, körültekintő munkára vall, ami a kéziratnak valóban csak többszöri átdolgozása után válhatott sikeressé. A könyv nagyszabású, a nemzetközi tudományos irodalom szempontjából is számottevő, a valószínűségszámítás irodalmában újszerű munka, amelyet méltán fordítanak máris idegen nyelvre. Érdemei mellett hiányosságai nem számottevőek, amelyek egy következő kiadásban könnyen kiküszöbölhetők. Ilyen hiányosságokként említhetők egyes helyeken a matematikai tárgyalás kevésbé elegáns volta, néhány apróbb következetlenség és sok sajtóhiba. Vita tárgyát képezheti a felépítés néhány vonatkozása, de minden változtatás csak más eminens szempontok megsértésével történhet. Ilyen ellenvetésekre mindenesetre felhozható a következő szempont: reméljük, hogy RÉNYI ALFRÉD könyvével a valószínűségszámítás hazai irodalma nem lezárul, hanem megkezdődik. Több különleges igénynek megfelelően válhat szükségessé valószínűségszámításról szóló könyv megjelentetése, és hasznos lesz, ha ezekre sor is kerül. Így pl. feltétlenül szükséges egy korszerű matematikai statisztikai könyv megjelentetése is az ipari kutatás és gyakorlat szükségleteinek megfelelően, de az orvosi, biológiai és mezőgazdasági kutatás is igényel ilyen tárgyú könyvet.

A könyv a valószínűségszámítás tárgyát és feladatát megvilágító bevezetés után 16 fejezetet és 4 függeléket tartalmaz.

Az első három fejezet foglalkozik a valószínűségszámítás megalapozásával, amelyben KOLMOGOROV elméletét követi. Szemléletesebbé teszi azonban ezt a megalapozást azzal, hogy GLIVENKO nyomán az események algebrájából indul ki és ezután tér rá az eseményeknek halmazokkal való reprezentálására. Az eseményalgebráról szóló első fejezet után a második fejezetben a valószínűség fogalmát, majd a harmadik fejezetben a feltételes valószínűséget és események függetlenségének fogalmát vezeti be. A második fejezet tartalmazza a valószínűségek klasszikus kombinatorikus és geometriai kiszámítási módjait. Példaként szerepelnek a rádióaktív bomlás jelenségek, a mikrofizikában használatos statisztikák (MAXWELL—BOLZMANN, BOSE—EINSTEIN, FERMI—DIRAC) valószínűségszámítási hátterének, a GALTON-deszkának, a BROWN-féle mozgásnak tárgyalása. A harmadik fejezetben ismerteti a klasszikus diszkrét eloszlásokat.

A negyedik fejezet a POISSON-eloszlást mutatja be, egyrészt mint a binomiális eloszlás határesetét, másrészt alkalmazza rádióaktív bomlásjelenségeknek, csillagok eloszlásának és a Brown-féle mozgásnak vizsgálatára. Utolsó pontban szerző a valószínűségeloszlások algebráját saját vizsgálatai alapján ismerteti.

Az ötödik fejezet a binomiális eloszlásnak a Gauss-féle eloszlással való közelítését tárgyalja. Ehhez Laplace-nyeregpont módszerének alkalmazásával a Stirling formulát, majd az Euler-féle összegképlet levezetése után a Stirling formula egy élesebb alakját bizonyítja be. Ezután következik a Moivre—Laplace tétel, majd ismerteti a Bernoulli-féle nagy számok törvényét, melynek jelentőségét külön pontban világítja meg. Elméleti és gyakorlati szempontból számos érdekes feladat között szerepel itt a Boltzmann-féle energiaeloszlás.

A következő négy (VI—IX) fejezet foglalkozik a valószínűségi változóknak, azok függetlenségének, majd jellemző adataiknak ismertetésével.

A valószínűségi változónak szemléletes fogalma után tér át annak matematikai fogalmára. Az eloszlás és sűrűségfüggvény bevezetését mindjárt azoknak több dimenzióra való tárgyalása követi. Alaposan, számos fontos tételre kiterjedően fejti ki a valószínűségi változók függetlenségére vonatkozó fejezetet. Az egyenletes és egy- és többváltozós normális eloszlás tárgyalását a valószínűségi változó monoton, differenciálható függvénye eloszlásfüggvényének meghatározása követi.

A hetedik fejezet független valószínűségi változók összegeinek és más függvényeinek eloszlását tárgyalja. Előjönnek itt fontos klasszikus eloszlások, mint a MAXWELL-féle sebességeloszlás, a Pearson-féle χ^2-eloszlás, a Γ, a Student, Béta eloszlások. Az eloszlások keverésének tárgyalását több gyakorlati példával világítja meg. A fejezetet a továbbiakhoz szükséges Riemann—Stieltjes integrálra vonatkozó néhány alapvető ismeret felsorolása zárja. A Lebesgue—Stieltjes integrált a 2. függelék tartalmazza.

A várható értékről szóló nyolcadik fejezet tartalmazza az erre a fogalomra vonatkozó jelentős tudnivalókat, de igen sok kisebb körülményre is felhívja a figyelmet, amelyek a jobb megértést elősegítik. Szerzőnek ez a tárgyalásmódja egyébként végigvonul a könyvön és komoly érdeme. A várható értéket mint absztrakt Lebesgue-integrált vezeti be, amit e formában csupán lábjegyzetben említ, mert a továbbiakban is a Lebesgue-integrál elméletére való utalás nélkül az előjövő tételeket közvetlenül bebizonyítja. Így kimutatja, hogy a korlátos valószínűségi változónak létezik a várható értéke. A közönséges, valamint feltételes várható értékre vonatkozó tételeknek, majd néhány klasszikus eloszlású valószínűségi változó várható értékének ismertetése után a várható értéket Stieltjes integrállal fejezi ki, mint a diszkrét és folytonos eset szintézisét. Ennek az előállításnak alkalmazásaképp további tételeket bizonyít. A többdimenziós eloszlások esetére való áttérés után a mediánt és a kvantiliseket tárgyalja, majd bebizonyítja a nemnegatív valószínűségi változókra vonatkozó Markov-féle egyenlőtlenséget. A feladatok között a kinetikus gázelméletre vonatkozó több alkalmazás szerepel.

A szórásra vonatkozó kilencedik fejezet az alapvető tételek és klasszikus eloszlások szórásának kiszámítása után az ingadozás egyéb mértékeire is kitér. Többdimenziós esetben a szórásmatrixot vezeti be, majd két változóra vonatkozóan a korrelációs együtthatót részletesen tárgyalja. Kiemeli a korrelálatlanság és függetlenség — sokak által nem elég gondosan kezelt — eltérését, valamint összeesésüket normális eloszlású valószínűségi változók esetén. Bebizonyítja itt L. V. KANTOROVICS nevezetes tételét, amely diszkrét eloszlású véges sok értéket felvevő két valószínűségi változó függetlenségét állítja, ha azok hatványai korrelálatlanok. A fejezetet a feltételes szórásra és a korrelációs hányadosra vonatkozó tételek zárják. A feladatok között rádióaktív jelenségekre, részecskeszámlálásra vonatkozó több alkalmazás szerepel.

A tizedik fejezet „A matematikai statisztika elemei“ címmel a valószínűségszámításnak a gyakorlat szempontjából egyik legfontosabb fejezetéről ad egyrészt áttekintést, másrészt abból szemelvényeket. Ismerteti a matematikai statisztika feladatát, és igen érthetően beszámol annak sajátos problémaköréről, módszereiről. Különösen felhívja a figyelmet a gyakorlat számára fontos elvi kérdésekre, mint a statisztikai mintavétel, a statisztikai becslések, a feltevésvizsgálat kérdéseire. Ezáltal a gyakorlat embere előtt világossá válik, hogy mit várhat a matematikai statisztika módszereitől. — A Bayes-féle módszer és a J. Neyman-féle konfidencia intervallumok alapvető módszereit példákkal illusztrálja. Eltérések szignifikáns voltának vizsgálatára a Student-féle t-próbát és a Fisher-féle ún. z-próbát ismerteti. Hipotézisek ellenőrzésének kérdéseivel kapcsolatban foglalkozik késztermék selejtellenőrzésének egyszerűbb matematikai statisztikai módszereivel, és csupán említi a magyar származású WALD ÁBRAHÁM által kidolgozott ún. szekvenciális analízist. — E fejezetben ismerteti a GAUSS által bevezetett legkisebb négyzetek módszerét, és tárgyalja annak KOLMOGOROV által adott valószínűségszámítási megalapozását lineáris esetben. Foglalkozik a regressziós egyenesekkel és görbékkel. A feladatok között az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszereire vonatkozó alkalmazásokat találunk, és egy igen tanulságos példát az orvosi kutatás köréből. — Az e fejezetben nem tárgyalt számos részletkérdés közül elvi szempontból a „maximum likelyhood“ fogalmát említeném, a gyakorlat szempontjából a szórásanalízis kérdéskörét. — Ez a fejezet természetesen csupán vázlatos ismertetése lehet a matematikai statisztika problémakörének, hiszen az gyakorlati jelentőségénél fogva is külön tankönyvet igényel. E fejezet mindenesetre kitűnően megvilágítja a matematikai statisztika modern felfogását.

A tizenegyedik fejezet a nagy számok törvényeivel foglalkozik, amelyek a relatív gyakoriságnak és a valószínűségnek egymáshoz való viszonyát világítják meg. Bernoulli tételét a SZLUCKitól származó sztochasztikus konvergencia fogalmának segítségével is megfogalmazza, és itt Csebisev egyenlőtlenségének segítségével bizonyítja be. A továbbiakban a nagy számok törvényének MARKOV, BERNSTEIN és HINCSIN által adott általánosításait bizonyítja be, megemlíti KOLMOGOROV szükséges és elegendő feltételeit is a számtani közép sztochasztikus konvergenciájára. Csebisev egyenlőtlenségének bebizonyítja Bernstein-féle és Kolmogorov-féle általánosításait. Az előbbinek alkalmazását adja energiafogyasztó üzemek szükségleti tényezőinek meghatározására. Az utóbbit a nagy számok erős törvényeinek bizonyításánál használja fel, amely általánosítások ugyancsak KOLMOGOROV-tól származnak. Bebizonyítja e fejezetben a matematikai statisztika GLIVENKOtól származó alaptételét, amely szerint egy minta empirikus eloszlásfüggvénye 1 valószínűséggel egyenletesen konvergál a megfelelő eloszlásfüggvényhez a mintadarabszám minden határon túl való növelésével. A fejezetet a nagy számok erős törvényének iterált logaritmustétel elnevezésű általánosítása zárja le. A feladatok további betekintést adnak e kérdéskörbe és több alkalmazást az analízis tételeinek valószínűségszámítási módszerekkel való egyszerű bizonyítására. — Bár e fejezet tételei nem mindenütt nyernek maradéktalanul bizonyítást, mégis nagy értéke a könyvnek, mert KOLMOGOROV és GNYEGYENKO említett könyve a nagy számok erős törvényeivel nem foglalkozik.

A tizenkettedik fejezet első része a karakterisztikus függvénnyel foglalkozik, amely igen hathatós eszköznek bizonyult különösen a valószínűségszámítás határeloszlás-tételeinek bebizonyítására. Az alapvető tulajdonságok után az unicitási és konvergencia tételeket bizonyítja, majd alkalmazásként a normális eloszlás egy BERNSTEINtől és egy CRAMÉRtől származó jellemzését adja. A fejezet második részében a generátorfüggvénnyel foglalkozik, amely nemnegatív, egész értékű valószínűségi változók esetén sok esetben egyszerűbb eszköz. A generátorfüggvénynek egy alkalmazását mutatja be a láncreakciók elméletében.

A tizenharmadik fejezet „A valószínűségszámítás határeloszlástételei" címet viseli. Szemben a nagy számok törvényeivel e tételek valószínűségi változók bizonyos normált összegei eloszlásának konvergencia kérdéseit vizsgálják. A normális eloszláshoz való konvergenciát tartalmazó központi határeloszlástételt a LJAPUNOV és a — legáltalánosabb — LINDEBERG-féle feltétellel bizonyítja be. A sűrűségfüggvények konvergenciájára vonatkozó ún. lokális tételek közül GNYEGYENKO tételét bizonyítja be. — Itt tárgyalja a matematikai statisztikában nagyjelentőségű χ^2-próbát és annak alkalmazásait, minthogy ennek alapját a polinomiális eloszlásnak a többváltozós normális eloszláshoz való konvergenciája képezi. Rövid paragrafus vonatkozik a Poisson-eloszláshoz való konvergencia tételre. E fejezetben szerző utal KOLMOGOROV és GNYEGYENKO könyvére, amely e kérdéskörnek messze továbbvezető tárgyalását tartalmazza.

A tizennegyedik fejezetben a Markov-lánc fogalmát vezeti be, bebizonyítja a MARKOVtól származó határeloszlástételt. Rámutat arra, hogy miként általánosítja a MARKOV-lánc fogalma a független valószínűségi változók sorozatát, és megvilágítja mint idősort. E fejezettel lényegében áttér a sztochasztikus folyamatok elméletének tárgyalására. A Markov-láncok elméletének alkalmazásait adja üzemek energiafogyasztása ingadozásainak meghatározására, a hőátadás EHRENFEST-féle modelljére, a Brown-mozgásra, és két visszaverő fal közötti speciális bolyongási feladatra. Ezután ERDŐS PÁL, W. FELLER és H. POLLARD egy tételét bizonyítja és használja fel MARKOV-láncok ergodicitására vonatkozó tételek bizonyításához végtelen sok állapot esetén. Foglalkozik folytonos állapothatározójú MARKOV-láncokkal is. A feladatok között számos bolyongási problémát ad, amely problémakör, mint ismeretes, számos gyakorlati alkalmazási körrel kapcsolatos.

A tizenötödik fejezet a rendezett minták elméletébe vezet be. A matematikai statisztikában egyre nagyobb szerepet játszanak az itt fellépő nemparaméteres módszerek, amelyek bármely folytonos eloszlás esetén alkalmazhatók. Szerző a fejezetet saját vizsgálatai alapján nyert módszerre építi fel, ami kapcsolatos az additív Markov-láncokkal. Ez indokolja e fejezet beillesztését e helyre. Módszerével számos ismert eredmény igen egyszerű tárgyalását teszi lehetővé, és újabb eredmények forrása. Ismerteti — bizonyítás nélkül — KOLMOGOROV és SZMIRNOV tételeit az empirikus és elméleti eloszlásfüggvények összehasonlítására, továbbá idevágó saját jelentős eredményeit. Végül két minta összehasonlítására vonatkozó tételt ad, melyek SZMIRNOV, GNYEGYENKO és KOROLJUK eredményei. Foglalkozik a rendezett minták elméletének a tömeggyártás minőségellenőrzése terén való felhasználásával is.

A tizenhatodik fejezet a „Sztochasztikus folyamatok" címet viseli. Ezek értelmezése, elméleti és gyakorlati szempontból való megvilágítása után a MARKOV, majd a POISSON-folyamatot ismerteti. Egész értékű MARKOV-folyamatokra bebizonyítja a DEOBLIN-féle ergodicitási tételt és felhozza annak alkalmazását textilgépek optimális fordulatszámának meghatározására. Szerzőnek — TAKÁCS LAJOSsal bizonyított — eredményeit tárgyalja a POISSON-folyamat által származtatott sztochasztikus folyamatokról szóló rész, ami telefonhálózatok terhelésének vizsgálatánál bír jelentőséggel. Foglalkozik üzemek energiafogyasztásának vizsgálatára vonatkozó alkalmazással is. — A sztochasztikus folyamatok elmélete szempontjából KOLMOGOROV alapvető egyenleteinek ismertetéséig jut el. — Ez a fejezet csupán rövid betekintést ad e kérdéskörbe, és annak gyakorlati alkalmazásaiba, de a könyv keretei nem is engedik meg a továbbmenő tárgyalást. Áttekinthető, világos leírása mindenesetre módot ad ennek a legutóbbi két évtizedben kifejlődött, elméleti és gyakorlati szempontból igen nagy jelentőségű valószínűségszámítási stúdiumnak további tanulmányozására de felhasználására is. Nagyban elősegítik ezt a feladatok, amelyek közt több kémiai vonatkozású kérdés tárgyalása található; így szerző eredménye a kinetikus tömeghatás törvényének valószínűségszámítási tárgyalására vonatkozóan.

Az első függelékben STONE tételét bizonyítja be, mely szerint minden eseményalgebrához megadható egy vele izomorf halmaztest. E tétel biztosítja a KOLMOGOROV elmélet által követett eljárás jogosultságát.

A második függelék a halmazelméleti és mértékelméleti segédeszközöket adja. Bebizonyítja itt KOLMOGOROVnak azt az alapvető tételét, amely előírt eloszlású valószínűségi változók végtelen sokaságának egzisztenciáját biztosítja.

A harmadik függelék bevezet szerzőnek a valószínűségszámítás új axiomatikus megalapozására vonatkozó elméletébe. Ez a megalapozás a feltételes valószínűségekre vonatkozik, és speciális esetként tartalmazza a KOLMOGOROV-féle megalapozást. A feltételes valószínűségek axióma-rendszere lehetővé teszi az egész egyenesen (térben) egyenletes eloszlás értelmezését, ami által szabatossá válnak bizonyos a fizikában eddig alkalmazott, de matematikai szempontból nem jogosult eljárások.

A negyedik függelék a valószínűségszámítás történetének rövid áttekintését tartalmazza. Szerző egyébként a könyv számos helyén is ad történeti utalásokat. Itt összefoglalja a valószínűségszámítás kialakulását, annak első ismeretes történeti nyomaitól, majd részletesebben foglalkozik a XX. században bekövetkezett újabb fellendüléssel. Külön paragrafust szán a valószínűségszámítás hazai történetének. Ez a rész a valószínűségszámítás kifejlődését elvi szempontból világítja meg, rámutat a gyakorlat ösztönző szerepére e tudományág kialakulásában.

A könyvet tárgy- és névmutató, továbbá irodalomjegyzék és a könyvben található táblázatok jegyzéke zárja. Külön tárgymutatót ad az alkalmazásokra vonatkozóan. Az irodalomjegyzéket, melyet tárgykör és jelleg szerint csoportosít, az igen bő irodalomból szerző igen nagy gondossággal válogatta ki. A táblázatok számos gyakorlati felhasználás keresztülvitelét segítik elő.

Az anyag e vázlatos ismertetése is mutatja, hogy a könyv az elméleti és gyakorlati ismereteknek igen gazdag tárháza. A könyv egészének és részleteinek jó áttekinthetősége, a tárgyalt kérdések sokoldalú megvilágítása mind amellett szólnak, hogy az egyetemi hallgató, a kutató és a gyakorlat szakembere nemcsak kiváló tankönyvet kap, de a valószínűségszámításnak olyan kézikönyvét, amelyet elméleti és gyakorlati problémáiban haszonnal forgathat.

Vincze István
a matematikai tudományok kandidátusa

V. F. Vlaszov: „Vákuumcsövek" című könyvének ismertetése

Az elektroncsövekkel foglalkozó külföldi irodalom igen gazdag, a magyar nyelvű irodalom azonban még távolról sem elégíti ki az ilyen irányú hazai igényeket. Éppen ezért örömmel kell üdvözölnünk V. F. VLASZOV könyvét, amelyet az 1949-ben megjelent második kiadásból magyarra fordítva a múlt évben adott ki az Akadémiai Kiadó.

A mű a szerzőnek híradástechnikai műszaki főiskolák hallgatói számára tartott előadásának az anyagát öleli fel, de azért nem csak egyetemi hallgatóknak szól, hanem a gyakorlatban működő kutatók és ipari szakemberek is haszonnal forgathatják.

Általános áttekintés (I. fejezet) után az elektronemisszió különféle válfajaira vonatkozó alapvető tudnivalókat foglalja össze (II. fejezet); az elméleti alapok változatos ismertetésén túl megadja azokat a formulákat, amelyek gyakorlatban szükséges számítások alapját képezik. — A III. fejezetben izzó katódok jellemző adatait és az emisszió számításának módszereit tárgyalja, majd ismerteti a különféle típusú izzó katódok felépítését és sajátságait. Ebben a fejezetben találunk egy rövid ismertetést vashidrogén ellenállásokról és termisztorokról; az előbbi mint a katódok fűtő áramának szabályozója, az utóbbi, mint indító ellenállás kerül tárgyalásra e fejezet keretében. — A IV. fejezet az elekronoptika elemeivel foglalkozik, s annyit nyújt, amennyi a későbbiek során okvetlenül szükséges. — Az V. és VI. fejezet a vákuum diódával foglalkozik. Az előbbi a dióda kvázisztatikus esetben érvényes tértöltési törvényét, majd az elektronok véges futási idejének következményeit tárgyalja, az utóbbi a dióda karakterisztikáját és sztatikus jellemzőit, majd igen nagy frekvenciás viselkedését elemzi behatóan. Ezután röviden összefoglalja a diódák méretezésének legfontosabb kérdéseit és végül a diódának kapcsolási elemként való alkalmazását tárgyalja. — A VII. fejezet a triódában végbemenő jelenségekkel foglalkozik és e jelenségek elemzésével értelmezi a trióda sztatikus karakterisztikáinak alakját és a csőjellemzőket. Fontos és érdekes részei a fejezetnek azok a szakaszok, amelyek a csőjellemzők és a trióda konstrukciós adatai közti összefüggésekkel foglalkoznak. — A VIII. fejezet a trióda emissziós áramának az anód és a rács közti megoszlását tárgyalja; a IX. fejezet a triódának erősítőként való alkalmazásáról szól. A X. és XI. fejezet a tetródákkal, illetve a pentódákkal foglalkozik, a karakterisztikák és csőjellemzők tárgyalása mellett nemcsak a csőtipusok leírását adja, hanem igen hasznos szempontra mutat rá konstrukciós és kapcsolástechnikai szempontból egyaránt. — A XII. fejezet a ráccsal vezérelt csövek nagyfrekvenciás viselkedését tárgyalja, rámutat arra, hogy milyen korlátai vannak a klasszikus csőtípusok nagyfrekvenciás alkalmazásainak és ismerteti a klasszikus típusú, de újszerű konstrukciójú (sík-elektródás) csöveket. — A XIII. fejezet keverőcsövek, a XIV. kombinált erősítő és keverő csövek, a XV. fejezet pedig adó csövek működésének általános ismertetésével, karakterisztikáinak és jellemzőinek elemzésével és az alkalmazásuk során követendő szempontok taglalását tartalmazza. — A XVI. és XVII. fejezet klisztronok, illetve magnetronok működését és alkalmazását ismerteti; a tárgyalás egészen elemi, szinte leíró jellegű, más szóval — szemben a klasszikus csőtípusoknál alkalmazott eljárással — sem konstrukciós tekintetben, sem a felhasználást illetőleg nem foglalkozik részletkérdésekkel. — A XVIII. fejezet katódsugárcsövekkel foglalkozik, ismét a gyakorlati alkalmazások szempontjából nélkülözhetetlen elemi tudnivalókra szorítkozva. — A XIX. fejezet a gázkisülések alapjelenségeit, a XX. az izzó katódos gáz-diódák és tiratronok, a XXI. pedig az önálló gázkisüléssel (ti. glim-kisüléssel vagy ívkisüléssel) működő gáztöltésű csövek legfőbb típusainak működését vázolja. — Végül az utolsó fejezet fényelektromos készülékekkel foglalkozik, vákuum és gáztöltésű fotocellákkal, ellenállás cellákkal és fényelemekkel egyaránt. Mintegy ezek alkalmazására szolgáló példa gyanánt vázolja az elektronoptikai képátalakító és néhány televíziós képbontó működését.

A könyv XVI. fejezetével kezdődő része lényegében véve bevezető ismereteket nyújt néhány szinte különálló tárgykörre vonatkozólag, legalábbis e tárgykörök közti belső összefüggések a tárgyalásból, de még a bevezető áttekintésből sem derülnek ki. Annál szebb, zárt egység a klasszikus csőtípusokkal foglalkozó III.-XV. fejezet, a megelőző bevezetéssel. A tárgyalás mindenütt világos és a közölt ismeretek és gyakorlati alkalmazásuk tökéletes elsajátítását nagyban elősegítik a részletesen — néha talán túl részletesen

— kidolgozott példák. Érdemes lett volna az olvasó számára további feladatokból való gyűjteményt is összeállítani, természetesen a kidolgozás megadása nélkül. Az imént méltatott résznek az egységes felépítése és világos előadása mellett külön örvendetes néhány a tárgyalásba kiemelt kérdés elemzése. Ilyen pl. a csövek konstrukciós adatainak összefüggése a csőjellemzőkkel, amelyet az elektroncsövek alkalmazásával foglalkozó könyvek szinte teljesen mellőznek, a csövek működési mechanizmusával és konstrukciójával foglalkozó könyvek viszont gyakran szinte öncélú problémaként tárgyalják.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy VLASZOV könyve gazdagította a magyar nyelvű szakirodalmat a tanulmányait végző és a már praxisban lévő kollégák hasznára.

Dr. Faragó Péter
a fizikai tudományok kandidátusa

A III. OSZTÁLY HÍREI

FELOLVASÓ ÜLÉSEK 1956. ELSŐ FELÉBEN

Január 27-én

1. GOMBÁS PÁL r. tag: „Az elektronsűrűség meghatározása az új statisztikus atommodellben".
2. GOMBÁS PÁL bemutatja LADÁNYI KÁROLY: „A nemes fémek elméletéről" és SZÉPFALUSSY PÉTER: „Atomelektronok hullámfüggvények ortogonalitásáról" című dolgozatát.
3. HAJÓS GYÖRGY r. tag bemutatja I. FLEISCHER (Párizs): „Szubdirekt összegekről", FEJES-TÓTH LÁSZLÓ: „A legritkább paraciklusfedésről", Molnár József: „A topologikus Helly-tétel általánosítása gömbfelületre" és HEPPES ALADÁR—RÉVÉSZ PÁL: „A Borsuk-féle feldarabolási problémához" című dolgozatát.
4. KOVÁCS ISTVÁN lev. tag bemutatja KESZTHELYI LAJOS: „Sugárgyengülés mérések Co^{60}-sugárzásával" című dolgozatát.
5. SZIGETI GYÖRGY lev. tag bemutatja ERŐ JÁNOS: „Rádiófrekvenciás ionforrás ionsugarának analízise" című dolgozatát.

Február 24-én

1. ALEXITS GYÖRGY r. tag: „Egy ortogonális sorok szummálására vonatkozó tétel".
2. GOMBÁS PÁL r. tag: „Atommagoknak nukleonokkal való kölcsönhatásáról".
3. GOMBÁS PÁL r. tag bemutatja SZÉPFALUSSY PÉTER: „A nukleonok közötti kölcsönhatás egy új típusáról", KISDI DÁVID:* „A $^{208}_{82}Pb$ mag néhány jellemző adatának elméleti meghatározása" és KISDI DÁVID: „Spontán maghasadás vizsgálata a statisztikus modell alapján" című dolgozatát.
4. HAJÓS GYÖRGY r. tag bemutatja SZÁSZ PÁL: „A hiperbolikus trigonometriának a Poincaré-féle körmodellről való leolvasása" című dolgozatát.
5. RÉNYI ALFRÉD lev. tag. bemutatja K. URBANIK (Wroclaw): „Egy probléma az elágazó sztochasztikus folyamatok elméletéből", PRÉKOPA ANDRÁS: „Sztochasztikus halmazfüggvények", PRÉKOPA ANDRÁS—RÉNYI ALFRÉD—K. URBANIK: „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlása kommutatív bikompakt

* KISDI DÁVID dolgozatainak bemutatása elmaradt.

topologikus csoportokban", HEPPES ALADÁR: „Többdimenziós valószínűségi eloszlások meghatározása vetületeik segítségével", KISS OTTÓ: „A harmonikus és trigonometrikus interpoláció konvergenciájáról" és SZŰSZ PÉTER: „Megjegyzés a valós számok Cantor-féle sorral való előállításához" című dolgozatát.

Március 30-án

1. JÁNOSSY LAJOS r. tag: „Részecskék energiájának meghatározása emulzióban a szóródás segítségével".
2. JÁNOSSY LAJOS r. tag bemutatja BOZÓKY GYÖRGY—FENYVES ERVIN—JÁNOSSY LAJOS: „Vizsgálatok a kozmikus sugárzás áthatoló nem-ionizáló komponensével kapcsolatban", BOZÓKY GYÖRGY—FENYVES ERVIN—JÁNOSSY LAJOS: „Áthatoló részecskék keltése nemionizáló kozmikus sugárzás által", JÁNOSSY LAJOS—SÁNDOR TAMÁS—SOMOGYI ANTAL: „A kiterjedt légizáporok átmeneti effektusa", FARAGÓ PÉTER—JÁNOSSY LAJOS: „A relativisztikus tömegváltozási formula kísérleti igazolásáról", JÁNOSSY LAJOS—KISS DEZSŐ: „További megjegyzések a μ mezonok közepes élettartamának méréséhez", FRIEDLÄNDER ERVIN—KISS DEZSŐ: „Többszörös GM-cső impulzusokkal kapcsolatos mérések", FRIEDLÄNDER—ERVIN: „A mezon-nukleon ütközésben létrejövő multiplett mezonkeletkezésről", ZIEGLER MÁRIA—SZAMOSI GÉZA: „A félempirikus tömegformuláról", GYÖRGYI GÉZA: „Rövid hatótávolságú taszító erők szerepe az atommag héjmodelljében", TÓTH MIHÁLY: „Fotoelektromos optikai erősítő" és FRIEDLÄNDER ERVIN: „Egyszeresen töltött nem relativisztikus részecskék tömegének meghatározása fotoemulzióban a ‚maximum likelihood' módszerrel" c. dolgozatát.

Április 27-én

1. NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag bemutatja J. Sawicki: „A nukleon sajátereje a klasszikus skalár mezontérben" című dolgozatát.
2. TURÁN PÁL r. tag bemutatja GYIRES BÉLA: „Valós függvénymatrixhoz tartozó általánosított Toeplitz-féle determinánsokról" és RÉNYI KATÓ: „Pólya egy problémájáról" című dolgozatát.
3. BUDÓ ÁGOSTON lev. tag bemutatja BUDÓ ÁGOSTON—KETSKEMÉTHY ISTVÁN: „A szekundér-lumineszcenciának a lumineszcenciaspektrumokra gyakorolt befolyásáról" című dolgozatát.
4. RÉNYI ALFRÉD lev. tag bemutatja ERDŐS PÁL—RÉNYI ALFRÉD: „Egész függvények szukcesszív deriváltjainak gyökeiről és PRÉKOPA ANDRÁS: „Banach algebrából vett értékű multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése" című dolgozatát,
5. VARGA OTTÓ lev. tag bemutatja KÁNTOR SÁNDOR: „Bolyai Farkas átdarabolási tételének térbeli általánosításához" című dolgozatát.

Június 8-án

1. RÉDEI LÁSZLÓ r. tag, akadémikus: „A háromszög nevezetes pontjainak elmélete“ (székfoglaló előadás).
2. DETRE LÁSZLÓ lev. tag: „Többszörös periódusú változó csillagok és pulzációelmélet (székfoglaló előadás).
3. GYULAI ZOLTÁN r. tag bemutatja E. GRILLOT (Párizs): „Infravörösen lumineszkáló kristályos ásványi anyagok“ és L. M. LJAMSEV (Moszkva): „Hang nem-tükrös visszaverődése vékony határolt lemezekről folyadékban“ című dolgozatát.
4. TURÁN PÁL r. tag bemutatja ERDŐS PÁL: „Egy Borel-szummabilitásra vonatkozó hézag tételről“ című dolgozatát.
5. RÉNYI ALFRÉD r. tag bemutatja FENYŐ ISTVÁN: „A függvényegyenletek egy megoldási módszeréről“ című dolgozatát.

KITÜNTETÉSEK

A Népköztársaság Elnöki Tanácsa a Magyar Tudományos Akadémia 1956. évi Nagygyűlése alkalmából a tudományos munka, valamint a tudomány szervezése terén elért kimagasló eredmények elismeréséül akadémikusoknak, levelező tagoknak, kutatóknak, akadémiai dolgozóknak kitüntetéseket adományozott.

A III. Osztály kebeléből a Népköztársaság Elnöki Tanácsa a „Munka Érdemrend“ kitüntetést Egerváry Jenő akadémikusnak és Pál Lénárd kandidátusnak, a Központi Fizikai Intézet osztályvezetőjének adományozta.

Szabados Dezső a Központi Fizikai Kutató Intézet kutatójának a „Szocialista Munkáért Érdemérem“ és Ziermann Margit a Matematikai Kutató Intézet tudományos munkatársának a „Munka Érdemérem“ kitüntetést adományozta.

HELYREIGAZÍTÁS

GÁSPÁR REZSŐ, a fizikai tudományok kandidátusa, a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszékének vezetője az MTA Elnöksége részéről az 1955. évi eredményes munkájáért 5000 Ft jutalomban részesült, *nemcsak* „Über das Verhalten der statistisch berechneten Elektronedichten in der Nähe der Atomkerne“ című dolgozatában elért eredményeiért, de KÓNYA ALBERTtel közösen írt „Zur Theorie des HI Moleküls“, CSAVINSZKY PÉTERrel közösen írt „A kétvegyértékű, kétatomos ionmolekulák kötésének elméletéről. A földalkáli oxidok kötéséről MgO“ és MOLNÁR BÉLÁval közösen írt „A Na és K atomok elektronaffinitásáról“ című dolgozatában elért eredményeiért is.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1956. IV. 14. — Terjedelem: 11 (A/5) ív, 24 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 56-1342 Felelős vezető: Vincze György

Ára 24,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A III. OSZTÁLY HÍREI

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VI. KÖTET 3—4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VI. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Magyar Ifjúság Útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

ENERGIA ÉS IMPULZUS AZ ERŐTEREK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉBEN*

MARX GYÖRGY—ROMÁN PÁL

TARTALOM

1. §. Az energia-impulzus-tenzor

Az energia a fizika minden fejezetében centrális szerepet játszik. Ez a mennyiség teremt kapcsolatot a fizika különböző területei között. Érthető tehát az az érdeklődés, mely az energiával kapcsolatban a modern elméleti kutatások terén is megnyilvánul.

Folytonos anyagnál, erőtereknél az energia eloszlását az energiasűrűség segítségével írjuk le. Ez a mennyiség azonban nem Lorentz-invariáns, így nem használható az energiaviszonyoknak vonatkoztatási rendszertől független leírására. A relativisztikus tárgyalás alapjául éppen ezért nem önmagában az energiasűrűség, hanem a T_{ik} energia-impulzus-tenzor szolgál. Az energiasűrűség ennek egyik komponense ($-T_{44}$), de a többi komponens is hasonló szemléletes értelemmel bír. Így pl. a T_{14}, T_{24}, T_{34} komponensek $\frac{i}{c}$-szerese szolgáltatja a tér impulzussűrűségét. Zárt rendszer esetén érvényes az energia és impulzus megmaradásának tétele. Ez a következő egyenletbe foglalható össze [1]:

(1) $$\nabla_k T^{ik} = 0.$$

* A cikkben foglaltak egy része megjelent az Acta Physica Hungaricában. [3]. További részletekről előadás hangzott el a Relativitáselméleti Kollokviumon (Dobogókő, 1955. április). Tekintettel a kérdéskör iránt megnyilvánult érdeklődésre, a magyar nyelvű közleményt kiegészítettük néhány többé-kevésbé ismert, de az irodalomban mégis nehezen hozzáférhető részlettel. A dolgozat 1956. ápr. 15-én érk.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy az energia-impulzus-tenzor meghatározása bármely fizikai elméletben centrális jelentőségű.

A T_{ik} meghatározására a térelmélet általános érvényű módszert szolgáltat, mely DAVID HILBERT nevéhez fűződik [2]. A Newton-féle elmélet szerint a gravitációs tér forrásául a tömegek szolgálnak. A relativitáselmélet ennek pontosabb megfogalmazását adja. A tömeg az energiával arányos, tehát azt is mondhatjuk, hogy a nehézkedés az energia sajátsága. Az energiasűrűség azonban nem tekinthető önálló fizikai fogalomnak, mert vonatkoztatási rendszertől függ. Ezért az általános relativitáselmélet értelmében a gravitációs tér forrásául a T_{ik} energia-impulzust kell tekintenünk. Ez szerepel a gravitációs téregyenletek jobboldalán, hasonlóan az áramsűrűségnek a Maxwell-egyenletek esetében vitt szerepéhez:

(2) $$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=-\varkappa T_{ik}.$$

A gravitációs egyenlet a vizsgált rendszer

$$S=\frac{1}{2}\int(\varkappa^{-1}R+L)\sqrt{g}\,dx.$$

($dx=dx^1dx^2dx^3dx^4$) hatásintegráljának a g_{ik} metrikus tenzor komponensei szerinti végrehajtott variációjából képezhető. (g_{ik} játssza a gravitációs potenciál szerepét). Itt a $\varkappa^{-1}R$ geometriai mennyiség variációja szolgáltatja (2) baloldalát, az anyag L Lagrange-függvényének variációja pedig a jobboldalt, tehát az energia-impulzust adja. Így HILBERT nyomán a vizsgált anyag, erőtér L Lagrange-függvényének ismeretében minden további nélkül képezhetjük a T_{ik} energia-impulzus-tenzort:

(3) $$\delta\int L\sqrt{g}\,dx=\frac{1}{2}\int T_{ik}\sqrt{g}\,\delta g^{ik}\,dx.$$

Az L Lagrange-függvényről tételezzük fel, hogy az a ψ^α térmennyiségekből, azok első deriváltjaiból és a g_{ik} metrikus tenzor komponenseiből épül fel. (A legtöbb alkalmazásnál magasabb deriváltak nem szerepelnek, noha az elmondandók erre az esetre is általánosíthatók [3].)

(4) $$L=L(\psi^\alpha,\partial_k\psi^\alpha,g_{ab}).$$

Tekintettel arra, hogy [1]

(5) $$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{ik}}=-\frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{ik},$$

(3)-ból T_{ik} a következő alakban állítható elő:

(6) $$T^{ik}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial(L\sqrt{g})}{\partial g^{ik}}=2\frac{\partial L}{\partial g^{ik}}-g^{ik}L.$$

Ha bevezetjük a sűrűségfüggvényeket (a tenzormennyiségek $\sqrt{g}$-szeresét) és azokat gót betűkkel jelöljük, (6) így is írható:

$$\mathfrak{T}^{ik} = 2\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{ik}}. \tag{7}$$

Az így származtatott tenzor definíciójánál fogva szimmetrikus. Ugyanis g^{ik} szimmetrikus és a Lagrange-függvényben ez csak szimmetrikus tenzorral szorozva léphet fel. Ezért $\mathfrak{L}$-nek g^{ik} szerint képezett differenciálhányadosa szintén szimmetrikus. Ha lenne L-ben egy $A^{ik}g_{ik}$ tag, amelyben $A_{ik} = -A_{ki}$, akkor az azonosan zérust adna. Az ilyen tagok L-ből eleve elhagyandók. (Különben a térmennyiségek variációjából adódó téregyenletek sem lennének egyértelműek. Természetesen, ha az általános invariáns L-et Lorentz-invariáns Lagrange-függvény átírásából állítjuk elő, ilyen probléma fel sem merülhet.) T^{ik} szimmetriája az impulzusmomentum megmaradásának feltétele [1].

A (7) szerint származtatott energia-impulzus-tenzor (1)-et mindig kielégíti, tehát az energia és impulzus megmaradásáról számot ad. Ezt később igazolni is fogjuk.

2. §. Az energia-impulzus-tenzor előállítása Descartes-koordináta-rendszerben

A mondottak szerint T^{ik} meghatározásának nincs akadálya, ha ismerjük a vizsgált erőtér általános koordinátatranszformációval szemben invariáns Lagrange-függvényét. Az ezzel való munka azonban a Riemann-geometria módszereinek alkalmazását teszi szükségessé, noha egyébként ez elkerülhető volna és a vizsgált erőtér végig Descartes-koordináta-rendszerben, a speciális relativitáselmélet egyszerűbb keretei között tanulmányozható. Néha pedig az általánosan kovariáns L megkonstruálása is nehézségekbe ütközhet. Ezért kívánatos az energia-impulzus-tenzornak a speciális relativitáselmélet keretei közt való tanulmányozása. Erre lehetőség is kínálkozik. Egyrészt nem nehéz a Lagrange-függvényből dimenzionális, ill. transzformációs tulajdonságokat figyelembevevő ad hoc megfontolások révén olyan mennyiségek származtatása, melyek megmaradási tételeknek tesznek eleget. Másrészt a Lagrange-függvény Lorentz-transzformációcsoporttal szemben mutatott invarianciájából, mint azt többen megmutatták (l. pl. [4, 5, 6]), a megmaradási tételnek eleget tevő, megfelelő dimenziójú integrálmennyiségek adódnak.

L-ből a speciális relativitáselmélet keretében is egyszerűen képezhető egy divergenciamentes tenzor. Induljunk ki ui. az

$$L = (x, \psi^{\alpha}(x), \psi^{\alpha}_{,r}(x)) \tag{8}$$

$$(\psi^{\alpha}_{,r} \equiv \partial_r \psi^{\alpha})$$

Lorentz-invariáns Lagrange-függvényből és hajtsunk végre egy olyan transzformációt, mely a koordinátarendszer eltolásának felel meg:

(9) $$x_i \to x_i + a_i$$

(a_i legyen infinitezimális). L e transzformációval szemben invariáns, tehát

(10) $$\delta L = \left[\partial_i L + \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha}\psi^\alpha_{,i} + \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}}\psi^\alpha_{,ir}\right] a_i = 0.$$

Ez akkor teljesül tetszőleges a_i esetén, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés zérus. Vegyük figyelembe a Lagrange-függvényből ψ^α variációjával adódó téregyenleteket:

(11) $$\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} - \partial_r \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}} = 0.$$

Ekkor a szögletes zárójelben álló kifejezés így írható:

(12) $$\partial_i L - \partial_r \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}}\psi^\alpha_{,i} + \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}}\psi^\alpha_{,ir} \equiv \partial_r \theta_{ir} = 0,$$

ahol

(13) $$\theta_{ik} = L\,\delta_{ik} - \psi^\alpha_{,i}\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,k}}$$

Tehát θ_{ik} divergenciamentes. Tekintettel arra, hogy a kanonikus elméletben $\frac{1}{ic}\theta_{ik}$ játssza az x_i koordináták kanonikus konjugáltjának szerepét, (13)-at nevezik kanonikus energia-impulzus-tenzornak. θ_{4k} energiasűrűség dimenziójú. Kézenfekvő kérdés, hogy van-e kapcsolat θ_{ik} és az előző fejezetben bevezetett T_{ik} között.

A legelső észrevétel, amit meg kell tennünk, az, hogy θ_{ik} (13)-ból látható módon általában nem szimmetrikus, ezért ha belőle képeznénk az impulzusmomentumot, arra nem volna érvényes megmaradási tétel. Ezért a θ_{ik} kanonikus energia-impulzus-tenzor nem azonosítható a vizsgált rendszer dinamikai viselkedését, energia- és impulzusviszonyait leíró T_{ik} dinamikai energia-impulzus-tenzorral.

Először F. BELINFANTE dolgozott ki egy ad hoc módszert arra, hogy θ_{ik}-ból kiindulva a descartesi metrika keretei között megalkothassunk T_{ik}-t [7]. Alapul a Lagrange-függvénynek az inhomogén Lorentz-csoporttal szemben mutatott invarianciája szolgál. A (9) koordináta-kezdőpont-eltolással szemben fennálló invarianciát (12) levezetésénél már felhasználtuk. Vizsgáljuk meg, mit olvashatunk le a Lagrange-függvénynek egy homogén Lorentz-transzformációval szemben mutatott invarianciájából.

Tekintsük a következő infinitezimális Lorentz-transzformációt:

(14) $$x'_i = x_i + \varepsilon_{ik} x_k,$$

ahol

(15) $$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}.$$

Ennek során a ψ^α térfüggvény megváltozása

(16) $$\delta\psi^\alpha = \psi^{\alpha\prime}(x') - \psi^\alpha(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ik} I_{ik}^{\alpha\beta}\psi^\alpha.$$

Itt $I_{ik}^{\alpha\beta}$ az infinitezimális Lorentz-transzformáció operátora a ψ^α-k által kifeszített térben. Ez (15) folytán i-ben és k-ban antiszimmetrikus. (Különféle terekre vonatkozó konkrét alakját majd a későbbiekben adjuk meg.) Képezzük most definiciószerűen az alábbi, r és k-ban antiszimmetrikus háromindexes tenzort:

(17) $$S_{rki} = -\frac{\partial L}{\partial\psi^\alpha_{,i}} I_{rk}^{\alpha\beta}\psi^\beta.$$

Alkossuk meg ebből a következő új mennyiséget:

(18) $$B_{rki} = -\frac{1}{2}(S_{rki} - S_{kir} - S_{irk}).$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy első két indexében ez is antiszimmetrikus, $B_{rki} = -B_{kri}$. Azt állítjuk, hogy a B_{rki} divergenciájával kiegészített kanonikus tenzor szintén divergenciamentes és *szimmetrikus* lesz. A dinamikai energia-impulzus-tenzort tehát így képezhetjük:

(19) $$T_{ik} = \theta_{ik} + \partial_r B_{rki}.$$

Ennek divergenciamentessége evidens, hiszen θ_{ik} divergenciamentes és $\partial_k\partial_r B_{rki} = 0$, mert B_{rki} első két indexében antiszimmetrikus. T_{ik} állított szimmetriájának bizonyítása már bonyolultabb. Mindenesetre (19), (18) és S_{rki} antiszimmetriája miatt

(20) $$T_{ik} - T_{ki} = -\partial_r S_{ikr} + \theta_{ik} - \theta_{ki}.$$

Most kimutatjuk, hogy

(21) $$-\partial_r S_{ikr} = \theta_{ki} - \theta_{ik}.$$

Ecélból végezzünk a rendszer Lagrange-függvényén infinitezimális Lorentz-transzformációt. L invarianciája miatt a Lagrange-függvénynek a transzformáció által előidézett megváltozása zérus:

(22) $$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial\psi^\alpha}\delta\psi^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\psi^\alpha_{,r}}\delta\psi^\alpha_{,r} = 0.$$

Itt $\delta\psi^\alpha$-t (8) adja és

$$\delta\psi^\alpha_{,r} = \delta\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\cdot\psi^\alpha\right) = \delta\frac{\partial}{\partial x_r}\cdot\psi^\alpha + \frac{\partial}{\partial x_r}\delta\psi^\alpha$$

$$= \varepsilon_{ri}\psi^\alpha_{,i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ik} I_{ik}^{\alpha\beta}\psi^\beta_{,r},$$

tehát (14)-ből (az utolsó tagban indexcserével):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha}\varepsilon_{ik}I_{ir}^{\alpha\beta}\psi^\beta+\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \psi_{,r}^\alpha}\varepsilon_{ik}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi_{,r}^\beta+\frac{\partial L}{\partial \psi_{,i}^\alpha}\varepsilon_{ik}\psi_{,k}^\alpha=0.$$

De itt (6) miatt

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{,i}^\alpha}\psi_{,k}^\alpha=-\theta_{ki}+\delta_{ki}L\equiv-\frac{1}{2}(\theta_{ki}+\theta_{ik})-\frac{1}{2}(\theta_{ki}-\theta_{ik})+\delta_{ki}L,$$

tehát ε_{ik} tetszőleges, de antiszimmetrikus volta miatt

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi^\beta+\frac{\partial L}{\partial \psi_{,r}^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\varphi_{,r}^\beta-\theta_{ki}+\theta_{ik}=0. \tag{23}$$

Másrészt azonban (17) és a (11) téregyenlet felhasználásával

$$\partial_r S_{ikr}=-\partial_r\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,r}^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi^\beta\right)=-\partial_r\frac{\partial L}{\partial \psi_{,r}^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi^\beta-\frac{\partial L}{\partial \psi_{,r}^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi_{,r}^\beta=$$

$$=-\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi^\beta-\frac{\partial L}{\partial \psi_{,r}^\alpha}I_{ik}^{\alpha\beta}\psi_{,r}^\beta.$$

Ezzel (23) így alakul:

$$-\partial_r S_{ikr}-\theta_{ki}+\theta_{ik}=0,$$

amivel (21)-et bebizonyitottuk. Ennélfogva

$$T_{ik}=T_{ki},$$

vagyis a kiegészített tenzor tényleg szimmetrikus.

Kérdés, hogy a Belinfante-féle módszerrel, a pusztán Lorentz-csoporttal szemben mutatott invarianciát felhasználva megalkotott T_{ik} valóban megegyezik-e az anyagnak a gravitációs térrel való kölcsönhatását leíró, (2)-ben szereplő dinamikai energia-impulzus-tenzornak euklideszi geometriára, descartesi koordinátarendszerre specializált alakjával. A válasz a kétféle származtatás lényeges különbségeit tekintve nem könnyű. A kérdéssel először ROSENFELD foglalkozott [8] és igazolta a Belinfante-féle értelmezés jogosultságát. Mi a következő §-ban egy attól eltérő tárgyalást adunk, mely magasabbrendű deriváltakat tartalmazó Lagrange-függvényre és nem zárt rendszerre is nehézség nélkül általánosítható.

3. §. A dinamikai energia-impulzus-tenzor származtatása

A Riemann-geometria keretei közt T_{ik} meghatározására (3) szerint a g^{ik} metrikus tenzor variálása szolgál. Idézzük elő ezt a variációt egy általános infinitezimális koordinátatranszformációval:

$$x^{i'}=x^i+\xi^i(x). \tag{24}$$

Adott térfüggvény transzformációs képlete [1]:

$$\psi'^{i'k'\dots}_{m'n'\dots} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{r}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{s}}\dots\frac{\partial x^{u}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{v}}{\partial x^{n'}}\dots\varphi^{rs\dots}_{uv\dots}\tag{25}$$

(24)-re való tekintettel:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{r}} = \delta^{i}_{r} + \xi^{i}_{,r}(x),\qquad \frac{\partial x^{u}}{\partial x^{m'}} = \delta^{u}_{m} - \xi^{u}_{,m}(x).\tag{26}$$

Látjuk tehát, hogy bármely térfüggvény komponenseinek az infinitezimális (24) transzformáció által előidézett megváltozása $\xi^i(x)$ első deriváltjainak lineáris kifejezése:

$$\delta\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha'}(x') - \psi^{\alpha}(x) = \mathfrak{T}^{\alpha s}_{\beta r}(x)\,\psi^{\beta}\xi^{r}_{,s}.\tag{27}$$

$\delta\psi$ megadja azt, hogy egy meghatározott geometriai helyen (melynek transzformáció előtti x^i és transzformáció utáni $x^{i'}$ koordinátái természetesen különbözők) mennyivel változott meg a ψ térmennyiség értéke. Emellett számítástechnikai okokból vezessük be a $\delta^*\psi^\alpha = \varphi^{\alpha'}(x) - \psi^\alpha(x)$ variációt is, mely megmondja, mennyivel különbözik a térmennyiség, ha a transzformáció előtt adott x^i számnégyessel jellemzett pontban és a transzformáció után ugyanezen x^i számnégyessel jellemzett, de az előbbitől geometriailag különböző pontban felvett értékeket hasonlítjuk össze. $\delta^*\psi$ és $\delta\psi$ közt egyszerű kapcsolat áll fenn:

$$\delta\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha'}(x+\xi) - \psi^{\alpha}(x) = \psi^{\alpha'}(x) + \psi^{\alpha'}_{,r}(x)\,\xi^{r} - \psi^{\alpha}(x) = \delta^*\psi^{\alpha} + \psi^{\alpha}_{,r}\,\xi^{r}.\tag{28}$$

A csillagos variáció előnye abban áll, hogy az összehasonlítandó függvények argumentumában azonos számok állanak, ezért a csillagos variáció és a parciális differenciálás sorrendje felcserélhető.

A Lagrange-függvényből képezett

$$S = \int_{\Omega} L\sqrt{g}\,dx = \int_{\Omega}\mathfrak{L}\,dx$$

hatásintegrál természetesen az Ω négydimenziós tartomány bármilyen választása esetén invariáns. Ha az integrációs változón a (24) transzformációt hajtjuk végre, S nem változik meg, ezért a formálisan képzett megváltozásnak zérusnak kell lennie:

$$\delta S = \int_{\Omega'}\mathfrak{L}'(x')\,dx' - \int_{\Omega}\mathfrak{L}(x)\,dx = 0.$$

Az első integrálban a transzformáció függvénydeterminánsa segítségével az eredeti koordinátákra visszatérve és másodrendű kicsiny tagokat konzekvensen elhagyva, néhány egyszerű átalakítással [1] a következőt kapjuk:

$$\int\left[\delta^*\mathfrak{L} + \partial_k(\mathfrak{L}\xi^k)\right]dx = 0,$$

részletesen:

$$\int\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi^{\alpha}}\delta^*\psi^{\alpha} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi^{\alpha}_{,r}}\delta^*\psi^{\alpha}_{,r} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}\delta^* g_{ik} + \partial_k(\mathfrak{L}\xi^k)\right]dx = 0.$$

A harmadik tagnál figyelembe vehetjük (7)-et. A második tagban (28) figyelembevételével integráljunk parciálisan és azután vegyük még tekintetbe a (11) Euler-egyenleteket (bennük Riemann-térben L helyett $\mathfrak{L}$-et írva). Így a következőre jutunk:

$$\int\left[\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\delta^* g_{ik} + \partial_k\left(\mathfrak{L}\xi^k + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi^{\alpha}_{,k}}\delta^*\psi^{\alpha}\right)\right]dx = 0.$$

Az utolsó tagban $\delta^* \psi^\alpha$-t fejezzük ki (28) segítségével $\delta\psi^\alpha$-val, vezessük be (13) szerint a Θ_i^k kanonikus tenzort és helyettesítsük be $\delta\psi^\alpha$ (27)-beli alakját. Kapjuk, hogy

$$\int \left[\frac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} \delta^* g_{ik} + \partial_k \left(\Theta_i^k \xi^i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi^\alpha_{,k}} \mathfrak{J}_{\beta i}^{\alpha r} \psi^\beta \xi^i_{,r} \right) \right] dx = 0. \tag{29}$$

Itt (25) és (28) figyelembevételével [1]:

$$\delta^* g_{ik} = -g_{ir} \xi^r_{,k} - g_{rk} \xi^r_{,i} - g_{ik,r} \xi^r.$$

Ezt (29)-be téve, valamint bevezetve a

$$\mathfrak{B}^{kr}_{..i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi^\alpha_{,k}} \mathfrak{J}_{\beta i}^{\alpha r} \psi^\beta \tag{30}$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$-\int \left(\mathfrak{T}_r^k \xi^r_{,k} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} g_{ik,r} \xi^r \right) dx + \int \partial_k \left(\Theta_i^k \xi^i + \mathfrak{B}^{kr}_{..i} \xi^i_{,r} \right) dx = 0.$$

A legelső tagban parciálisan integrálunk és rövidség kedvéért bevezetjük a

$$\mathfrak{B}^k_{.i} \equiv \Theta_i^k - \mathfrak{T}_i^k \tag{31}$$

jelölést:

$$\int_\Omega \left(\partial_k \mathfrak{T}_r^k - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} g_{ik,r} \right) \xi^r dx + \int_\Omega \partial_k \left(\mathfrak{B}^k_{.i} \xi^i + \mathfrak{B}^{kr}_{..i} \xi^i_{,r} \right) dx = 0. \tag{32}$$

ξ^i tetszőleges. Válasszuk értékét úgy, hogy az Ω tartomány határfelületén ξ^i és $\xi^i_{,r}$ zérus legyen. Ekkor a második integrál, mely Gauss tételének felhasználásával felületi integrállá alakítható, zérust ad. Külön zérusnak kell lennie tehát az első integrálnak. Mivel ξ^i az Ω tartomány belsejében tetszőlegesen választható, ez csak akkor következik be, ha

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\partial_k \mathfrak{T}_r^k - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} g_{ik,r} \right) \equiv \nabla_k T_r^k = 0. \tag{33}$$

Kimutattuk, hogy a (6) szerint képezett metrikus energia-impulzus-tenzor szükségszerűen divergenciamentes.

(33) tehát minden pontban teljesül. Ekkor (a határfelületen el nem tűnő ξ_i és $\xi^i_{,r}$ esetére visszatérve) (32)-ből és (33)-ból következik

$$\int_\Omega \partial_k (\mathfrak{B}^k_{.i} \xi^i + \mathfrak{B}^{kr}_{..i} \xi^i_{,r}) \, dx = 0$$

fennállása. Végezzük el a differenciálást:

$$\int_\Omega \left[(\partial_k \mathfrak{B}^k_{.i}) \xi^i + (\mathfrak{B}^r_{.i} + \partial_k \mathfrak{B}^{kr}_{..i}) \xi^i_{,r} + \mathfrak{B}^{rs}_{..i} \xi^i_{,rs} \right] dx = 0. \tag{34}$$

A (34) egyenlet csak akkor teljesülhet az Ω tartomány tetszőleges választása esetén, ha a (többször integrálhatónak feltételezett) integrandus a tartomány minden pontjában zérus. Tekintsük tehát az Ω tartománynak egy tetszőlegesen választott, de a továbbiakban rögzített pontját. Ebben

$$(\partial_k \mathfrak{B}^k_{.i}) \xi^i + (\mathfrak{B}^r_{.i} + \partial_k \mathfrak{B}^{kr}_{..i}) \partial_r \xi^i + \mathfrak{B}^{rs}_{..i} \partial_r \partial_s \xi^i = 0. \tag{34'}$$

Mivel ebben a kiszemelt pontban ξ^i és deriváltjai szabadon megválaszthatók, (34') csak úgy teljesülhet ξ^i, $\partial_r \xi^i$, $\partial_r \partial_s \xi^i$ minden értéke mellett, ha

(35') $$\mathfrak{B}^r_{.i} + \partial_k \mathfrak{B}^{kr}_{..i} = 0,$$

(36) $$\mathfrak{B}^{rs}_{..i} = -\mathfrak{B}^{sr}_{..i},$$

(37) $$\partial_k \mathfrak{B}^k_{.i} = 0.$$

(31) és (35) szerint

(38) $$\mathfrak{T}^k_i = \theta^i_k + \partial_r \mathfrak{B}^{rk}_{..i}.$$

Ez egész számításunk főeredménye. Descartesi metrikára áttérve $g_{ik} = \delta_{ik}$. A ko- és kontravariáns indexek közti különbség eltűnik. $g = 1$ és így a tenzorok és tenzorsűrűségek azonosak lesznek, tehát

(39) $$T_{ik} = \Theta_{ik} + \partial_r B_{rki}\,.$$

θ_{ik}-t (13) adja és most még megmutatjuk, hogy B_{rki} -t is megkonstruálhatjuk a speciális relativitás elméletének keretében, anélkül, hogy a térfüggvények általános kovariáns transzformációját ismernénk. (30) szerint ugyanis

$$B_{rik} = \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}} \mathfrak{J}^{\alpha i}_{\beta k} \, I^\beta,$$

tehát

(40) $$S_{ikr} \equiv B_{rik} - B_{rki} = \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}} \left[\mathfrak{J}^{\alpha i}_{\beta k} - \mathfrak{J}^{\alpha k}_{\beta i} \right] \psi^\beta.$$

Ez is antiszimmetrikus i, k-ban. Másrészt egy Lorentz-transzformációnál

$$\xi^i = \varepsilon_{ir} x_r; \qquad \xi^i_{,k} = \varepsilon_{ik},$$

s így ennél speciálisan (27) szerint

$$\delta \psi^\alpha = \mathfrak{J}^{\alpha k}_{\beta i} \xi^i_{,k} \psi^\beta = \varepsilon_{ik} \mathfrak{J}^{\alpha k}_{\beta i} \psi^\beta = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \left(\mathfrak{J}^{\alpha k}_{\beta i} - \mathfrak{J}^{\alpha i}_{\beta k} \right) \psi^\beta.$$

Összevetve ezt ψ^α-nak Lorentz-transzformációkor szenvedett (16) szerinti megváltozásával, látjuk, hogy most

(41) $$\mathfrak{J}^{\alpha k}_{\beta i} - \mathfrak{J}^{\alpha i}_{\beta k} = I^{\alpha\beta}_{ik},$$

ahol $I^{\alpha\beta}_{ik}$ a Lorentz-transzformáció infinitezimáloperátora. Ezért (40)-ből

(42) $$S_{ikr} = -\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,r}} I^{\alpha\beta}_{ik} \psi^\beta,$$

amit ψ általános metrikus tulajdonságainak ismerete nélkül is megszerkeszthetünk. A továbbiakban S_{ikr}-ből B_{rki} rekonstruálható. A (40) definíció miatt ugyanis

(42') $$\begin{cases} B_{rik} - B_{rki} = -S_{kir}, \\ B_{irk} - B_{ikr} = S_{rki}, \\ B_{kri} - B_{kir} = -S_{irk}. \end{cases}$$

Ezeket összegezve és tekintetbe véve B_{rki}-nek (36) által kifejezett antiszimmetriáját:

$$B_{rki} = -\frac{1}{2}(S_{rki} - S_{kir} - S_{irk}). \tag{43}$$

(39), (43) és (42) teljesen azonos a Belinfante-féle ad hoc eljárás képleteivel. A mi módszeres levezetésünkből azonban világosan kitűnik, hogy a (39) szerint megkonstruált szimmetrikus tenzor valóban megegyezik a Hilbert-féle (6) definícióval képzett tenzorral.

4. §. A térenergia, térimpulzus és impulzusmomentum

A dinamikai energia-impulzus-tenzort a mondottak szerint a (13), (16), (17), (18), (19) képletek alapján a speciális relativitáselmélet keretei között is megalkothatjuk és belőle a térenergia, térimpulzus, térimpulzusmomentum képleteit leszármaztathatjuk. (A (17)-ben szereplő infinitezimáloperátorokat alant adjuk meg.) Erre különösen a terek kvantumelméletében van szükség. Ha azonban csak a felsorolt integrális mennyiségeknek egész térre vonatkoztatott kifejezései érdekelnek, nem szükséges a felsorolt lépéseket végigcsinálni. Egyszerűbben is célhoz érhetünk.

Képezzük a térenergiát és térimpulzust. (19)-et és B_{rki} antiszimmetriáját felhasználva

$$E = -\int T_{44}\,dV = -\int \Theta_{44}\,dV - \int \sum_{1}^{3} \partial_r B_{r44}\,dV = -\int \Theta_{44}\,dV,$$

$$P_i = \frac{1}{ic}\int T_{i4}\,dV = \frac{1}{ic}\int \Theta_{i4}\,dV - \frac{1}{ic}\int \sum_{1}^{3} \partial_r B_{r4i}\,dV = \frac{1}{ic}\int \Theta_{i4}\,dV. \quad (i = 1, 2, 3)$$

(Figyelembe vettük GAUSS tételét és a térmennyiségekből megalkotott B_{rki}-nek a határfelületen való eltűnését.) Látható, hogy az egész térre vonatkoztatott térenergia és térimpulzus T_{ik} helyett Θ_{ik}-ból is képezhető. (Véges térrészre ez általában nem igaz.) Használjuk fel Θ_{ik}-nak (13) alakját és vezessük be ψ^α kanonikus konjugáltját a

$$\pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha}$$

értelmezés szerint. Ekkor a térenergia és térimpulzus következő alakjára jutunk:

$$\begin{aligned} E &= \int [\pi^\alpha \dot{\psi}^\alpha - L]\,dV = \int [\pi \dot{\psi} - L]\,dV, \\ \vec{P} &= -\int \pi^\alpha \operatorname{grad} \psi^\alpha\,dV = -\int \pi \operatorname{grad} \psi\,dV. \end{aligned} \tag{44}$$

Ezek az energia és impulzus kanonikus alakjai, melyek közvetlenül is felírhatók és emlékeztetnek a megfelelő pontmechanikai mennyiségek kifejezésére. Ha a téregyenletek folytán történetesen $L=0$ adódik, közvetlen kapcsolat áll fenn a pont-kvantummechanika $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ energia és $\frac{\hbar}{i}$ grad impulzusoperátorával [6]:

$$(44') \qquad E=-\frac{i}{\hbar}\int_n \pi\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi\, dV, \qquad \vec{P}=-\frac{i}{\hbar}\int \pi\left(\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\right)\psi\, dV.$$

Foglalkozzunk ezután a tér impulzusmomentumának kifejezésével. Tekintsük egyszerűség kedvéért ennek x-komponensét.

$$N_1=\frac{1}{ic}\int(x_2 T_{34}-x_3 T_{24})\,dV=\frac{1}{ic}\int(x_2\Theta_{34}-x_3\Theta_{24})\,dV+\frac{1}{ic}\int(x_2\partial_r B_{r34}-x_3\partial_r B_{r24})\,dV.$$

Az első integrálba helyettesítsük be Θ_{ik} kifejezését. A második integrálban pedig hajtsunk végre parciális integrálást. A felületi integrál zérus, így (42')-t és (17)-et felhasználva kapjuk:

$$N_1=-\int \pi^\alpha(x_2\partial_3-x_3\partial_2)\psi^\alpha\,dV-\int \pi^\alpha I_{23}^{\alpha\beta}\psi^\alpha\,dV,$$

azaz bevezetve az

$$(45) \qquad \vec{I}^{\alpha\beta}=(I_{23}^{\alpha\beta}, I_{31}^{\alpha\beta}, I_{12}^{\alpha\beta})$$

jelölést (infinitezimális forgásoperátorok), kapjuk:

$$(46) \qquad \vec{N}=-\int(\pi \mathrm{r}\times\operatorname{grad}\psi)\,dV-\int \pi\vec{I}\psi\,dV.$$

Az első tag a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjának választásától függő impulzusmomentum, a második tag az attól független spin. A (44')-vel analóg összefüggés a kvantummechanikai impulzusmomentum-operátorral most is fennáll:

$$(47) \qquad \vec{N}=-\frac{i}{\hbar}\int \pi\left(\mathrm{r}\times\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}+\vec{S}\right)\psi\,dV, \qquad \text{ahol } \vec{S}=\frac{\hbar}{i}\vec{I}.$$

A pálya-impulzusmomentum a kanonikus energia-impulzus-tenzorból, a spin a szimmetrizáló tagból adódott. (Ez azonban csak esetleges, magasabbrendű Lagrange-függvény vagy nyílt rendszer esetében nem érvényes eredmény.)

5. §. Alkalmazások

A módszer szemléltetése és a kvantumelméleti felhasználás szempontjából talán nem lesz felesleges, ha röviden áttekintjük az elméletnek legegyszerűbb erőterekre vonatkozó ismert alkalmazásait. Ezek kapcsán módunk lesz néhány megjegyzés megtételére is, mely eddig kellő figyelemre nem méltatott körülményre vonatkozik.

a) *Skaláris és pszeudoskaláris tér.*

$$\psi' = \psi, \quad \text{tehát} \quad I_{ik} = 0.$$

A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(\partial_r \psi \cdot \partial_r \psi + \varkappa^2 \psi^2\right),$$

tehát

$$T_{ik} = \Theta_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_i \psi \cdot \partial_k \psi - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\partial_r \psi \cdot \partial_r \psi + \varkappa^2 \psi^2\right)\right].$$

b) *Spinortér.*

A Dirac-ψ egy (14) Lorentz-transzformáció során a következőképpen transzformálódik (lásd pl. [10]):

$$\psi' = \left[1 + \frac{1}{8}\varepsilon_{ik}(\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i)\right]\psi,$$

tehát

$$I_{ik} = \frac{1}{4}(\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i).$$

A Dirac-egyenlet Lagrange-függvénye:

$$L = -\frac{\hbar c}{2}(\overline{\psi}\gamma_k \partial_k \psi - \partial_k \overline{\psi}\gamma_k \psi) + mc^2 \overline{\psi}\psi.$$

Ezeket felhasználva kapjuk:

$$\Theta_{ik} = -\frac{\hbar c}{2}(\overline{\psi}\gamma_k \partial_i \psi - \partial_i \overline{\psi}\gamma_k \psi),$$

$$T_{ik} = -\frac{\hbar c}{4}(\overline{\psi}\gamma_i \partial_k \psi + \overline{\psi}\gamma_k \partial_i \psi - \partial_i \overline{\psi}\gamma_k \psi - \partial_k \overline{\psi}\gamma_i \psi).$$

c) *Elektromágneses tér.*

Ezt az A_k vektorpotenciál írja le, mely ugyanúgy transzformálódik, mint a koordináták. Ezért

$$\delta A_k = \varepsilon_{kl} A_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{rs} I_{rs}^{kl} A_l,$$

ebből

$$I_{rs}^{kl} = -I_{sr}^{kl} = \delta_{rk}\delta_{sl} - \delta_{sk}\delta_{rl}.$$

Az elektromágneses tér Lagrange-függvénye

$$L = -\frac{1}{16\pi}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)^2 = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{ik}, \quad (\text{itt } F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i)$$

tehát

$$\Theta_{ik} = \frac{1}{4\pi}(\partial_i A_r F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik} F_{rs} F_{rs}), \text{ és } T_{ik} = \frac{1}{4\pi} F_{ik} F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik} F_{rs} F_{rs}).$$

Θ_{ik} nem szimmetrikus, de nem is invariáns mértéktranszformációval szemben, ezért semmi közvetlen fizikai jelentéssel nem bírhat, hanem csak T_{ik}.

Ebből is, a (17), (18), (19) képletekből is látható, hogy T_{ik}-t L Lorentz-invariáns alakja és ψ^α Lorentz-transzformációs jellege egyértelműen meghatározza. Így pl. az elektromágneses térben T_{ik} képzésekor csak azt kellett tudnunk, hogy az A_k vektor (a képletekben csak I és nem $\mathfrak{J}$ szerepel). Nem volt szükség annak specializálására, hogy az A vektorpotenciál Riemann-térben kovariáns vagy kontravariáns vektorként transzformálódik-e. A Riemann-térben végzett, közvetlenül (3)-on alapuló számítás is meggyőz arról, hogy sem a téregyenletek, sem az energia-impulzus-tenzor nem teszi szükségessé zárt rendszernél a vektorpotenciál ko- vagy kontravariáns jellegének specializálását, a Lagrange-függvény Riemann-térbeli alakjának ismeretét.

d) *Vektortér Schwinger-féle Lagrange-függvénye*

Schwinger az A_k vektorpotenciállal leírt elektromágneses teret a következő Lagrange-függvénnyel írja le [9]:

$$L = -\frac{1}{8\pi}\partial_r A_s \cdot \partial_r A_s .$$

Ez a $\partial_r A_r = 0$ Lorentz-feltétel figyelembevételével ugyanazon téregyenletekre vezet, mint a c) pontban használt Lagrange-függvény. Schwinger szerint ennek az előnye abban áll, hogy a belőle adódó kanonikus energia-impulzus-tenzor szimmetrikus:

$$\theta_{ik} = L\delta_{ik} - \partial_i A_r \frac{\partial L}{\partial\, \partial_k A_r} = \frac{1}{4\pi}\partial_i A_r \partial_k A_r - \frac{1}{8\pi}\delta_{ik}\partial_r A_s \partial_r A_s .$$

Ezért Schwinger nem is tart szükségesnek további kiegészítő szimmetrizálást és θ_{ik}-t használja dinamikai energia-impulzus-tenzorként. A fent mondottak meggyőznek ennek az eljárásnak nem kielégítő voltáról, θ_{ik} nem azonos a Hilbert-féle módszerrel értelmezett T_{ik}-val. θ_{ik} ki nem elégítő volta abból is látszik, hogy a belőle képezett impulzusmomentum csak pályamomentumot tartalmaz:

$$N_1' = \frac{1}{ic}\int (x_2\theta_{34} - x_3\theta_{24})\, dV = -\int \pi_r (x_2\partial_3 - x_3\partial_2) A_r\, dV.$$

Képezzük a megadott eljárás szerint θ_{ik} kiegészítő tagját.

$$S_{ikr} = \frac{1}{4\pi}\partial_r A_u (\delta_{ui}\delta_{vk} - \delta_{uk}\delta_{vi}) A_v \neq 0,$$

tehát

$$T_{ik} = \theta_{ik} - \frac{1}{8\pi}\left[\partial_i(A_r\partial_r A_k) + \partial_k(A_r\partial_r A_i)\right] + \frac{1}{4\pi}[\partial_i A_r \partial_r A_k + \partial_k A_r \partial_r A_i].$$

A kiegészítő rész figyelembevételével megkapjuk a spint is:

$$N_1 = \frac{1}{ic}\int (x_2 T_{34} - x_3 T_{24})\, dV = N_1' + \int (\pi_2 A_3 - \pi_3 A_2)\, dV = N_1' + \int (\pi I_x A)\, dV.$$

A második tag a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjának választásától független spin, melynek sajátértékei a kvantumelméletben $\hbar$ egész többszörösei.

e) *Szimmetrikus másodrendű tenzor-tér.*

Ha ψ_{ij} egy másodrendű szimmetrikus tenzor, transzformációs képlete

$$\psi^{k'l'} = (\delta_{ik} + \varepsilon_{ik})(\delta_{jl} + \varepsilon_{jl})\psi^{ij} = \psi^{kl} + \varepsilon_{ki}\psi^{il} + \varepsilon_{lj}\psi^{kj} \equiv \psi^{kl} + \delta\psi^{kl}.$$

Ezt (27)-tel összevetve leolvasható az infinitezimális Lorentz-transzformáció operátorának alakja:

$$I_{rs}^{kl,\,ij} = 2(\delta_{kr}\delta_{is}\delta_{lj} + \delta_{lr}\delta_{js}\delta_{ki}) \text{ antiszimmetrikus része} =$$
$$= (\delta_{kr}\delta_{is} - \delta_{ks}\delta_{ir})\delta_{lj} + (\delta_{lr}\delta_{js} - \delta_{ls}\delta_{jr})\delta_{ki}.$$

6. §. Nyílt rendszerek

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a tárgyalt fizikai rendszer zárt. Ez abban jut kifejezésre, hogy a Lagrange-függvény (g_{ik}-kon kívül) kizárólag a ψ^α térmennyiségekből épült fel, melyek a (11) téregyenleteket kielégítették. A fizikában gyakran felmerül azonban annak szükségessége, hogy egy zárt rendszer bizonyos részének energiáját és impulzusát külön tegyük vizsgálat tárgyává. Ez teszi ui. lehetővé a különböző objektumok közt végbemenő energia- és impulzus-kicserélődés tanulmányozását. Ilyen nyílt rendszerre példát szolgáltat az elektromágneses tér töltések jelenlétében, vagy szigetelő közeg belsejében.

Nyílt rendszereknél a Lagrange-függvény a térmennyiségeken kívül más mennyiségeket is tartalmaz, olyanokat, melyek a vele kölcsönhatásban álló rendszer sajátságait írják le. (A fenti példánál ilyen a töltéssűrűség, dielektromos állandó stb.) Jelöljük az utóbbi tipusú mennyiségeket $u^\beta(x)$-szel. Tehát most

$$L = L(g_{ik}, \psi^\alpha, \psi^\alpha_{,k}, u^\beta).$$

Ilyen esetben a 2. §-ban követett módszer érvényét veszíti. Az energia-impulzus-tenzor meghatározása csak úgy lehetséges, ha visszatérünk eredeti Hilbert-féle értelmezéséhez.

Ismételjük meg a 3. § gondolatmenetét ilyen Lagrange-függvény esetén. Az ott szereplő infinitezimális koordinátatranszformáció során $u^\beta(x)$ megváltozását is figyelembe kell venni, ezért (32) egy a $\delta^* u^\beta$-t tartalmazó taggal bővül:

$$\int\left[\left(\partial_k \mathfrak{T}^k_r - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik} g_{ik,r}\right)\xi^r + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\delta^* u^\beta\right]dx + \int \partial_k\left(\mathfrak{B}^k_{.i} + \mathfrak{B}^{kr}_{..i}\xi^i_{,r}\right)dx = 0. \tag{48}$$

Helyettesítsük be $\delta^* u^\beta$-t. Legyen a forrásmennyiség megváltozása az általános koordinátatranszformációnál, (27) mintájára, a következő alakú:

$$\delta u^\beta = \mathfrak{K}^{\beta s}_{\alpha r}\, u^\alpha \xi^r_{,s}. \tag{49}$$

Így (28) szerint

$$\delta^* u^\beta = \mathfrak{K}^{\beta s}_{\alpha r}\, u^\alpha \xi^r_{,s} - u^\beta_{,r}\xi^r. \tag{50}$$

Ezt (48)-ba téve, majd a fellépő

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta s}_{\alpha r}\, u^\alpha \xi^r_{,s}$$

tagot parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned}&\int\left[\partial_k \mathfrak{T}^k_r - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik} g_{ik,r} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}u^\beta_{,r} - \partial^k\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha r}u^\alpha\right)\right]\xi^r dx + \\ &+\int \partial_k\left\{\mathfrak{B}^k_{.i}\xi^i + \mathfrak{B}^{kr}_{..i}\xi^i_{,r} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha i}u^\alpha \xi^i\right\}dx = 0.\end{aligned} \tag{51}$$

A 3. §. okoskodását megismételve belátjuk most is az első integrál zérus voltát. Ebből ezúttal

$$\nabla_k T^k_r \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\partial_k \mathfrak{T}^k_r - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik} g_{ik,r}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}u^\beta_{,r} + \partial_k\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha r}u^\alpha\right)\right] \neq 0. \tag{52}$$

következik. Továbbmenve, (51) megmaradt második tagjában a differenciálást elvégezzük

$$\int_\Omega \left\{\left[\partial^k\left(\mathfrak{B}^k_{.i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_\beta}\mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha i}u^\alpha\right)\right]\xi^i + \left[\mathfrak{B}^r_{.i} + \partial_k \mathfrak{B}^{kr}_{..i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta r}_{\alpha i}u^\alpha\right]\xi^i_{,r} + \mathfrak{B}^{rs}_{..i}\xi^i_{,rs}\right\}dx = 0.$$

Az Ω tartomány és ξ^i, $\xi^i_{,r}$, $\xi^i_{,rs}$ egy pontban felvett értékének tetszőleges volta miatt a szögletes zárójelekben álló kifejezések külön-külön zérust adnak. A (31) definíciót felhasználva

$$\mathfrak{T}^k_i = \theta^k_i + \partial_r \mathfrak{B}^{rk}_{..i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha i}u^\alpha. \tag{53}$$

$\mathfrak{B}^{rk}_{..i}$ most is antiszimmetrikus az r, k indexekben.

A Hilbert-féle értelmezésen alapuló számítás végeredményét írjuk át euklideszi metrikára. (53) alapján

$$T_{ik} = \theta_{ik} + \partial_r B_{rki} + \frac{\partial L}{\partial u^\beta}\mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha i}u^\alpha. \tag{54}$$

A dinamikai tenzor kifejezésében az ismerteken kívül fellépett egy új tag, mely a rendszer környezettel való kölcsönhatásának következménye. Ennek kiszámításához már nem elég u^β Lorentz-transzformációs jellegének ismerete. Fel kell használnunk a $\mathfrak{K}$ általános transzformációs együtthatót. u^β különleges viselkedése annak következménye, hogy nem elégít ki (11)-hez hasonló Euler-egyenletet, ezért képleteinkből nem esett ki. (Az mindenesetre előnyt jelent, hogy a Lagrange-függvény általános-kovariáns alakjának felírására most sincs szükség). Az (54)-ben szereplő új tag módosítja az impulzusmomentum és a többi dinamikai mennyiség 5. §-ban megismert egyszerű alakját.

Az energia-impulzus-tenzor most nem divergenciamentes. (52) alapján

$$\partial_k T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial u^\beta} \partial_i u^\beta + \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial u^\beta} \mathfrak{K}^{\beta k}_{\alpha i} u^\alpha \right), \tag{55}$$

tehát a tér környezetével energia- és impulzuscserét hajt végre.

A kapott eredmények alkalmazását ismét néhány példán mutatjuk be.

a) *Elektromágneses sugárzás szigetelő közegben.* Az elektromágneses tér leírására a következő két térerősség-tenzor szolgál:

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i\,; \qquad G_{ik} = F_{ik} - \frac{\varepsilon - 1}{c^2} (F_{ir} v_k v_r - F_{kr} v_i v_r) \cdot (v_s v_s)^{-1}.$$

Itt $v_i = \dfrac{dx_i}{dp}$ a közeg mozgássebessége, tetszőleges p paraméterre vonatkoztatva, $\varepsilon(x)$ a dielektromos együttható. (A mágneses polározhatóságtól egyszerűség kedvéért eltekintettünk. $c^{-1} v_i (-v_s v_s)^{-1/2}$ adja a -1-re normált szokásos négyessebességet.) A tér Lagrange-függvénye:

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} G_{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{ik} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi c^2} \frac{F_{ik} F_{il} v_k v_l}{v_s v_s}. \tag{56}$$

A vektorpotenciállal képezett Euler-egyenletek a Maxwell-egyenletet szolgáltatják:

$$\partial_k G_{ik} = 0. \tag{57}$$

u^β helyét most a közeg v_i sebessége és ε dielektromos állandója foglalja el. v_i vektor, ε skalár, tehát

$$\varepsilon' = \varepsilon, \quad v'^i = v^i + \xi^i_{,r} v^r = v^i + \mathfrak{K}^{ir}_{ks} \xi^s_{,r} v^k, \quad \mathfrak{K}^{ir}_{ks} = \delta_{rk} \delta_{si}. \tag{58}$$

Ezeket felhasználva

$$\theta_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[\partial_i A_r G_{kr} - \frac{1}{4} \delta_{ik} F_{rs} G_{rs} \right], \qquad B_{rki} = -\frac{1}{4\pi} A_i G_{kr},$$

$$T_{ik} = [\theta_{ik} + \partial_r B_{rki}] + \frac{\partial L}{\partial v_i} v_k = \frac{1}{4\pi} \left[F_{ir} G_{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} G_{rs} \right] + \tag{59}$$

$$+ \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c^2} \left[\frac{F_{rs} F_{rt} v_s v_t v_i v_k}{(-v_s v_s)^2} - \frac{F_{ir} F_{rs} v_k v_s}{(-v_s v_s)} \right].$$

T_{ik} megegyezik a ABRAHAM által ad hoc bevezetett energia-impulzus-tenzorral. (Látjuk, hogy ha gépiesen a Belinfante-féle (19) képletet alkalmaznánk és megfeledkeznénk az (54)-ben szereplő utolsó tagról, csak (59) első tagját kapnánk meg, amely nem is szimmetrikus.) T_{ik} alakjának kiszámítása nélkül is könnyen képezhető a tér által a polározott közegre kifejtett erő sűrűsége (55) szerint:

$$f_i = -\partial_k T'_{ik} = -\frac{\partial L}{\partial \varepsilon}\partial_i \varepsilon - \frac{\partial L}{\partial v_r}\partial_i v_r - \partial_r\left[\frac{\partial L}{\partial v_i} v_r\right] =$$

$$= -\frac{1}{8\pi c^2}\frac{F_{rm}F_{rn}v_m v_n}{(-v_s v_s)}\partial_i \varepsilon - \partial_r \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c^2}\left[\frac{F_{rm}F_{rn}v_m v_n v_i v_k}{(-v_s v_s)^2} - \frac{F_{ir}F_{rt}v_k v_t}{(-v_s v_s)}\right].$$

Az egyes tagok szemléletes jelentését illetően a [11] munkára utalunk.

b) *Pszeudoskaláris mezontér forrásokkal.* A mezonteret ψ pszeudoskaláris potenciállal írjuk le, mely transzformációkor a Lorentz-transzformáció determinánsával (± 1) szorzódik, tehát vagy változatlan marad, vagy (térbeli tükrözés esetén) jelet vált. A Lagrange-függvény

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\partial_r \psi \partial_r \psi + \varkappa^2 \psi^2) + \varrho \psi. \tag{60}$$

L invarianciája miatt természetesen a ϱ forrássűrűség is pszeudoskalár. ψ variálása (11) szerint a téregyenleteket szolgáltatja:

$$\Box \psi - \varkappa^2 \psi = -4\pi\varrho. \tag{61}$$

A kanonikus energia-impulzus-tenzor (13) szerint

$$\Theta_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_i \psi \partial_k \psi - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\partial_r \psi \partial_r \psi + \varkappa^2 \psi^2)\right] + \delta_{ik}\varrho\psi. \tag{62}$$

Ez szimmetrikus. Kérdés: megegyezik-e a dinamikai T_{ik} tenzorral? Infinitezimális (14) alakú Lorentz-transzformáció során (melynek determinánsa $+1$), ψ változatlan marad, tehát $I_{ik} = 0$, a Belinfante-féle szimmetrizáló tag zérus. Így (62) $\varrho = 0$ esetén valóban T_{ik}-t adja. $\varrho \neq 0$ esetén ez felveszi az u^β szerepét, ezért meg kell határoznunk ennek általános infinitezimális transzformáció-együtthatóját, $\mathfrak{K}$-t. Riemann-térben az euklideszi tér pszeudoskalárjainak a skalársűrűségek felelnek meg, melyek transzformációs képlete

$$\varrho' = \mathrm{Det}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\right)\cdot \varrho = \mathrm{Det}(\delta^a_b - \xi^a_{,b})\cdot \varrho = (1 - \xi^r_{,r})\varrho = \varrho + \mathfrak{K}^s_r \xi^r_{,s}\cdot\varrho. \tag{63}$$

Ha ugyanis egy infinitezimális Lorentz-transzformációt hajtunk végre, úgy

$$x^a = (\delta^a_{b'} - \varepsilon_{ab'})x^{b'},$$

tehát

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\right) = \mathrm{Det}\,(\delta^a_{b'} - \varepsilon^a_{b'}) \approx 1.$$

Egy térbeli tükrözésnél (inverziónál) viszont

$$x^a = -x^{a'} \ (a = 1, 2, 3); \qquad x^4 = x^{4'},$$

tehát

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Így valóban Lorentz-transzformációnál $\varrho' = \varrho$, de inverziónál $\varrho' = -\varrho$ lesz. (63)-ból leolvasható, hogy skalársűrűség (pszeudoskalár) esetén

$$\mathcal{K}_r^s = -\delta_r^s.$$

Így a dinamikai energia-impulzus-tenzor

$$T_{ik} = \theta_{ik} - \frac{\partial L}{\partial \varrho}\delta_{ik}\varrho = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_i\psi\partial_k\psi - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\partial_r\psi\partial_r\psi + \varkappa^2\psi^2)\right].$$

Újabb példán látjuk, hogy a kanonikus energia-impulzus-tenzor még abban az esetben sem egyezik meg feltétlenül a dinamikai tenzorral, ha szimmetrikus. A tér T_{ik} dinamikai tenzora (θ_{ik}-val ellentétben) kizárólag a ψ térpotenciálból és a $-\partial_i\psi$ térerősségből épül fel, a forrássűrűséget explicit módon nem tartalmazza. A tér által kifejtett erő sűrűsége közvetlenül (55)-ből:

$$f_i = -\partial_k T_{ik} = -\frac{\partial L}{\partial\varrho}\partial_i\varrho - \partial_r\left(\frac{\partial L}{\partial\varrho}\delta_{ir}\varrho\right) = \varrho\,\partial_i\psi.$$

c) *Elektromágneses tér forrásokkal.* A Lagrange-függvény:

(64) $$L = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{ik} + s_i A_i = -\frac{1}{16\pi}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)^2 + s_i A_i.$$

Az A_i-val felírt (11) Euler-egyenlet a Maxwell-egyenletet szolgáltatja:

(65) $$\partial_k F_{ik} = 4\pi s_i.$$

A kanonikus energia-impulzus-tenzor:

(66) $$\theta_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_i A_r \cdot F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}F_{rs}\right] + \delta_{ik}s_r A_r.$$

A Belinfante-féle szimmetrizáló tag $B_{rki} = F_{rk}A_i$, tehát (65)-öt is figyelembe véve

(67) $$\theta_{ik} + \partial_r B_{rki} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ik}F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}F_{rs}\right] + \delta_{ik}s_r A_r - A_i s_k.$$

Ez még nem is szimmetrikus és a vektorpotenciált explicit módon tartalmazza, így nem is mértékinvariáns. Számítsuk ki az $u^\beta \equiv s_r$ forrásfüggvény folytán fellépő kiegészítő tagot. Kérdés, s_r milyen jelleget mutat általános koordinátatranszformáció során. s^r (g_{ik}-tól független alakra hozva), mely az u^r négyessebességgel arányos, lehet kontravariáns vektor ($\omega = 0$), vektorsűrűség ($\omega = +1$), vektorvolumen ($\omega = -1$), melyek transzformációs képlete definíció-szerűen:

$$s^{r'} = \left[\mathrm{Det}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\right)\right]^{\omega} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^t} s^t = (1 - \xi^a_{,a})^{\omega} (\delta^r_t + \xi^r_{t,}) s^t = s^r + (\delta^i_t \delta^r_k - \omega \delta^i_k \delta^r_t) s^t \xi^k_i.$$

Így s^r-nek általános transzformációs együtthatója

$$\mathcal{K}^{ri}_{tk} = \delta^i_t \delta^r_k - \omega \delta^i_k \delta^r_t.$$

Ezt felhasználva a következő dinamikai energia-impulzus-tenzor adódik:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}F_{rs}\right] + \delta_{ik}(1-\omega)s_r A_r.$$

Az erősűrűség pedig (55) szerint:

$$f_i = -\partial_k T_{ik} = (\omega \partial_i A_r - \partial_r A_i) s_k - (1-\omega) A_r \partial_i s_r.$$

T_{ik} és f_i csak az $\omega = +1$ választás esetén lesz mértékinvariáns. Ekkor f_i a Lorentz-erő ismert alakját ölti fel:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}(F_{ir}F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}F_{rs}), \qquad f_i = F_{ik} s_k.$$

Azt a következtetést, hogy az s^i áramsűrűség vektorsűrűség ($\omega = +1$) formájában (tehát $\sqrt{g}$-vel szorozva) lesz variáció szempontjából g_{ik}-tól független, a ponttöltések variációs elve közvetlenül is megmutatja. Hasonlót kell feltételeznünk minden áramsűrűségre. Ez onnan is nyilvánvaló, hogy minden áram ponttöltések (elektronok) mozgásának eredőjeként jön létre [12].

Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézete, Budapest.

IRODALOM

[1] Novobátzky Károly, A relativitás elmélete. *Tankönyvkiadó, Budapest,* 1952.
[2] D. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1915. 395.
[3] Marx György, *Acta Phys. Hung.* **1.** 209. 1952.
[4] E. Noether, *Gött. Nachr.* 1918. 235.
[5] E. L. Hill, *Rev. Mod. Phys.* **23.** 253. 1951.
[6] Román Pál, *Acta Phys. Hung.* **5.** 143. 1955.
[7] F. Belinfante, *Physica* **6.** 884. 1939. és **4.** 449 1940.
[8] L. Rosenfeld, *Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique* **8.** No. 6. 1940.
[9] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74.** 1439. 1948.
[10] Marx György, *Magy. Fiz. Foly.* **3.** 291. 1955.
[11] Györgyi Géza, *Magy. Fiz. Foly.* **2.** 255. 1954.
[12] Marx György, *Magy. Fiz. Foly.* megj. alatt.

SZTOCHASZTIKUS HALMAZFÜGGVÉNYEKRŐL. I.

PRÉKOPA ANDRÁS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1956. február 21-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

A sztochasztikus folyamatok elmélete, amint KOLMOGOROV 1931-ben megalapozta, eredetileg az időben véletlenszerűen lejátszódó folyamatok matematikai tárgyalásával foglalkozott. Később azonban felvetődtek olyan gyakorlati problémák, amelyek nem időbeli folyamatokkal kapcsolatosak, de a sztochasztikus folyamatok elméletében használatos módszerekkel oldhatók meg. Ilyen problémák fordulnak elő pl. a csillagok, a kolloidrészecskék térbeli eloszlásának vizsgálatánál, vérsejtszámlálásnál, adott területre, adott idő alatt lehulló csapadékmennyiség vizsgálatánál, stb.

Van egy lényeges különbség az időbeli folyamatokkal kapcsolatos és az említett problémák között: a matematikai modell a két esetben lényegesen eltér egymástól. Az időbeli folyamatoknál gyakran csak a t időpontbeli helyzet érdekel bennünket, és ezt egy ξ_t valószínűségi változóval regisztráljuk. A síkbeli ponteloszlásnál azonban nem a sík pontjaihoz, hanem halmazaihoz tartozó valószínűségi változók írják le a pontrendszer állapotát. Ha A a sík egy halmaza, akkor ehhez tartozik egy $\xi(A)$ valószínűségi változó, amely megadja a véletlenszerűen elhelyezkedő pontok közül az A halmazba esőknek a számát. $\xi(A)$ egy véletlen értékű, más szóval sztochasztikus halmazfüggvény.

Jelen dolgozat tárgya az ilyen véletlen értékű halmazfüggvények vizsgálata. Bevezetem a sztochasztikus additív és teljesen additív halmazfüggvények fogalmát és ezekkel kapcsolatban megvizsgálok olyan problémákat, amelyek közül némelyek általánosításai a közönséges, valós értékű halmazfüggvények elméletében felvetődő problémáknak, illetve azokhoz hasonlók, némelyek pedig valószínűségszámítási természetűek.

1. DEFINÍCIÓ. *Legyen $\mathfrak{R}$ valamely H tér bizonyos részhalmazaiból álló gyűrű. Ha $\mathfrak{R}$ minden A eleméhez tartozik egy $\xi(A)=\xi(\omega, A)$ valószínűségi változó, oly módon, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_r$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű diszjunkt halmazai, akkor a $\xi(A_1), \xi(A_2), \ldots, \xi(A_r)$ valószínűségi változók függetlenek és*

$$\xi(A)=\sum_{k=1}^{r} \xi(A_k), \tag{1}$$

ez esetben $\xi(A)$-t sztochasztikus additív halmazfüggvénynek nevezem.

2. DEFINÍCIÓ. *Az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ sztochasztikus additív halmazfüggvényt sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvénynek nevezem, ha $\mathfrak{R}$ bármely olyan $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára, amelyre*

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R},$$

teljesül, hogy

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k).$$

Rövidség kedvéért a sztochasztikus szót elhagyom és ott, ahol közönséges, valós értékű additív, illetve teljesen additív halmazfüggvény szerepel, ezt külön megjegyzem.

A sztochasztikus folyamatoknak véletlen értékű halmazfüggvényként való felfogásmódja S. BOCHNER [2] munkájában szerepel először. Bizonyos speciális esetekre vonatkozó véletlen értékű halmazfüggvényekkel foglalkoztak H. CRAMÉR [3], E. MARCZEWSKI [9], C. RYLL—NARDZEWSKI [12], továbbá A. BLANC—LAPIERRE és R. FORTET [1].

A gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos, hogy ha pl. H valamilyen véges dimenziós euklideszi tér, akkor gömbökhöz, tartományokhoz és esetleg bonyolultabb halmazokhoz is hozzá tudjunk rendelni valószínűségi változókat. Mint a III. fejezet 1. §-ában megmutatom, a Kolmogorov-féle konstrukcióval ([8], 4. §) konstruálhatunk olyan sztochasztikus additív halmazfüggvényeket, amelyek téglákon vagy téglák véges összegein vannak értelmezve, ezzel a módszerrel azonban általánosan nem oldható meg a probléma. Ahhoz, hogy ennél továbbjussunk, foglalkoznunk kell a sztochasztikus halmazfüggvények kiterjesztésének a problémájával.

Jelen dolgozat legfőbb célja a gyűrűn értelmezett sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények kiterjesztésének az elvégzése különböző feltételek mellett és σ-gyűrűn értelmezett sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények egyes tulajdonságainak a vizsgálata.

Bizonyos, euklideszi terekben értelmezett, sztochasztikus halmazfüggvények kiterjesztésével H. CRAMÉR [3], E. MARCZEWSKI [9] és C. RYLL—NARDZEWSKI [12] foglalkoztak. Ennek a dolgozatnak a tételei speciális esetként tartalmazzák a [3] és [12] dolgozatok idevágó tételeit. H. CRAMÉR egy közönséges, egyparaméteres ξ_t sztochasztikus folyamat $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ differenciái által konstruálható sztochasztikus halmazfüggvény kiterjesztésével foglalkozott.

A sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények kiterjesztésének a problémája általánosítása a független valószínűségi változókból álló végtelen sorok konvergenciaproblémájának. Ha ugyanis $\xi_1, \xi_2, \ldots$ egy független valószínűségi változókból álló sorozat és $\mathfrak{R}$ a természetes számok véges halmazainak a gyűrűje, akkor a

$$\xi(A)=\sum_{i\in A}\xi_i,\quad A\in\mathfrak{R}$$

halmazfüggvény abban és csak abban az esetben terjeszthető ki az $S(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre, ha a $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál ([4], 118. o., Corollary 1.).

A véletlen értékű halmazfüggvények elmélete felépítésének van egy másik útja is. A sztochasztikus folyamatok elméletét fel lehet építeni úgy, hogy tekintjük a valós függvények terét és ebben a térben értelmezünk mértéket. Ugyanezt megtehetjük az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvények terében is, mint azt E. HOPF [7] bebizonyította. Az így értelmezett mérték általában csak végesen additív. Sok szempontból szükséges azonban, hogy a valószínűség teljesen additív legyen, a kiterjesztés problémája tehát más vonatkozásban itt is felmerül.

A sztochasztikus additív halmazfüggvény fogalma bizonyos értelemben általánosítása a független növekményű folyamat fogalmának. Ugyanis gyakran csak a $\xi_{t_2}-\xi_{t_1}$ differenciák érdekelnek bennünket, ezek pedig, illetve ezek összegei, felfoghatók sztochasztikus additív halmazfüggvényként.

Köszönetet mondok RÉNYI ALFRÉD, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA és CSÁSZÁR ÁKOS professzoroknak értékes megjegyzéseikért.

Fogalmak és jelölések

Legyen H egy tetszőleges halmaz és $\mathfrak{R}$ egy H bizonyos részhalmazaiból álló halmazosztály. Az $\mathfrak{R}$ halmazosztályt gyűrűnek nevezzük, ha $A+B\in\mathfrak{R}$, $A-B\in\mathfrak{R}$, feltéve, hogy $A\in\mathfrak{R}$, $B\in\mathfrak{R}$. Ha $H\in\mathfrak{R}$, akkor $\mathfrak{R}$-et algebrának nevezzük. Ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű (algebra) egy tetszőleges halmazsorozata és $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{R}$, akkor $\mathfrak{R}$-et σ-gyűrűnek (σ-algebrának) nevezzük. Ha $\mathfrak{R}$ gyűrű (σ-gyűrű) és $A\in\mathfrak{R}$, akkor $A\mathfrak{R}$ azt az algebrát (σ-algebrát) jelenti, amelynek elemei az A halmaznak az $\mathfrak{R}$ gyűrűhöz tartozó részhalmazai. $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb σ-gyűrűt jelenti. Ha $A\subseteq H$, akkor $\bar{A}=H-A$.

Valamely $\mathfrak{R}$ gyűrű elemein értelmezett valós értékű, nem negatív $m(A)$ halmazfüggvényt mértéknek nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ bármely olyan $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára, amelyre $A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{R}$, fennáll, hogy

$$m(A)=\sum_{k=1}^{\infty}m(A_k). \tag{1}$$

Ha $m(A)$ negatív értékeket is felvehet, de az (1) reláció továbbra is fennáll, akkor $m(A)$-t teljesen additív halmazfüggvénynek nevezzük.

Az n-dimenziós euklideszi teret R_n jelöli. Ha A az R_n tér egy Lebesgue szerint mérhető halmaza, akkor $|A|$ jelenti az A halmaz n-dimenziós Lebesgue-mértékét.

A dolgozatban szereplő valószínűségi változók egy rögzített eseménytérben vannak értelmezve, amelyet Ω-val jelölünk. Az Ω tér elemeit ω jelöli. Feltesszük, hogy adva van egy az Ω tér bizonyos részhalmazaiból alkotott $\mathfrak{T}\,\sigma$-algebra és $\mathfrak{T}$ elemein értelmezve van egy $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték, amelyre $\mathbf{P}(\Omega)=1$. Az Ω térben értelmezett, majdnem mindenütt véges értékű, mérhető függvényeket valószínűségi változóknak nevezzük. Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor a $\xi=\eta$ reláció azt jelenti, hogy

$$\mathbf{P}(\xi=\eta)=1.$$

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ egy valószínűségi változó-sorozat, akkor a $\xi_k \to \xi$ (vagy $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi$) reláció azt jelenti, hogy

$$\mathbf{P}(\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi) = 1.$$

A $\xi_k \Rightarrow \xi$ (vagy $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{st}\, \xi_k = \xi$) reláció azt jelenti, hogy minden pozitív ε-ra

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(|\xi_k-\xi|>\varepsilon)=0. \tag{2}$$

Ha ξ_k, illetve ξ karakterisztikus függvénye $f_k(t)$, illetve $f(t)$ és $f_k(t)\to f(t)$ t minden értékére (amely ekvivalens azzal, hogy a konvergencia minden véges t-intervallumban egyenletes), akkor ezt az

$$f_k(t) \Rightarrow f(t) \tag{3}$$

relációval fejezzük ki. (2)-ből következik (3), és ha $\xi=0$, akkor (3)-ból következik (2).

Ha ξ egy valószínűségi változó és a $Q(\lambda)$ valós számra teljesül, hogy

$$\mathbf{P}(\xi \leqq Q(\lambda)) \geqq \lambda, \quad \mathbf{P}(\xi \geqq Q(\lambda)) \geqq 1-\lambda,$$

ahol $0<\lambda<1$, akkor a $Q(\lambda)$ számot a ξ valószínűségi változó λ-kvantilisének nevezzük.

I. FEJEZET

SEGÉDTÉTELEK

1. §. Korlátos variációjú és szubadditív halmazfüggvények

DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{A}(A, B, \ldots)$ egy halmazosztály. Egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett $\alpha(A)$ valós értékű halmazfüggvényt akkor nevezünk korlátos variációjúnak, ha van olyan K szám, hogy minden páronként idegen, $\mathfrak{A}$-hoz tartozó halmazokból álló $A_1, A_2, \ldots, A_r$ halmazösszességre teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{r} |\alpha(A_k)| \leqq K.$$

Azt a legkisebb K számot, amelyre az előző egyenlőtlenség teljesül, α variációjának nevezzük. Ha $A_k \subseteq A$, $k = 1, 2, \ldots, r$, akkor a

$$\sup_{\{A_k\}} \sum_{k=1}^{r} |\alpha(A_k)|$$

számot az α halmazfüggvény A-ban vett variációjának nevezzük. Jelöljük ezt a mennyiséget $\mathrm{Var}_\alpha(A)$-val.

DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{A}(A, B, \ldots)$ egy halmazosztály, $\alpha(A)$ pedig egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett valós értékű halmazfüggvény. Az α halmazfüggvényt szubadditívnak (szuperadditívnak) nevezzük, ha bármely páronként idegen, $\mathfrak{A}$-hoz tartozó halmazokból álló $A_1, A_2, \ldots, A_r$ összességre, melyre $A = \sum_{k=1}^{r} A_k \in \mathfrak{A}$, teljesül, hogy

$$\alpha(A) \leqq \sum_{k=1}^{r} \alpha(A_k), \quad \left(\alpha(A) \geqq \sum_{k=1}^{r} \alpha(A_k)\right).$$

Ha az egyenlőség áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy α additív halmazfüggvény. Ha r végtelen is lehet, akkor α-t teljesen szubadditívnak (teljesen szuperadditívnak), illetve, ha egyenlőség áll fenn, akkor teljesen additívnak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges, korlátos variációjú α halmazfüggvény esetében a $\mathrm{Var}_\alpha(A)$ halmazfüggvény teljesen szuperadditív. Gyakran fel fogjuk használni a következő egyszerű tételeket, amelyek bizonyításai megtalálhatók a [11] dolgozatban.

1. 1. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{R}$ egy gyűrű, $\alpha(A)$ pedig egy $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett olyan nem-negatív értékű halmazfüggvény, melyre teljesülnek a következő feltételek:*

a) $\alpha(A) \leqq K, A \in \mathfrak{R}$;

b) $\alpha(A)$ *szubadditív;*

c) *ha* $A_1, A_2, \ldots$ *az* $\mathfrak{R}$ *gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, akkor*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) < \infty.$$

E feltételekből következik, hogy az $\alpha(A)$ *halmazfüggvény korlátos variációjú.*

1. 2. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{R}$ *egy gyűrű,* α *pedig egy* $\mathfrak{R}$ *elemein értelmezett korlátos variációjú és teljesen szubadditív halmazfüggvény. Ekkor* $\mathrm{Var}_\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ *korlátos mérték az* $\mathfrak{R}$ *gyűrűn.*

2. §. Egyenlőtlenségek

Ebben a paragrafusban egy-két gyakran előforduló egyenlőtlenséget vezetünk le. Itt felhasználjuk a következő elemi egyenlőtlenségeket:

$$1-\frac{\sin x}{x} \geqq \frac{x^2}{8}, \quad \text{ha} \quad |x| \leqq 1,$$

$$1-\frac{\sin x}{x} \geqq 1-\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \text{ha} \quad 0<\varepsilon \leqq 1 \quad \text{és} \quad |x| \geqq \varepsilon,$$

$$1-\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{10}, \quad \text{ha} \quad |x| \geqq 1.$$

Legyen ξ valószínűségi változó, $F(x)$ legyen az eloszlásfüggvénye, $f(t)$ pedig a karakterisztikus függvénye. Az előző egyenlőtlenségek felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $0<\varepsilon \leqq 1$, akkor

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |1-f(t)|\,dt \geqq \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1}(1-f(t))\,dt\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{itx})\,dF(x)\,dt\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)dF(x) \geqq \frac{1}{8}\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x) + \left(1-\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)\mathbf{P}(|\xi|>\varepsilon).$$

Innen következik, hogy

$$(1.1)\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|1-f(t)|\,dt \geqq \min\left(\frac{1}{8}, 1-\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x) + \mathbf{P}(|\xi|>\varepsilon)\right].$$

Legyen δ tetszőleges pozitív szám, akkor az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|1-f(t)|\,dt &\geqq \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF(x)\geqq\\ &\geqq \int_{|x|>\frac{1}{\delta}}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF(x)\geqq\frac{1}{10}\mathbf{P}\left(|\xi|>\frac{1}{\delta}\right).\end{aligned}$$

Gyakran fel fogjuk használni a következő, jól ismert egyenlőtlenséget: ha $f(t)$ karakterisztikus függvény, akkor

$$(1.3)\qquad 1-Rf(2t)\leqq 4(1-Rf(t))^{*}$$

(l. pl. [5] 60. o.).

A következő tétel általánositása [5] 113. oldalán található lemmának.

1. 3. TÉTEL. *Legyen ξ valószínűségi változó és $Q(\lambda)$ jelentse ennek egy λ-kvantilisét. Legyen továbbá z tetszőleges valós szám és $s(x)$ egy olyan nemnegatív függvény, hogy ha $x\geqq z$, akkor $s(x)$ monoton nem-csökkenő, ha pedig $x\leqq z$, akkor monoton nem-növekvő. Tegyük fel továbbá, hogy létezik $\mathbf{M}[s(\xi-\eta)]$, ahol η ξ-vel azonos eloszlású és tőle független valószínűségi változó. E feltételek mellett létezik $\mathbf{M}[s(\xi-Q(\lambda))]$ is és érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$(1.4)\qquad \mathbf{M}[s(\xi-\eta)]\geqq\min(\lambda,1-\lambda)\mathbf{M}[s(\xi-Q(\lambda))].$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\xi_1=\xi-Q(\lambda)$, $\eta_1=\eta-Q(\lambda)$. Ekkor a 0 érték λ-kvantilise ξ_1-nek. Jelöljük ξ_1 és η_1 közös eloszlásfüggvényét $F_1(x)$-szel. Ilyen módon azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[s(\xi-\eta)]=\mathbf{M}[s(\xi_1-\eta_1)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(x-y)\,dF_1(x)\,dF_1(y)\geqq\\ \geqq\iint_{x\geqq z,\ y\leqq 0}s(x-y)\,dF_1(x)\,dF_1(y)&+\iint_{x<z,\ y\geqq 0}s(x-y)\,dF_1(x)\,dF_1(y)\geqq\\ \geqq\int_{y\leqq 0}dF_1(y)\int_{x\geqq z}s(x)\,dF_1(x)&+\int_{y\geqq 0}dF_1(y)\int_{x<z}s(x)\,dF_1(x)\geqq\\ \geqq\min(\lambda,1-\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}s(x)\,dF_1(x)&=\min(\lambda,1-\lambda)\mathbf{M}[s(\xi-Q(\lambda))].\end{aligned}$$

* Rz a z komplex szám valós részét jelöli.

KOROLLÁRIUM. Ha $s(x)$ a következő függvény:

$$s(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } |x|\leqq \varepsilon, \\ 1, & \text{ha } |x|>\varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon>0,$$

akkor az (1.4) egyenlőtlenség a következőt adja:

$$\mathbf{P}(|\xi-\eta|>\varepsilon)\geqq \min(\lambda, 1-\lambda)\mathbf{P}(|\xi-Q(\lambda)|>\varepsilon). \tag{1.5}$$

Az (1.2) és (1.5) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-|f(t)|^2)dt > \frac{1}{10}\mathbf{P}\left(|\xi-\eta|>\frac{1}{\delta}\right) \geqq \\ \geqq \frac{\min(\lambda, 1-\lambda)}{10}\mathbf{P}\left(|\xi-Q(\lambda)|>\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

3. §. Kvantilis-halmazok korlátossága

Legyen Z egy tetszőleges halmaz, ξ_z, $z\in Z$ pedig valószínűségi változó-összesség. Jelölje $Q(\lambda, z)$ a ξ_z valószínűségi változó egy tetszőleges λ-kvantilisét. Ha minden z-hez választunk egy $Q(\lambda, z)$ mennyiséget, akkor egy $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ halmazt kapunk. Ilyen halmaz egy vagy több képezhető, aszerint, hogy minden z-re, a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek egyértelműen meg vannak határozva, vagy nem.

Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\mu_1=\limsup_{\varepsilon\to\infty}\sup_{z\in Z}\mathbf{P}(\xi_z<-\varepsilon), \quad \mu_2=\limsup_{\varepsilon\to\infty}\sup_{z\in Z}\mathbf{P}(\xi_z>\varepsilon).$$

A ξ_z valószínűségi változók kvantilisei és a μ_1, μ_2 mennyiségek közötti kapcsolatot tárja fel az

1.4. TÉTEL. *Ha a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos, akkor*

$$\mu_1\leqq\lambda\ (\mu_2\leqq 1-\lambda). \tag{1.7}$$

Ha a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ halmaz nem korlátos alulról (felülről), akkor

$$\mu_1\geqq\lambda\ (\mu_2\geqq 1-\lambda). \tag{1.8}$$

BIZONYÍTÁS. Bizonyítsuk be az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségek első felét. A zárójelben levő állítások bizonyítása teljesen hasonlóan történik. Tegyük fel, hogy van olyan $K(\lambda)$ szám, hogy a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek alkalmas választása mellett $Q(\lambda, z)\geqq K(\lambda)$, $z\in Z$ és $\mu_1>\lambda$. Ekkor minden ε-ra teljesül, hogy

$$\sup_{z\in Z}\mathbf{P}(\xi_z<-\varepsilon)>\lambda.$$

Legyen ε_0 olyan szám, amelyre $-\varepsilon_0 \leqq K_1(\lambda)$ és válasszunk egy olyan z_0-t, amelyre

$$\mathbf{P}(\xi_{z_0} < -\varepsilon_0) > \lambda.$$

Ebből az következik, hogy ξ_{z_0} minden λ-kvantilisére teljesül a

$$Q(\lambda, z_0) < -\varepsilon_0 \leqq K(\lambda)$$

egyenlőtlenség, ami ellentmondás, tehát (1. 7) első fele igaz.

Tegyük most fel, hogy a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz nem korlátos alulról. Ekkor minden ε-hoz található olyan z_ε, hogy

$$\mathbf{P}(\xi_{z_\varepsilon} < -\varepsilon) \geqq \lambda,$$

tehát minden ε-ra teljesül, hogy

$$\sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon) \geqq \lambda,$$

és így

$$\mu_1 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon) \geqq \lambda.$$

Ezzel (1. 8) első felét is bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Az (1. 7) és (1. 8) egyenlőtlenségekből következik, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok* $\lambda(0 < \lambda < 1)$ minden rögzített értékére akkor és csak akkor korlátosak alulról (felülről), ha $\mu_1 = 0$ ($\mu_2 = 0$). Definiáljuk a következő mennyiséget:

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{z \in Z} \mathbf{P}(|\xi_z| > \varepsilon).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mu_1 \leqq \mu_3, \quad \mu_2 \leqq \mu_3, \quad \mu_3 \leqq \mu_1 + \mu_2.$$

Ebből következik, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok λ $(0 < \lambda < 1)$ minden rögzített értékére akkor és csak akkor korlátosak, ha $\mu_3 = 0$.

Ugyancsak az (1. 7) és (1. 8) egyenlőtlenségekből adódnak a következő állítások is:

A $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ $(0 < \lambda < 1)$ halmazok λ minden rögzített értékére akkor és csak akkor nem korlátosak alulról (felülről), ha $\mu_1 = 1$ ($\mu_2 = 1$).

A $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ $(0 < \lambda < 1)$ halmazok λ minden rögzített értékére akkor és csak akkor nem korlátosak, ha $\mu_3 = 1$.

* Ha arról van szó, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok minden λ-ra $(0 < \lambda < 1)$ korlátosak (nem korlátosak), akkor nem játszik szerepet az, hogy hogyan választjuk a $Q(\lambda, z)$ kvantiliseket. Ekkor, ha a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek egy speciális választása esetén az említett halmazok korlátosak (nem korlátosak), akkor a kvantilisek minden megválasztása esetén szintén korlátosak (nem korlátosak). A $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazon ebben az esetben valamennyi ξ_z valószínűségi változó valamennyi λ-kvantilisének összességét is érthetjük.

4. §. Eloszlásfüggvény-halmazok kompaktsága

Jelölje $\mathfrak{F}$ az egydimenziós eloszlásfüggvények halmazát. P. LÉVY bevezette az eloszlásfüggvények távolságának a fogalmát. Az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ eloszlásfüggvények távolsága alatt azoknak a h értékeknek az alsó határát értjük, melyekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$F_1(x-h)-h \leqq F_2(x) \leqq F_1(x+h)+h.$$

Jelöljük ezt a számot $L(F_1, F_2)$-vel. Nyilvánvaló, hogy $L(F_1, F_2) \leqq 1$. Ismeretes, hogy ez a távolság kielégíti a metrikus tér axiómáit:

a) $L(F_1, F_2)=0$, akkor és csak akkor, ha $F_1 \equiv F_2$,

b) $L(F_1, F_2)=L(F_2, F_1)$,

c) $L(F_1, F_3) \leqq L(F_1, F_2)+L(F_2, F_3)$.

Ismeretes az is, hogy az $\mathfrak{F}$ tér teljes a Lévy-féle távolságra nézve ([5] 42. o. 2. tétel). $\mathfrak{F}$ tehát korlátos és teljes, de nem kompakt metrikus tér. A továbbiakban azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy milyen feltételek mellett kompakt az $\mathfrak{F}$ tér valamely $\mathfrak{F}'$ részhalmaza.

1. 5. TÉTEL. *Az $\mathfrak{F}$ tér valamely $\mathfrak{F}'=\{F(x, z), z \in Z\}$ részhalmaza akkor és csakis akkor kompakt, ha minden λ-ra $(0<\lambda<1)$, a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos.*

BIZONYÍTÁS. Az 1. 4. tétel korolláriuma szerint a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok akkor és csak akkor korlátosak λ minden rögzített értékére, ha

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{z \in Z} [F(-\varepsilon, z)+1-F(\varepsilon+0, z)]=0.$$

Ez ekvivalens a következőkkel:

$$\sup_{z \in Z} F(-\varepsilon, z) \to 0, \ \inf_{z \in Z} F(\varepsilon, z) \to 1, \quad \text{ha } \varepsilon \to \infty.$$

Ha tehát $F(x, z_1), F(x, z_2), \ldots$ $\mathfrak{F}'$ egy sorozata és ennek egy $F(x, z_{n_k})$ részsorozata konvergál egy balról folytonos, nem csökkenő $F(x)$ függvényhez az utóbbi minden folytonossági pontjában, akkor szükségképpen $F(-\infty)=0$ és $F(+\infty)=1$.

1. 6. TÉTEL. *Az $\mathfrak{F}$ tér valamely $\mathfrak{F}'=\{F(x, z), z \in Z\}$ halmaza akkor és csak akkor kompakt, ha $\mu_3=0$.*

BIZONYÍTÁS. Tételünk az 1. 4. tétel korolláriumának és az 1. 5. tételnek közvetlen következménye.

1. 7. TÉTEL. *Az $\mathfrak{F}$ tér valamely $\mathfrak{F}'=\{F(x, z), z \in Z\}$ halmaza akkor és csak akkor kompakt, ha az $f(t, z), z \in Z$ karakterisztikus függvények a $t=0$*

pontban egyenlő mértékben folytonosak, vagyis minden pozitív ε-hoz tartozik olyan $\delta>0$, hogy

$$(1.9)\qquad |1-f(t,z)|<\varepsilon,\quad ha\quad |t|<\delta.$$

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt. Ebből következik, hogy elég nagy c esetén

$$\sup_{z\in Z}\mathbf{P}(|\xi_z|>c)>\frac{\varepsilon}{4}.$$

Mivel

$$|1-f(t,z)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{itx})dF(x,z)\right|\leqq|t|\int_{|x|\leqq c}|x|dF(x,z)+$$

$$+2\mathbf{P}(|\xi_z|>c)\leqq|t|c+\frac{\varepsilon}{2},$$

tehát az (1.9) egyenlőtlenség teljesül, ha $|t|<\dfrac{\varepsilon}{2c}=\delta$.

Tegyük most fel, hogy teljesül az (1.9) egyenlőtlenség. Ekkor az (1.2) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $\mu_3<10\varepsilon$, ami csak úgy állhat fenn minden pozitív ε-ra, ha $\mu_3=0$.

1.8. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{F}'=\{F(x,z), z\in Z\}$ halmazra vonatkozólag teljesül a következő két feltétel:*

1. *Létezik olyan mérhető, a $t=0$ pontban folytonos $g(t)$ függvény, melyre $0\leqq g(t)\leqq 1$, $g(0)=1$ és*

$$|f(t,z)|\geqq g(t), z\in Z.$$

2. *Létezik olyan $\lambda_1(0<\lambda_1<1)$ szám, hogy a $Q(\lambda_1,z)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1,z), z\in Z\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos. Ebben az esetben minden λ-ra $(0<\lambda<1)$ a $\{Q(\lambda,z), z\in Z\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos.*

BIZONYÍTÁS. Bizonyítsuk be azt, hogy az említett feltételek mellett minden λ-ra a $\{Q(\lambda,z), z\in Z\}$ halmaz alulról korlátos. A felülről való korlátosságra vonatkozó állítás bizonyítása ehhez teljesen hasonlóan történik. Legyen $Q(\lambda_1,z)\geqq K_1, z\in Z$. Az (1.6) egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy ha $\delta>0$, akkor

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-g^2(t))\,dt\geqq\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-|f(t,z)|^2)\,dt\geqq$$

$$\geqq\frac{\min(\lambda_1,1-\lambda_1)}{10}\mathbf{P}\left(|\xi_z-Q(\lambda,z)|>\frac{1}{\delta}\right)\geqq\frac{\min(\lambda_1,1-\lambda_1)}{10}\mathbf{P}\left(\xi_z<K_1-\frac{1}{\delta}\right),$$

tehát

$$\frac{\min(\lambda_1, 1-\lambda_1)}{10} \sup_{z \in Z} P\left(\xi_z < K_1 - \frac{1}{\delta}\right) \leqq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1-g^2(t))\,dt.$$

Ha elvégezzük a $\delta \to 0$ határátmenetet, akkor innen következik, hogy $\mu_1 = 0$, tehát az 1.4. tétel korolláriuma szerint minden rögzített λ-ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz alulról korlátos. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

1.9. TÉTEL. *Az $\mathfrak{F}$ tér $\mathfrak{F}' = \{F(x, z), z \in Z\}$ halmaza akkor és csak akkor kompakt, ha teljesül az 1.8. tétel 1: feltétele és van olyan λ_1 szám $(0 < \lambda_1 < 1)$, hogy a $Q(\lambda_1, z)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy tételünk feltételei teljesülnek. Ekkor az 1.8. tétel szerint minden rögzített λ-ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos és így az 1.5. tétel szerint az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt.

Tegyük most fel, hogy az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt. Az 1.5. tétel szerint ekkor minden λ-ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos, tehát csupán a $g(t)$ függvény exisztenciáját kell belátnunk. Ehhez nyilván elég azt bebizonyítanunk, hogy az

$$\inf_{z \in Z} |f(t, z)| = g_1(t)$$

függvény folytonos a $t = 0$ pontban.* Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan 1-nél kisebb q szám, olyan t_k és z_k sorozat, hogy $t_k \to 0$, ha $k \to \infty$, továbbá

$$|f(t_k, z_k)| \leqq q < 1, k = 1, 2, \ldots.$$

Mivel az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt, következik, hogy az $F(x, z_k)$ sorozat tartalmaz egy olyan részsorozatot, mely konvergál egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $F(x, z_k)$ sorozat maga ilyen tulajdonságú. Ha $f(t)$ jelenti $F(x)$ karakterisztikus függvényét, akkor ezek szerint az $f(t, z_k)$ sorozat minden véges intervallumban egyenletesen konvergál az $f(t)$ határfüggvényhez, ami ellentmondás, mert $f(t)$ folytonos függvény és $f(0) = 1$.

* A $g(t)$ függvény megválasztható pl. a következőképpen: $g(t) = 0$, ha $|t| > 1$ és $g(t) = \inf\limits_{\frac{1}{n+1} < |t| \leqq \frac{1}{n}} g_1(t)$, ha $\frac{1}{n+1} < |t| \leqq \frac{1}{n}$, $g(0) = 1$.

5. §. Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájára vonatkozó tételek

Ebben a paragrafusban két tételt ismertetek. A tételek bizonyításai megtalálhatók a [10] dolgozatban.

A tételek arra a kérdésre vonatkoznak, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, milyen feltételek mellett konvergál minden sorrendben 1 valószínűséggel a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \tag{1.10}$$

sor.

Vezessük be a következő jelöléseket. Jelölje $\mathfrak{K}$ a természetes számok véges, $\mathfrak{S}$ pedig valamennyi részhalmazának az összességét. Legyen

$$\xi(A) = \sum_{i \in A}' \xi_i, \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{K}, \quad \text{vagy} \quad A \in \mathfrak{S}, \tag{1.11}$$

feltéve, hogy a jobboldalon minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens összeg áll. $\xi(A)$ eloszlásfüggvényét jelölje $F(x, A)$, egy tetszőleges λ-kvantilisét $Q(\lambda, A)$.

1. 10. TÉTEL. *Ha az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{K}\}$ halmaz kompakt, akkor az* (1. 10) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergens.*

Megfordítva, ha az (1. 10) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergens, akkor az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt.*

1. 11. TÉTEL. *Ha található olyan λ_1, λ_2 számpár, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A)$, $Q(\lambda_2, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{K}\}$, $\{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{K}\}$ halmazok korlátosak, akkor az* (1. 10) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergens.*

Megfordítva, ha az (1. 10) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergens, akkor a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{S}\}$ $(0 < \lambda < 1)$ halmazok λ minden rögzített értéke mellett korlátosak.*

1. KOROLLÁRIUM. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók eloszlásai a 0 pontra szimmetrikusak. Ha van olyan $\lambda \neq \frac{1}{2}$ $(0 < \lambda < 1)$, hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{K}\}$ halmaz korlátos, akkor az (1. 10) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens.

2. KOROLLÁRIUM. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók nem-negatívak. Ha van olyan $\lambda (0 < \lambda < 1)$, hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{K}\}$ halmaz korlátos, akkor az (1.10) sor konvergens.

II. FEJEZET

GYŰRŰN ÉS ALGEBRÁN ÉRTELMEZETT ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK

Ebben a fejezetben valamely H halmaz részhalmazaiból képezett $\mathfrak{R}$ gyűrű, illetve algebra elemein értelmezett $\xi(A)$ additív halmazfüggvény tulajdonságait vesszük vizsgálat alá. Ezek a vizsgálatok hozzásegítenek majd ahhoz, hogy megállapítsuk, milyen feltételek mellett lehet $\xi(A)$-t kiterjeszteni az $\mathfrak{R}$ gyűrűt illetve algebrát tartalmazó legkisebb σ-gyűrűre. Nyilvánvaló, hogy ennek egyik szükséges feltétele, hogy $\xi(A)$ $\mathfrak{R}$ fölött teljesen additív legyen. Ezért először arra kell találnunk feltételt, hogy egy additív halmazfüggvény mikor teljesen additív is. Ezzel foglalkozik a

2. 1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy $\mathfrak{R}$ gyűrű elemein értelmezett $\xi(A)$ additív halmazfüggvény teljesen additív legyen, szükséges és elegendő, hogy minden olyan $B_1, B_2, \ldots$ nem növekvő halmazsorozatra, melyre $B_k \in \mathfrak{R}$, $k=1,2,\ldots$, $\prod_{k=1}^{\infty} B_k=0$, teljesüljön a következő feltétel:*

$$\mathbf{P}(|\xi(B_k)|>\varepsilon)\to 0, \quad \text{ha } k\to\infty, \tag{2. 1}$$

ahol ε tetszőleges pozitív szám.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy teljesül a (2. 1) feltétel. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Legyen $A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, $B_n=\sum_{k=n}^{\infty} A_k$. Mivel $\xi(A)$ additív halmazfüggvény, következik, hogy

$$\xi(A)=\xi(A_1)+\xi(A_2)+\cdots+\xi(A_{n-1})+\xi(B_n), \quad n=2,3,\ldots .$$

Innen következik, hogy

$$\xi(A)-\sum_{k=1}^{n-1}\xi(A_k)=\xi(B_n)\Rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,$$

tehát ([4], 119. o. Corollary 2.)

$$\xi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi(A_k).$$

Tegyük fel most, hogy $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ha $B_1, B_2, \ldots$ a tételben leírt tulajdonságú halmazsorozat, és $A_n=B_n-B_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, akkor $A_iA_k=0$, ha $i\neq k$ és

$$B_1=\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

amiből a teljes additívitás miatt következik, hogy

$$\xi(B_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi(A_k).$$

Innen következik, hogy teljesül a következő reláció:

$$\xi(B_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\xi(A_k)\to 0,$$

tehát igaz az is, hogy ha $\varepsilon>0$, akkor

$$\mathbf{P}(|\xi(B_n)|>\varepsilon)\to 0.$$

KOROLLÁRIUM. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény. Ha létezik olyan T pozitív szám, hogy $\mathfrak{R}$ minden olyan $A_1, A_2, \ldots$ nem-növekvő sorozatára, amelyre $\lim_{k\to\infty} A_k=0$, teljesül, hogy

$$\lim_{k\to\infty} f(t, A_k)=1, \text{ ha } |t|\leqq T,$$

akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény teljesen additív.

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus függvényekre érvényes (1.3) egyenlőtlenségből következik, hogy a

$$\lim_{k\to\infty} f(t, A_k)=1$$

reláció minden t-re teljesül, tehát

$$\xi(A_k)\Rightarrow 0, \text{ ha } k\to\infty$$

és így az állítás a 2.1 tételből következik.

A továbbiakban a $\xi(A)$ valószínűségi változók $Q(\lambda, A)$ kvantiliseire vonatkozó tételeket bizonyítunk be. Ezeknél felhasználjuk az előző fejezet eredményeit.

2.2. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy van olyan λ_1 szám, hogy a $Q(\lambda_1 A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos. Ekkor minden λ-ra a $\{Q(\lambda, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos. Ha a $\{Q(\lambda_1, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz mindkét oldalról korlátos, akkor az $\{F(x, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz kompakt.*

BIZONYÍTÁS. Ha $A\in\mathfrak{R}$, akkor feltevés szerint $\bar{A}\in\mathfrak{R}$ és $H=A+\bar{A}\in\mathfrak{R}$. Ebből következik, hogy

$$\xi(H)=\xi(A)+\xi(\bar{A}),\quad f(t, H)=f(t, A)f(t, \bar{A}).$$

Mivel $|f(t, \bar{A})|\leqq 1$, következik, hogy

$$|f(t, A)|\geqq|f(t, H)|,\quad A\in\mathfrak{R}. \tag{2.2}$$

$f(t, H)$ karakterisztikus függvény, tehát $|f(t, H)|$ folytonos, $|f(0, H)| = 1$ és így, ha

$$g(t) = |f(t, H)|,$$

azt kapjuk, hogy az 1. 8. tétel 1. feltétele teljesül. A 2. feltétel teljesülését feltételeink között előírtuk, tehát ezzel az állítás egyik részét igazoltuk.

Ha feltesszük azt is, hogy a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz mindkét oldalról korlátos, akkor a (2. 2) egyenlőtlenségből, továbbá az 1. 9. tételből következik, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz kompakt. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Gyűrűre vonatkozólag abból, hogy van egy mindkét oldalról korlátos kvantilis-halmaz, nem következik, hogy mindegyik kvantilis-halmaz korlátos. Ha például $\mathfrak{R}$ a pozitív egész számok véges halmazaiból alkotott gyűrű és

$$F(x, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

akkor $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$, ha $A \in \mathfrak{R}$, de ha $\lambda \neq \frac{1}{2}$, akkor a $Q(\lambda, A)$ mennyiségek nem korlátosak. Gyűrű esetére az I. fejezet eredményeit felhasználva kapjuk a következő tételeket.

2. 3. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy van olyan λ_1, λ_2 számpár, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A), Q(\lambda_2, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$, $\{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmazok korlátosak. Ebben az esetben minden λ-ra a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan λ_0 szám, és olyan A_k halmazsorozat, hogy a $Q(\lambda_0, A_k)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén $|Q(\lambda_0, A_k)| \to \infty$, ha $k \to \infty$. Legyen $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$, $C_n = B_{n+1} - B_n$, akkor $C_i C_k = 0$, ha $i \neq k$ és így a $\xi(C_n)$ valószínűségi változók függetlenek. Figyelembe véve tételünk feltételeit, az 1. 11. tétel szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi(C_n)$$

sor 1 valószínűséggel konvergál. Jelöljük ξ-vel ennek a sornak az összegét és $f(t)$-vel ξ karakterisztikus függvényét. Nyilvánvaló, hogy

$$f(t) = f(t, A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \prod_{k=n}^{\infty} f(t, C_k),$$

továbbá

$$f(t, A_1+A_2+\cdots+A_n)=f(t, (A_1+A_2+\cdots+A_n)-A_n)f(t, A_n),$$

tehát

$$|f(t)|\leqq|f(t, A_1+A_2+\cdots+A_n)|\leqq|f(t, A_n)|.$$

Tudjuk, hogy a $\{Q(\lambda_1, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, tehát ebből az 1. 9. és 1. 5. tételek alapján következik, hogy a $\xi(A_n)$ valószínűségi változók kvantilisei korlátosak, ami ellentmondás, mert feltettük, hogy $|Q(\lambda_0, A_n)|\to\infty$, ha $n\to\infty$.

2. 4. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy $\xi(A)\geqq 0, A\in\mathfrak{R}$ és van olyan λ_1 szám, hogy a $Q(\lambda_1, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda_1, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos. Ebben az esetben minden λ-ra a $\{Q(\lambda, A), A\in\mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan λ_0 szám és olyan A_k halmazsorozat, hogy a $Q(\lambda, A_k)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén $Q(\lambda_0, A_k)\to\infty$, ha $k\to\infty$. Ha $B_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$, akkor $B_n\supseteq A_n$ és mivel $\xi(A)$ additív és nem negatív, $\xi(B_n)\geqq\xi(A_n)$. Ha $C_n=B_{n+1}-B_n$, akkor $C_iC_k=0$, ha $i\neq k$, tehát a $\xi(C_n)$ valószínűségi változók függetlenek. Tudjuk azt is, hogy ha $A\in\mathfrak{R}$, akkor a $Q(\lambda_1, A)$ mennyiségek korlátosak, tehát az 1. 11. tétel 2. korolláriuma alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi(C_n)<\infty.$$

Ha ennek a sornak az összegét ξ-vel jelöljük, akkor tehát

$$0\leqq\xi(A_n)\leqq\xi(B_n)=\sum_{k=1}^{n}\xi(C_k)\leqq\xi,$$

ami ellentmondás, mert feltettük, hogy $Q(\lambda_0, A_k)\to\infty$.

Legyen R gyűrű és $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett halmazfüggvény. Definiáljuk a következő halmazfüggvényeket:

$$\mu_1(A)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\sup_{B\in A\mathfrak{R}}\mathbf{P}(\xi(B)<-\varepsilon)$$

$$\mu_2(A)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\sup_{B\in A\mathfrak{R}}\mathbf{P}(\xi(B)>\varepsilon),$$

$$\mu_3(A)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\sup_{B\in A\mathfrak{R}}\mathbf{P}(|\xi(B)|>\varepsilon).$$

A $\mu_1(A), \mu_2(A), \mu_3(A)$ halmazfüggvények nem mások, mint az I. fejezetben definiált μ_1, μ_2, μ_3 mennyiségek, ha Z az $\mathfrak{R}$ gyűrű azon elemeinek a halmaza, amelyek részei az A halmaznak. Nyilvánvaló, hogy ha $B \subseteq A, B \in \mathfrak{R}, A \in \mathfrak{R}$, akkor

$$\mu_i(B) \leqq \mu_i(A), i = 1, 2, 3.$$

Igaz továbbá a következő

2. 5. TÉTEL. *Ha $\xi(A)$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény és* $A_k \in \mathfrak{R}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, akkor

$$\mu_i\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{r} \mu_i(A_k), i = 1, 2, 3.$$

BIZONYÍTÁS. Végezzük el a bizonyítást az $i = 3$ esetben. A többi eset teljesen hasonlóan tárgyalható. Legyen $A_k \in \mathfrak{R}, A_k' \in A_k\mathfrak{R}, k = 1, 2, \ldots, r$, $A_i A_l = 0$, ha $i \neq l$, akkor

$$\mathbf{P}(|\xi(A_1' + A_2' + \cdots + A_r')| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|\xi(A_1') + \xi(A_2') + \cdots + \xi(A_r')| > \varepsilon) \leqq$$

$$\leqq \mathbf{P}\left(|\xi(A_1')| > \frac{\varepsilon}{r}\right) + \mathbf{P}\left(|\xi(A_2')| > \frac{\varepsilon}{r}\right) + \cdots + \mathbf{P}\left(|\xi(A_r')| > \frac{\varepsilon}{r}\right),$$

és így

$$\sup_{C \in \sum_{k=1}^{r} A_k \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(C)| > \varepsilon) \leqq \sum_{k=1}^{r} \sup_{A_k' \in A_k \mathfrak{R}} \mathbf{P}\left(|\xi(A_k')| > \frac{\varepsilon}{r}\right),$$

ahonnan következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{r} \mu_3(A_k).$$

Ha most $A_1, A_2, \ldots, A_r$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű tetszőleges halmazai, akkor az előbbiek szerint

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \mu_3(A_1) + \mu_3(A_2 - A_1) + \cdots + \mu_3\left(A_r - \sum_{k=1}^{r-1} A_k\right).$$

Mivel a $\mu_i(A)$, $i = 1, 2, 3$ halmazfüggvények monotonok, következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{r} \mu_3(A_k).$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A $\mu_i(A)$ halmazfüggvényekre vonatkozólag fennáll egy 0 vagy 1 törvény. Ezt fejezi ki a

2. 6. TÉTEL. *Az $\mathfrak{R}$ gyűrű elemein értelmezett $\mu_1(A), \mu_2(A), \mu_3(A)$ halmazfüggvények csak a 0 és az 1 értéket vehetik fel.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $A \in \mathfrak{R}$ és tekintsük az $\mathfrak{R}$ gyűrű azon B elemeit, amelyekre teljesül, hogy $B \subseteq A$. Ha $\mu_1(A) > 0$ $(\mu_2(A) > 0)$, akkor az 1.4. tétel korolláriuma szerint van olyan λ_1 (λ_2), hogy a $Q(\lambda_1, B)$ $(Q(\lambda_2, B))$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, B), B \in A\mathfrak{R}\}$ ($\{Q(\lambda_2, B), B \in A\mathfrak{R}\}$) halmaz nem korlátos alulról (felülről). Ekkor azonban a 2. 2 tétel felhasználásával következik, hogy λ minden rögzített értéke mellett a $\{Q(\lambda, B), B \in A\mathfrak{R}\}$ halmazok sem korlátosak alulról (felülről). Innen az 1. 4. tétel korolláriumának ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\mu_1(A) = 1$ ($\mu_2(A) = 1$). Tekintsük végül a $\mu_3(A)$ értéket. Ha $\mu_3(A) > 0$, akkor abból, hogy $\mu_3(A) \leqq \mu_1(A) + \mu_2(A)$, következik, hogy $\mu_1(A)$ és $\mu_2(A)$ közül legalább az egyik pozitív. Figyelembe véve az előbb mondottakat és azt, hogy $\mu_3(A) \geqq \mu_1(A), \mu_3(A) \geqq \mu_2(A)$, következik, hogy $\mu_3(A) = 1$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Végül bizonyítsuk be a következő tételt:

2. 7. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív (teljesen additív) halmazfüggvény. Ekkor minden rögzített t-re az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény szubadditív (teljesen szubadditív).*

BIZONYÍTÁS. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Az 1-nél nem nagyobb abszolút értékű $z_1, z_2, \ldots, z_r$ komplex számokra érvényes

$$|1 - z_1 z_2 \ldots z_r| \leqq |1 - z_1| + |1 - z_2| + \cdots + |1 - z_r|$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\left|1 - f\left(t, \sum_{k=1}^{r} A_k\right)\right| = \left|1 - \prod_{k=1}^{r} f(t, A_k)\right| \leqq \sum_{k=1}^{r} |1 - f(t, A_k)|, r = 1, 2, \ldots .$$

Ha tehát $\xi(A)$ additív, az állítást igazoltuk. Ha $\xi(A)$ teljesen additív és $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, akkor, mivel

$$f\left(t, \sum_{k=1}^{r} A_k\right) = \prod_{k=1}^{r} f(t, A_k) \Longrightarrow f(t, A),$$

következik, hogy

$$|1 - f(t, A)| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, A_k)|.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

III. FEJEZET

TELJESEN ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK KITERJESZTÉSE

1. §. A probléma diszkussziója

Legyen $\mathfrak{R}$ valamely H tér bizonyos részhalmazaiból álló gyűrű és $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy mikor terjeszthető ki $\xi(A)$ értelmezése az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre. Kiterjesztés alatt egy oly $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ elemein értelmezett $\xi^*(A)$ teljesen additív halmazfüggvény konstrukcióját értem, melyre teljesül, hogy

$$\xi^*(A)=\xi(A), \quad \text{ha} \quad A\in\mathfrak{R}.$$

Nyilvánvaló, hogy minden teljesen additív halmazfüggvény nem terjeszthető ki, mert ha speciálisan $\xi(\omega,A)$ állandó, $\xi(\omega,A)\equiv\varphi(A)$, ahol $\varphi(A)$ valós értékű, $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, akkor ennek kiterjesztéséhez is további feltételek szükségesek.

Legyen például H a sík $0\leqq x<1$, $0\leqq y<1$ négyzete, $\mathfrak{R}$ pedig az x-tengellyel párhuzamos egyeneseken fekvő, balról zárt, jobbról nyílt intervallumok véges összegeiből, ezek komplementumaiból, melyeket röviden komplementum-típusúnak fogom nevezni, és magából a H halmazból alkotott algebra. Ha $A=\sum_{k=1}^{n}\{a_k\leqq x<b_k, y=y_k\}$, akkor legyen $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$ és $\varphi(\bar{A})=-\varphi(A)$. $\varphi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ugyanis, ha $A_1, A_2,\ldots$ $\mathfrak{R}$-nek egy diszjunkt sorozata és $A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{R}$, akkor az A_k halmazok között legfeljebb egy lehet komplementum-típusú. Ha ilyen egyáltalán nincs, akkor A véges sok olyan balról zárt, jobbról nyílt intervallum összege, melyek mindegyike fel van bontva balról zárt, jobbról nyílt intervallumok összegére. Ezek hosszait akármilyen sorrendben adjuk össze, mindig ugyanazt az összeget kapjuk, tehát $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)$. Ha pedig van egy komplementum-típusú halmaz, és ez A_1, akkor abból, hogy $\varphi(A)=\varphi(A_1)+\varphi\left(\sum_{k=2}^{\infty}A_k\right)$ és $\varphi\left(\sum_{k=2}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\varphi(A_k)$, következik, hogy $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)$. Ennek ellenére $\varphi(A)$ nem terjeszthető ki $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re, mert a $+\infty$ és $-\infty$ értékek egyidejűleg nem fordulhatnak elő σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény értékkészletében ([6] 18. o. Theorem 3. 4. 13.).

Ismeretes, hogy a közönséges halmazfüggvények esetében a kiterjesztés elvégezhetőségéhez és ahhoz, hogy a kiterjesztett halmazfüggvény véges értékű legyen, szükséges és elegendő, hogy a halmazfüggvény mindkét oldalról korlátos legyen. A kiterjesztést pedig legegyszerűbben úgy végezhetjük el, hogy a halmazfüggvényt felbontjuk pozitív és negatív részének különbségére és ezeket külön-külön kiterjesztjük.

A valószínűségi változó-értékű halmazfüggvények esetében ez az út nem járható, mert, ha az A halmaz mérhető részhalmazainak a száma nem megszámlálható, akkor az elemi események terében értelmezett

$$\eta^{+}(A)=\sup_{B\in A\mathfrak{R}}\xi(B),\quad \eta^{-}(A)=\inf_{A\in A\mathfrak{R}}\xi(B)$$

függvények nem feltétlenül mérhetők, de ha mérhetők is, akkor is lehetséges, hogy pozitív mértékű halmazon végtelen értéket vesznek fel. Ezért a kiterjesztést ebben az esetben más úton kell elvégeznünk.

Külön ki kell emelnünk, hogy abban a speciális esetben, ha $\xi(\omega,A)=\varphi(A)$, az a követelmény, hogy $\xi(\omega,A)$ valószínűségi változó, annyit jelent, hogy a $\varphi(A)$ érték véges. Ilyenformán a valós értékű halmazfüggvények közül csupán azokat kapjuk meg speciális esetként, amelyek véges értékűek.

Felvetődik a kérdés: vajon nem lehetne-e a valószínűségi változó-értékű halmazfüggvények egész elméletét úgy felépíteni, hogy a mintafüggvények (amelyek közönséges, valós értékű halmazfüggvények lennének) összességéből indulunk ki. Erre a válasz az, hogy ez az út abban az esetben járható csak, ha megelégszünk additív halmazfüggvényekkel. Ha ugyanis a mintafüggvényekről kikötjük, hogy teljesen additívak legyenek, akkor kizárunk a tárgyalásból sok fontos halmazfüggvényt. Legyen pl. ξ_t, $t\geqq 0$, a jól ismert Brown-mozgás folyamat, $\mathbf{M}(\xi_t)=0$, $\mathbf{D}^2(\xi_t)=t$. Ha $\mathfrak{R}$ a számegyenes balról zárt, jobbról nyílt intervallumai véges összegeiből áll és a $\xi(A)$, $A\in\mathfrak{R}$ halmazfüggvény a folyamat megfelelő differenciáiból, illetve ezek összegeiből alkotott additív halmazfüggvény, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény $\omega(A)$ mintafüggvényei nem lehetnek teljesen additívak. Ezt igen egyszerűen beláthatjuk. Tekintsük csupán az $I=[0,1)$ intervallumot, amikor tehát $A\subseteq I$. Legyen $\tilde{\xi}_t$ egy olyan, a $0\leqq t\leqq 1$ intervallumban értelmezett szeparábilis Brown-mozgás folyamat, melyre

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_t=\xi_t)=1,$$

és legyen $\tilde{\xi}(A)$ a $\tilde{\xi}_t$ folyamat differenciái illetve ezek összegei által származtatott additív halmazfüggvény. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}(A)=\xi(A))=1,\quad \text{ha}\quad A\in\mathfrak{R}.$$

A $\tilde{\xi}_t$ folyamat majdnem minden mintafüggvénye folytonos ([4], 393. o. Theorem

2. 2). Ebből és [4], 395. Theorem 2. 3.-ból* következik, hogy egy folytonos Brown-mozgás folyamat majdnem minden mintafüggvénye nem korlátos variációjú. Osszuk fel az $I=[0,1)$ intervallumot $\frac{1}{n}$ hosszúságú, balról zárt, jobbról nyílt, diszjunkt $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots, \mathfrak{I}_n$ intervallumok összegére és legyen

$$\tilde{\xi}_n = \sum_{k=1}^{n} |\tilde{\xi}(\mathfrak{I}_k)|, \quad \xi_n = \sum_{k=1}^{n} |\xi(\mathfrak{I}_k)|.$$

Az előbb mondottakból következik, hogy

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n \to \infty) = 1.$$

Mivel $\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n = \xi_n) = 1$, a ξ_n sorozatra is fennáll, hogy

$$\mathbf{P}(\xi_n \to \infty) = 1,$$

tehát a $\xi(A)$ halmazfüggvény majdnem minden mintafüggvénye nem korlátos variációjú.

Ennek a fejezetnek az eredményei hozzásegítenek ahhoz, hogy az R_n tér Borel-halmazain értelmezett additív $\xi(A)$ halmazfüggvények exisztenciaproblémáit megoldjuk. Bemutatom azt a gondolatmenetet, ahogyan ez egyes konkrét esetekben keresztülvihető.

Konstruáljunk például egy olyan $\xi(A)$ halmazfüggvényt, amely az R_n tér valamely véges, zárt H téglája Borel-féle részhalmazain van értelmezve és $\xi(A)$ Cauchy-eloszlással rendelkezik, karakterisztikus függvénye a következő alakú:

$$f(t, A) = e^{-|A||t|}.$$

Először a Kolmogorov-féle konstrukció ([8], 4. §.) segítségével konstruálunk egy olyan $\xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in H$ valószínűségi változó-összességet, melyre teljesülnek az alábbi feltételek:

a) Ha I a következő n-dimenziós tégla:

(3. 1) $$I = \{a_i \leqq x_i < a_i + h_i;\quad i = 1, 2, \ldots, n\}, \quad I \subseteq H,$$

és

$$\Delta_{h_i} \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n} = \xi_{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + h_i, t_{i+1}, \ldots, t_n} - \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n},$$

továbbá

$$\Delta_I \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n} = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_n} \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n},$$

akkor a

(3. 2) $$\xi(I) = \Delta_I \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$$

valószínűségi változó Cauchy-eloszlással rendelkezik, mégpedig

(3. 3) $$f(t, I) = e^{-h_1 h_2 \ldots h_n |t|}.$$

* Ez a tétel eredetileg P. LÉVYtől származik.

b) Ha $I_1, I_2, \ldots, I_r$ a H téglában fekvő diszjunkt n-dimenziós téglák, akkor a (3. 2) kifejezéssel definiált

$$\xi(I_1), \xi(I_2), \ldots, \xi(I_r)$$

valószínűségi változók függetlenek.

Ezután tekintjük a (3. 1) téglák véges összegeiből alkotott $\mathfrak{R}$ gyűrűt és ennek $A = I_1 + I_2 + \cdots + I_r$ elemeihez hozzárendeljük a

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{r} \xi(I_k) \tag{3. 4}$$

valószínűségi változókat.

Miután a Kolmogorov-féle konstrukcióval eddig eljutottunk, megállapítjuk, hogy $\xi(A)$ teljesen additív az $\mathfrak{R}$ gyűrűn, továbbá az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz kompakt és a 3. 2. tételt szem előtt tartva, elvégezzük a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjesztését a H halmaz Borel-féle részhalmazainak $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűjére.* $\xi(A)$ teljes additívitása a 2. 1. tételből és abból következik, hogy ha $A_n \to 0$, akkor $|A_n| \to 0$. Ugyanis (3. 3) és (3. 4) alapján azt kapjuk, hogy

$$f(t, A_n) = e^{-|A_n||t|} \Longrightarrow 1, \text{ ha } n \to \infty.$$

A másik tulajdonság, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz kompakt, abból következik, hogy

$$f(t, A) = e^{-|A||t|} \geqq e^{-|H||t|} = g(t),$$

ahol $g(t)$ folytonos függvény, $g(0) = 1$, továbbá $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$ és így teljesülnek az 1. 9. tétel feltételei. Ezzel a konstrukciót befejeztük.

2. §. Gyűrűn értelmezett halmazfüggvény kiterjesztése

3. 1. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha van olyan pozitív T szám, hogy az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény minden olyan rögzített t értékre, melyre $|t| \leqq T$, korlátos variációjú, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető az $S(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre. A kiterjesztés egyértelmű abban az értelemben, hogy ha $\xi^*(A)$ és $\xi^{**}(A)$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvények és*

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \quad \textit{ha} \quad A \in \mathfrak{R},$$

akkor

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \quad \textit{ha} \quad A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}).$$

* Jelen esetben $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ nemcsak σ-gyűrű, hanem σ-algebra is.

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény és T tetszőleges pozitív szám, akkor a

$$\sup_{|t|\leq T} |1-f(t,A)| \tag{3.5}$$

halmazfüggvény korlátos variációjú.

A TÉTEL ELSŐ FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Feltevés szerint $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény az $\mathfrak{R}$ gyűrűn. Ha tehát $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\leq T} \left| f(t,A) - \prod_{k=1}^{n} f(t,A_k) \right| = 0. \tag{3.6}$$

Tekintsük a $[-T, T]$ intervallumban folytonos függvények $\mathfrak{B}$ Banach-algebráját, egy függvény normája legyen az abszolút értékének a maximuma. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}$ kommutatív és van egység eleme. (3. 6) szerint, ha az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett karakterisztikus függvényeket csak a $[-T, T]$ intervallumban tekintjük és $g(t,A)=f(t,A)$, ha $|t|\leq T$, akkor $g(t,A)$ olyan teljesen multiplikatív* halmazfüggvény, melynek értelmezési tartománya az $\mathfrak{R}$ gyűrű, értékkészlete pedig a $\mathfrak{B}$ Banach-algebrában van. Megjegyezzük, hogy mivel $g(0,A)=1$, $\|g(t,A)\| = \sup_{|t|\leq T} |g(t,A)| = 1$, tehát 0 normájú függvény nem fordul elő $g(t,A)$ értékkészletében.

Bebizonyítjuk, hogy az $\|1-g(t,A)\|$, $A\in\mathfrak{R}$ halmzafüggvény korlátos variációjú és teljesen szubadditív.

Az első állítás bizonyításához kimutatjuk, hogy teljesülnek az 1. 1. tétel feltételei. Mivel $\|g(t,A)\|\leq 1$, következésképpen $\|1-g(t,A)\|\leq 2$, tehát az 1. feltétel teljesül. A 2. 7. tétel szerint, ha $A_1, A_2, \ldots, A_r$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű diszjunkt halmazai, $A=\sum_{i=1}^{r} A_i$, akkor t minden értékére

$$|1-f(t,A)| \leq \sum_{k=1}^{r} |1-f(t,A_k)|,$$

tehát

$$\|1-g(t,A)\| = \sup_{|t|\leq T} |1-f(t,A)| \leq \sum_{k=1}^{r} \sup_{|t|\leq T} |1-f(t,A_k)| = \sum_{k=1}^{r} \|1-g(t,A_k)\|.$$

Eszerint a 2. feltétel is teljesül. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Tételünk feltétele szerint

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1-f(t,A_k)| < \infty, \quad \text{ha} \quad |t|\leq T.$$

* Ennek definíciója megtalálható a [11] dolgozatban.

Ebből következik ([4], 115. o. Theorem 2. 7.), hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Másrészt ez maga után vonja, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi(A_k)| > \varepsilon)$$

végtelen sorok abszolút konvergensek ([8] 5. §). Az

$$\|1-g(t, A_k)\| = \sup_{|t|\leqq T} |1-f(t, A_k)| \leqq \sup_{|t|\leqq T} \left| \int_{|x|\leqq\varepsilon} (e^{itx}-1-itx)\,dF(x, A_k) + \right.$$

$$\left. + it \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)| > \varepsilon) \leqq \frac{T^2}{2} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A_k) +$$

$$+ T \left| \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)| > \varepsilon)$$

egyenlőtlenségből az előbb mondottak alapján következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|1-g(t, A_k)\| < \infty,$$

tehát az 1. 1. tétel 3. feltétele is teljesül.

A második állítás a 2. 7. tételből közvetlenül adódik, mert, ha t minden értékére az $|1-f(t, A)|$ halmazfüggvény teljesen szubadditív, akkor teljesen szubadditív az $\|1-g(t, A)\| = \sup_{|t|\leqq T} |1-f(t, A)|$ halmazfüggvény is.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy teljesülnek [11] 1. tételének feltételei, következésképpen a $g(t, A)$ halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre, más szóval, létezik egy és csak egy olyan $g^*(t, A)$, az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen multiplikatív halmazfüggvény, amelyre

$$g^*(t, A) = g(t, A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{R},$$

és

$$g^*(t, A) \in \mathfrak{F}, \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}).$$

Igaz továbbá az is, hogy ha $A_n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, $n = 1, 2, \ldots$ és $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = g^*(t, A)$. Speciálisan, ha $A = 0$, akkor, mivel $g^*(t, 0) = 1$, $\lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = 1$.

A $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjesztését transzfinit indukció segítségével végezzük el.

Konstruáljuk meg az $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ halmazosztályok transzfinit sorozatát a következőképpen. Ha minden olyan ν rendszámra, melyre

$\nu < \nu' < \omega_1$, az $\mathfrak{R}_\nu$ halmazosztályt már értelmeztük, akkor legyen $\mathfrak{R}_{\nu'}$ azoknak a halmazoknak az összessége, amelyek előállíthatók a $\sum_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$ osztályba tartozó halmazok konvergens sorozatainak limeszeként. Nyilvánvaló, hogy minden $\nu < \omega_1$ rendszámhoz tartozó $\mathfrak{R}_\nu$ halmazosztály gyűrű.

Tegyük fel, hogy minden $\nu < \nu' < \omega_1$ rendszámhoz tartozó $\mathfrak{R}_\nu$ gyűrű elemeihez már hozzárendeltünk valószínűségi változókat, pontosabban, $\mathfrak{R}_\nu$ elemein értelmeztünk egy olyan $\xi_\nu(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} &\xi_\nu(A) = \xi_{\nu_0}(A), \quad \text{ha} \quad \nu_0 < \nu,\ A \in \mathfrak{R}_{\nu_0}, \\ (3.7)\qquad &f_\nu(t, A) = g^*(t, A), \quad \text{ha} \quad |t| \leqq T,\ A \in \mathfrak{R}_\nu, \end{aligned}$$

ahol $A \in \mathfrak{R}_\nu$ és $f_\nu(t, A)$ a $\xi_\nu(A)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Ezután értelmezzük a $\xi_{\nu'}(A)$, $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$ halmazfüggvényt.

Ehhez előbb kimutatjuk, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ a $\sum_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű egy konvergens sorozata, $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu_k}$, akkor a $\xi_{\nu_k}(A_k)$ sorozat sztochasztikusan konvergál egy valószínűségi változóhoz. Legyenek

$$C_k = \prod_{n=1}^{k} A_n, \quad D_k = C_k - C_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

A $C_1, D_2, D_3, \ldots$ halmazok diszjunktak, tehát alkalmazva a transzfinit indukciós feltevést, következik, hogy a $\xi_{\nu_1}(C_1), \xi_{\nu_2}(D_2), \xi_{\nu_3}(D_3), \ldots$ valószínűségi változók függetlenek. Mivel továbbá $C_k = C_1 + D_2 + \cdots + D_k$,

$$(3.8)\qquad \xi_{\nu_k}(C_k) = \xi_{\nu_1}(C_1) + \sum_{n=2}^{k} \xi_{\nu_n}(D_n),$$

a (3.7) indukciós feltevést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$(3.9)\quad f_{\nu_k}(t, C_k) = f_{\nu_1}(t, C_1) \prod_{n=2}^{k} f_{\nu_n}(t, D_n) = g^*(t, C_1) \prod_{n=2}^{k} g^*(t, D_n), \quad \text{ha} \quad |t| \leqq T.$$

A (3.9) reláció jobboldalán álló sorozat konvergál egy, a $[-T, T]$ intervallumban folytonos függvényhez, tehát ([4] 115. o. Theorem 2.7) a (3.8) kifejezés jobboldalán álló sor és így a $\xi_{\nu_k}(C_k)$ sorozat is 1 valószínűséggel konvergál. Ha $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, akkor jelölje ξ ezt a határértéket. Kimutatjuk, hogy

$$\xi_{\nu_k}(A_k) \Rightarrow \xi, \quad \text{ha} \quad k \to \infty.$$

Tekintsük a következő relációt

$$\xi_{\nu_k}(A_k) = \xi_{\nu_k}(C_k) + \xi_{\nu_k}(A_k - C_k).$$

Elegendő tehát azt bebizonyítanunk, hogy

$$\xi_{\nu_k}(A_k - C_k) \Rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad k \to \infty.$$

Mivel $\lim_{k\to\infty}(A_k - C_k) = 0$, következik, hogy ha $|t| \leqq T$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(t, A_k - C_k) = \lim_{k\to\infty} g^*(t, A_k - C_k) = 1.$$

Másrészt az (1. 3) egyenlőtlenség szerint

$$1 - Rf_{\nu_k}(2t, A_k - C_k) \leqq 4(1 - Rf(t, A_k - C_k))$$

t minden értékére teljesül, tehát $f_{\nu_k}(t, A_k - C_k) \Rightarrow 1$, amivel az állítást igazoltuk.

Definiáljuk a $\xi_{\nu'}(A)$, $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$ halmazfüggvényt a következőképpen. Ha $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, ahol $A_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$, $\nu_n < \nu'$, $n = 1, 2, \ldots$, akkor legyen

$$\xi_{\nu'}(A) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \xi_{\nu_n}(A_n).$$

Bebizonyítjuk, hogy $\xi_{\nu'}(A)$ definíciója egyértelmű. Legyen $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ a $\sum_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű két konvergens sorozata, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = A$. Az $A_n B_n$, $A_n - B_n$ sorozatok tagjai szintén elemei a $\sum_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűnek, azonkívül $\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$. Ha $A_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$, $B_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$, $\nu_n < \nu'$, akkor

$$\xi_{\nu_n}(A_n) = \xi_{\nu_n}(A_n B_n) + \xi_{\nu_n}(A_n - B_n),$$
$$\xi_{\nu_n}(B_n) = \xi_{\nu_n}(A_n B_n) + \xi_{\nu_n}(B_n - A_n).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$ és így, ha $|t| \leqq T$,

$$f_{\nu_n}(t, B_n - A_n) = g^*(t, B_n - A_n) \to 1,$$
$$f_{\nu_n}(t, A_n - B_n) = g^*(t, A_n - B_n) \to 1,$$

az (1. 3) egyenlőtlenség figyelembevételével következik, hogy

$$\xi_{\nu_n}(A_n) - \xi_{\nu_n}(A_n B_n) \Rightarrow 0,$$
$$\xi_{\nu_n}(B_n) - \xi_{\nu_n}(A_n B_n) \Rightarrow 0,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \xi_{\nu_n}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \xi_{\nu_n}(B_n),$$

és így $\xi_{\nu'}(A)$ definíciója egyértelmű. Ebből következik az is, hogy

$$\xi_{\nu'}(A) = \xi_\nu(A), \quad \text{ha} \quad \nu < \nu'.$$

Most bebizonyítjuk, hogy amit a $\nu < \nu'$ rendszámokhoz tartozó $\xi_\nu(A)$ halmazfüggvényekre feltettünk, az teljesül a $\xi_{\nu'}(A)$ halmazfüggvényre is. Először kimutatjuk, hogy $f_{\nu'}(t, A) = g^*(t, A)$, ha $|t| \leqq T$. Legyen $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, ahol

$A_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$, $\nu_n < \nu'$, $n = 1, 2, \ldots$. Mivel $\xi_{\nu_n}(A_n) \Rightarrow \xi_{\nu'}(A)$ és így $f_{\nu_n}(t, A_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow f_{\nu'}(t, A)$, továbbá $g^*(t, A_n) \to g^*(t, A)$, következik, hogy

$$f_{\nu'}(t, A) = \lim_{n\to\infty} f_{\nu_n}(t, A_n) = \lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = g^*(t, A), \quad \text{ha} \quad |t| \leq T.$$

Az, hogy $\xi_{\nu'}(A)$ additív halmazfüggvény, a következőképpen látható be. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_r$ az $\mathfrak{R}_{\nu'}$ gyűrű diszjunkt halmazai. Legyenek $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_r^{(n)}$ a $\sum\limits_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű olyan sorozatai, melyekre

$$\lim_{n\to\infty} A_k^{(n)} = A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \quad A_i^{(l)} A_k^{(l)} = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq k.$$

Az $A_1^{(n)}, \ldots, A_r^{(n)}$ halmazokhoz független valószínűségi változók tartoznak, öszszegükhöz az egyes valószínűségi változók összege. Mivel ezek a tulajdonságok a határátmenet elvégzése után is megmaradnak, a $\xi_{\nu'}(A_1), \ldots, \xi_{\nu'}(A_r)$ valószínűségi változók függetlenek és $\xi_{\nu'}\left(\sum\limits_{k=1}^{r} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{r} \xi_{\nu'}(A_k)$. $\xi_{\nu'}(A)$ azonban teljesen additív is, mert mint láttuk, $f_{\nu'}(t, A) = g^*(t, A)$, ha $|t| \leq T$, továbbá $\mathfrak{R}_{\nu'}$ minden nem növekvő $A_1, A_2, \ldots$ sorozatára, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\nu'}(t, A_n) = \lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = 1 \quad (|t| \leq T),$$

és így a 2. 1. tétel korolláriumának feltétele teljesül.

Definiáljuk végül a $\xi^*(A)$ halmazfüggvényt a következőképpen:

$$\xi^*(A) = \xi_\nu(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_\nu, \ \nu < \omega_1.$$

Mivel $\sum\limits_{\nu} \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, ezáltal a $\xi^*(A)$ halmazfüggvényt $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ minden elemén értelmeztük. Világos, hogy $\xi^*(A)$ additív halmazfüggvény. $\xi^*(A)$ azonban teljesen additív is. Ez abból következik, hogy mint láttuk, a $\xi^*(A)$ valószínűségi változók $f^*(t, A)$ karakterisztikus függvényeire fennáll az $f^*(t, A) = g^*(t, A)$, $|t| \leq$ $\leq T$ reláció és így $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ minden nem növekvő, 0-hoz tartó A_n sorozatára

$$\lim_{n\to\infty} f^*(t, A_n) = \lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = 1, \text{ ha } |t| \leq T,$$

ami a 2. 1. tétel korolláriuma szerint maga után vonja azt, hogy $\xi^*(A)$ teljesen additív halmazfüggvény.

A kiterjesztés egyértelműsége következőképpen látható be. Legyen $\xi^*(A)$ és $\xi^{**}(A)$ két, az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, és tegyük fel, hogy

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{R}.$$

Jelölje $\mathfrak{M}$ azoknak az A halmazoknak az osztályát, amelyekre teljesül a $\xi^*(A) = \xi^{**}(A)$ egyenlőség. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{M}$ halmazosztály egy monoton sorozata. Mivel a ξ^* és ξ^{**} halmazfüggvények teljesen additívak, következik, hogy a $\xi^*(A_n)$, $\xi^{**}(A_n)$ sorozatok konvergensek és ha $A=\lim_{n\to\infty} A_n$, akkor

$$\xi^*(A)=\lim_{n\to\infty}\xi^*(A_n),\quad \xi^{**}(A)=\lim_{n\to\infty}\xi^{**}(A_n).$$

Ámde $\xi^*(A_n)=\xi^{**}(A_n)$, $n=1,2,\ldots$, tehát $\xi^*(A)=\xi^{**}(A)$, amiből következik, hogy $A\in\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ tehát monoton osztály és $\mathfrak{R}\subseteq\mathfrak{M}$. Mivel az $\mathfrak{R}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb monoton osztály megegyezik az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűvel, következik, hogy $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, vagyis

$$\xi^*(A)=\xi^{**}(A),\quad \text{ha}\quad A\in\mathfrak{S}(\mathfrak{R}).$$

Ezzel a 3. 1. tétel első részét bebizonyítottuk.

A TÉTEL MÁSODIK FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. A tétel második felének bizonyításához kimutatjuk, hogy akármilyen pozitív szám is T, a (3. 5) halmazfüggvényre teljesülnek a 1. 1. tétel feltételei. Az a) feltétel nyilvánvalóan teljesül, hiszen $f(t, A)$ karakterisztikus függvény és így

$$\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t,A)|\leqq 2.$$

Lássuk a b) feltételt. A 2. 7. tétel szerint t minden rögzített értékére az $|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény szubadditív. Ebből következik, hogy ha T rögzített pozitív szám, akkor a $\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény szintén szubadditív, tehát a b) feltétel is teljesül.

Végül a c) feltétellel kapcsolatban tekintsük az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű egy tetszőleges diszjunkt $A_1, A_2,\ldots$ halmazsorozatát. Mivel a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi(A_k)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, következik, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|x|\leqq 1}x^2dF(x,A_k),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{|x|\leqq 1}x\,dF(x,A_k)\right|,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(|\xi(A_k)|>1)$$

végtelen sorok konvergensek ([8], 5. §.) Ebből és az

$$|1-f(t,A_k)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-itx})\,dF(x,A_k)\right|=\left|\int_{|x|\leqq 1}+\int_{|x|>1}\right|\leqq$$

$$\leqq\left|\int_{|x|\leqq 1}(e^{itx}-1-itx)\,dF(x,A_k)\right|+|t|\left|\int_{|x|\leqq 1}x\,dF(x,A_k)\right|+2\mathbf{P}(|\xi(A_k)|>1)\leqq$$

$$\leqq\frac{t^2}{2}\int_{|x|\leqq 1}x^2dF(x,A_k)+|t|\left|\int_{|x|\leqq 1}x\,dF(x,A_k)\right|+2\mathbf{P}(|\xi(A_k)|>1)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy a c) feltétel is teljesül, tehát a (3. 6) halmazfüggvény korlátos variációjú. Ezzel a 3. 1. tételt bebizonyítottuk.

A következő tétel érvényességét a 3. 1. tétel bizonyításából is kiolvashatjuk, azonban ugyanezt a transzfinit indukciós konstrukció felhasználása nélkül, csupán a 3. 1. tétel második felének állítására támaszkodva is bebizonyíthatjuk. Erre a tételre a továbbiakban szükségünk lesz.

3. 2. TÉTEL. *Legyen* $\xi(A)$ *egy* $\mathfrak{S}$ σ*-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha* $A_1, A_2, \ldots$ *az* $\mathfrak{S}$ σ*-gyűrű egy konvergens halmazsorozata,* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, *akkor*

$$\xi(A_n) \Longrightarrow \xi(A), \quad ha \quad n \to \infty.$$

BIZONYÍTÁS. A 2. 7. tétel szerint az $|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény t minden rögzített értékére teljesen szubadditív. Ebből következik, hogy minden pozitív T-re a $\sup\limits_{|t|\leqq T}|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény is teljesen szubadditív. A 3. 1. tétel szerint a $\sup\limits_{|t|\leqq T}|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény korlátos variációjú is, tehát ha $W(T,A)$ jelenti ennek az $A\in\mathfrak{S}$ halmazban vett variációját akkor az 1. 2. tétel szerint $W(T,A)$ korlátos mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - A) = \lim\limits_{n\to\infty}(A-A_n)=0$, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} W(T,A_n-A) = \lim\limits_{n\to\infty} W(T,A-A_n) = 0$. A

$$\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t,B)| \leqq W(T,B), \quad B\in\mathfrak{S}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(t,A_n-A) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t,A-A_n) = 1$, ha $|t|\leqq T$. Mivel ez minden pozitív T-re igaz, következik, hogy

$$\xi(A-A_n) \Longrightarrow 0, \quad \xi(A_n-A) \Longrightarrow 0, \text{ ha } n\to\infty.$$

Ebből és a

$$|\xi(A_n)-\xi(A)| \leqq |\xi(A_n-A)| + |\xi(A-A_n)|$$

egyenlőtlenségből következik az, amit bizonyítani akartunk.

A kiterjeszthetőség feltételét igen szemléletesen fejezi ki a

3. 3. TÉTEL. *Legyen* $\xi(A)$ *egy* $\mathfrak{R}$ *gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha* $\mathfrak{R}$ *minden* $A_1, A_2, \ldots$ *diszjunkt halmazsorozatára a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

sor 1 *valószínűséggel konvergál, akkor* $\xi(A)$ *kiterjeszthető* $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$*-re.*

BIZONYÍTÁS. A 2. 7. têtel szerint $|1-f(t,A)|$ $(A\in\mathfrak{R})$ teljesen szubadditív halmazfüggvény. Feltételünkből következik, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1-f(t,A_k)| < \infty,$$

hiszen a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ sornak minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergálnia kell, ami maga után vonja az előbbi relációt (l. [4] 115. o. Theorem 2. 7 (III)). Mivel továbbá $|1-f(t,A)| \leqq 2$, az 1. 1 tétel szerint $|1-f(t,A)|$ minden rögzített t-re korlátos variációjú halmazfüggvény. Eszerint a 3. 1. tétel feltételei teljesülnek, ami tételünket is bizonyitja.

3. §. Kiterjesztési tétel eloszlásfüggvényekre vonatkozó feltétellel

A további tételekben a kiterjesztés elvégezhetőségére vonatkozó állítást úgy bizonyítjuk, hogy visszavezetjük a 3. 1. tételre. Ezért a kiterjesztés egyértelműségét nem szükséges újból kimondani.

3. 4. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha az $\{F(x,A), A \in \mathfrak{R}\}$ eloszlásfüggvény-halmaz kompakt, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, akkor az $\{F(x,A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt.

A TÉTEL ELSŐ FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Mivel az $\mathfrak{F}' = \{F(x, A_k),\ k = 1, 2, \ldots\}$ halmaz kompakt, az 1. 10. tétel szerint a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ sor 1 valószínűséggel konvergál. Ilyenformán állításunk a 3. 3. tételből közvetlenül következik.

A TÉTEL MÁSODIK FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Először bebizonyítjuk, hogy a $\mu_3(A)$, $A \in \mathfrak{S}$ halmazfüggvény teljesen szubadditív. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ egy diszjunkt halmazsorozat, $A_k \in \mathfrak{S}$, $k = 1, 2, \ldots$. A 2. 5. tételből következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \mu_3(A_k) + \mu_3\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

Csupán azt kell belátnunk tehát, hogy a jobboldal második tagja 0-hoz tart. Legyen $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$. A $\mu_3(A)$ halmazfüggvény monoton, tehát a $\mu_3(B_n)$ sorozat nem növekvő. A 2. 6. tétel szerint $\mu_3(A)$ csak a 0 és az 1 értékeket veheti fel, tehát két eset lehetséges: vagy van olyan N, hogy $\mu_3(B_n) = 0$, ha $n > N$, vagy $\mu_3(B_n) = 1$ n minden értékére. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az utóbbi eset áll fenn. Ekkor az 1. 4. tétel korolláriuma és a 2. 2. tétel szerint léteznek olyan $C_1, C_2, \ldots$ halmazok, hogy $C_k \in \mathfrak{S}, C_k \subseteq B_k$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, C_k\right)\right| > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Mivel $B_k \to 0$, következik, hogy $C_k \to 0$, és így a 3. 2. tétel szerint $\xi(C_k) \Longrightarrow 0$. Ebből azonban következik, hogy $Q\left(\frac{1}{2}, C_k\right) \to 0$, ami ellentmondás. Tehát $\mu_3(A)$ teljesen szubadditív.

A $\mu_3(A)$ halmazfüggvény monotonitásából következik, hogy fennáll a következő tulajdonság is: ha $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges, az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűhöz tartozó halmazok, akkor

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k).$$

Ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l\right) \quad (A_0 = 0),$$

tehát, mivel $\mu_3(A)$ teljesen szubadditív és monoton, következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3\left(A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k).$$

Tekintsük az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz nem kompakt. Ekkor az 1. 6. tétel szerint

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{A \in \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \varrho > 0.$$

Innen következik, hogy minden pozitív ε-ra

$$\sup_{A \in \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \varrho > 0.$$

Mivel

$$\sup_{A \in \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \sup_{A \in \mathfrak{S}} \sup_{B \in A\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > \varepsilon),$$

következik, hogy létezik olyan A_n $(A_n \in \mathfrak{S})$ halmazsorozat, amelyre

$$\sup_{B \in A_n \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geqq \frac{\varrho}{2} > 0.$$

Ha $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, akkor az előbbiek szerint

$$\sup_{B \in A\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geqq \sup_{B \in A_n \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geqq \frac{\varrho}{2} > 0,$$

tehát

$$\mu_3(A) = \lim_{n \to \infty} \sup_{B \in A\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geqq \frac{\varrho}{2} > 0.$$

A 2. 6. tétel szerint $\mu_3(A)$ csak a 0 és az 1 értéket veheti fel, tehát következik, hogy $\mu_3(A) = 1$.

Most bebizonyítjuk, hogy ha $B \in \mathfrak{S}$, $\mu_2(B)=1$, akkor minden λ, m számpárhoz található olyan $B_m \in B\mathfrak{S}$ halmaz, hogy a $Q(\lambda, B_m)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett

$$\mu_3(B_m)=1, \quad |Q(\lambda, B_m)| > m.$$

Tegyük fel, hogy ilyen B_m halmaz nem létezik. Mivel $\mu_3(B)=1$, találhatók olyan $C_k \in B\mathfrak{S}$, $k=1,2,\dots$ halmazok, hogy $|Q(\lambda, C_k)| > k$. Feltevésünk szerint $\mu_3(C_k)=0$, ha $k \geqq m$. Tekintsük a $C=\sum_{k=m}^{\infty} C_k$ halmazt. Az előbb bebizonyítottuk, hogy

$$\mu_3(C) \leqq \sum_{k=m}^{\infty} \mu_3(C_k),$$

tehát $\mu_3(C)=0$. Ekkor azonban az 1.6. és 1.5. tételek szerint létezik olyan $K(\lambda)$ szám, hogy a $Q(\lambda, C')$ kvantilisek tetszőleges megválasztása esetén

$$|Q(\lambda, C')| \leqq K(\lambda), \quad \text{ha } C' \in C\mathfrak{S},$$

ami ellentmondás.

Az előbb mondottakat a $B=A$ halmazra alkalmazva, válasszunk olyan $B_1 \in A\mathfrak{S}$ halmazt, amelyre $\mu_3(B_1)=1$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_1\right)\right| > 1$. Ugyanígy következik, hogy létezik olyan $B_2 \in B_1\mathfrak{S}$ halmaz, amelyre $\mu_3(B_2)=1$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_2\right)\right| > 2$, stb. Konstruálhatunk tehát olyan $B_1, B_2, \dots$ nem növekvő halmazsorozatot, amelyre $B_n \in \mathfrak{S}$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_n\right)\right| > n$. Ámde a $\xi(B_n)$ sorozat konvergens, mert

$$\xi(B_n) = \xi(B) + \sum_{k=n}^{\infty} (\xi(B_k) - \xi(B_{k+1})), \quad B = \prod_{k=1}^{\infty} B_k,$$

tehát a $Q\left(\frac{1}{2}, B_n\right)$ sorozat korlátos, ami ellentmondás. Ezzel a 3.4. tételt bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = 0,$$

akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, akkor

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{A \in \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Az állítás a 3.4. és 1.6. tételek közvetlen következménye.

4. §. Kiterjesztési tételek kvantilisekre vonatkozó feltételekkel

A következő tételek egyszerű alkalmazásai az előző §-ban bebizonyított tételeknek és a II. fejezet tételeinek. Ezek közül az első három a 3. 4. tétel feltétele enyhítésével foglalkozik.

A 3. 5. tétel megmutatja, hogy a valószínűségi változó-értékű, teljesen additív $\xi(A)$ halmazfüggvények kiterjesztésében mennyivel több feltételre van szükség, mint a közönséges, valós értékű halmazfüggvények esetében. Ha $\varphi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett valós-értékű, teljesen additív halmazfüggvény és

$$\xi(\omega, A) \equiv \varphi(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R},$$

akkor

$$Q(\lambda, A) \equiv \varphi(A), \text{ ha } 0 < \lambda < 1, A \in \mathfrak{R},$$

vagyis $\xi(\omega, A)$ minden kvantilise egybeesik a $\varphi(A)$ értékkel. Mivel pedig $\varphi(A)$ kiterjesztéséhez szükséges, hogy a $\{\varphi(A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos legyen, mondhatjuk, hogy a $\xi(A) = \varphi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető, ha van olyan λ, amelyre a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos.

Ha $\xi(A)$ nem konstans, akkor, mint a 3. 5. tétel állítja, a kiterjesztéshez két különböző λ-értékhez tartozó kvantilis-halmaz korlátosságát kell feltennünk.

3. 5. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha létezik olyan λ_1, λ_2 számpár: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A)$, $Q(\lambda_2, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$, $\{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmazok korlátosak, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a 1. 11. és a 3. 3. tételek közvetlen következménye.

3. 6. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha a $\xi(A), A \in \mathfrak{R}$ valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak és létezik olyan $\lambda \neq \frac{1}{2}$ $(0 < \lambda < 1)$ szám, hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

BIZONYÍTÁS. Mivel $\lambda \neq \frac{1}{2}$, következik, hogy $\lambda \neq 1 - \lambda$. Másrészt azonban $\xi(A)$ szimmetrikus eloszlású, tehát a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmazzal együtt a $\{Q(1-\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz is korlátos és így a 3. 5. tétel feltételei teljesülnek.

3. 7. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha a $\xi(A), A \in \mathfrak{R}$ valószínűségi változók nem-negatívak és van olyan λ $(0 < \lambda < 1)$, hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a 3. 5. és 2. 4. tételek közvetlen következménye.

5. §. További kiterjesztési tételek

3.8. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha van olyan pozitív ε, hogy a következő halmazfüggvények:*

$$(3.10) \qquad \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A), \quad \int_{|x|\leqq\varepsilon} x dF(x, A), \quad \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon), \; A \in \mathfrak{R}$$

korlátos variációjúak, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, akkor a (3.10) halmazfüggvények ($A \in \mathfrak{S}$) minden pozitív ε-ra korlátos variációjúak.

A TÉTEL ELSŐ FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Kimutatom, hogy az $|1-f(t, A)|$ halmazfüggvény t minden rögzített értéke mellett korlátos variációjú. Ugyanis, ha $\varepsilon > 0$, akkor

$$|1-f(t, A)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{itx}) dF(x, A) \right| \leqq \frac{t^2}{2} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A) + |t| \left| \int_{|x|\leqq\varepsilon} x dF(x, A) \right| +$$
$$+ 2\mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon), \quad A \in \mathfrak{R}.$$

A TÉTEL MÁSODIK FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. A 3.1. tétel szerint a (3.5) halmazfüggvény korlátos variációjú. Az (1.1.) egyenlőtlenség szerint ebből következik, hogy ha $0 < \varepsilon \leqq 1$, akkor az

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A), \quad A \in \mathfrak{S}$$

halmazfüggvény korlátos variációjú. Az (1.2.) egyenlőtlenségből következik, hogy a

$$\mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon), \quad A \in \mathfrak{S}$$

halmazfüggvény minden pozitív ε-ra korlátos variációjú. Mivel továbbá tetszőleges ε-ra fennáll, hogy

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A) \leqq \int_{|x|\leqq 1} x^2 dF(x, A) + \varepsilon^2 \mathbf{P}(|\xi(A)| > 1),$$

az előbb mondottak figyelembevételével azt kapjuk, hogy az

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A)$$

halmazfüggvény is minden pozitív ε-ra korlátos variációjú. Tekintsük a következő egyenlőséget:

$$f(t, A) - 1 = \int_{|x|\leqq\varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx) dF(x, A) +$$
$$+ it \int_{|x|\leqq\varepsilon} x dF(x, A) + \int_{|x|>\varepsilon} (e^{itx} - 1) dF(x, A).$$

Ha $t \neq 0$, akkor innen következik, hogy

$$\left| \int\limits_{|x| \leqq \varepsilon} x dF(x, A) \right| \leqq \frac{1}{|t|} |1-f(t, A)| + \frac{|t|}{2} \int\limits_{|x| \leqq \varepsilon} x^2 dF(x, A) + \frac{2}{|t|} P(|\xi(A)| > \varepsilon),$$

tehát a (3. 10) halmazfüggvények minden pozitív ε-ra korlátos variációjúak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3. 9. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha az*

$$1 - P_0(A) = 1 - \mathbf{P}(\xi(A) = 0)$$

halmazfüggvény korlátos variációjú, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.

BIZONYÍTÁS. A tétel az

$$|1 - f(t, A)| \leqq 2(1 - P_0(A))$$

egyenlőtlenség és a 3. 1. tétel közvetlen következménye.

3. 10. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha az*

$$\mathbf{M}(|\xi(A)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x, A), \quad A \in \mathfrak{R}$$

halmazfüggvény korlátos variációjú, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.

BIZONYÍTÁS. A tétel az

$$|1 - f(t, A)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x, A) \right| \leqq |t| \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x, A)$$

egyenlőtlenség és a 3. 1. tétel közvetlen következménye.

3. 11. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha az*

$$M(A) = \mathbf{M}(\xi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, A),$$

$$D^2(A) = \mathbf{D}^2(\xi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x, A) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, A) \right)^2$$

halmazfüggvények korlátosak, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.

BIZONYÍTÁS. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}(|\xi(A) - M(A)| > \varepsilon) \leqq \frac{D^2(A)}{\varepsilon^2}.$$

Ha tehát $|M(A)| \leqq M_1$, $D^2(A) \leqq D_1$, akkor

$$\mathbf{P}(|\xi(A)| > M_1 + \varepsilon) \leqq \mathbf{P}(|\xi(A) - M(A)| > \varepsilon) \leqq \frac{D^2(A)}{\varepsilon^2} \leqq \frac{D_1}{\varepsilon^2}.$$

Innen adódik, hogy

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \sup_{A\in R} \mathbf{P}(|\xi(A)| > M_1 + \varepsilon) = 0,$$

tehát az 1.6. tétel és a 3.4. tétel korolláriuma szerint a kiterjesztés elvégezhető.

MEGJEGYZÉS. Nem szükséges tehát, hogy az $M(A)$ és $D^2(A)$ halmazfüggvények teljesen additívak legyenek. A kiterjesztés már akkor is elvégezhető, ha csak korlátosak.

6. §. Algebrán értelmezett halmazfüggvény kiterjesztése

Abban az esetben, ha a $\xi(A)$ halmazfüggvény értelmezési tartománya algebra, a kiterjesztésre vonatkozó feltételek enyhíthetők. Erre vonatkoznak a következő tételek.

3.12. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha van olyan λ szám $(0 < \lambda < 1)$, hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a 2.2. és a 3.4. tétel korolláriumának közvetlen következménye.

3.13. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha a $\xi(A), A \in \mathfrak{R}$ valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

BIZONYÍTÁS. Mivel a $Q\left(\frac{1}{2}, A\right)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$, $A \in \mathfrak{R}$, az állítás a 3.11. tételből közvetlenül következik.

3.14. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha $\xi(A) \geqq 0, A \in \mathfrak{R}$, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re.*

BIZONYÍTÁS. A

$$\xi(H) = \xi(A) + \xi(\bar{A}), \quad A \in \mathfrak{R}$$

egyenlőségből következik, hogy $\xi(A) \leqq \xi(H)$. Innen következik, hogy

$$0 \leqq Q(\lambda, A) \leqq Q(\lambda, H) = K(\lambda),$$

tehát a 3.5. tétel szerint $\xi(A)$ kiterjeszthető.

Végül bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő

3. 15. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha létezik olyan pozitív q szám, hogy*

$$P_0(A) = \mathbf{P}(\xi(A) = 0) \geqq q,$$

akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $S(\mathfrak{R})$-re.

BIZONYÍTÁS. Feltétel szerint

$$\sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) \geqq 1 - q < 1, \quad \text{ha} \quad \varepsilon \leqq 0;$$

tehát következik, hogy

$$\mu_3 = \mu_3(H) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) < 1.$$

Mivel pedig a 2. 6. tétel szerint $\mu_3(H)$ csak a 0 vagy az 1 értéket veheti fel, következik, hogy $\mu_3(H) = 0$. Ilyen módon a tétel a 3. 4. tétel korolláriumából következik.

7. §. Az euklideszi tér esete

Gyakran előfordulnak olyan problémák, amelyekben arra van szükségünk, hogy az R_n tér korlátos Borel-halmazainak gyűrűjén legyen egy megadott tulajdonságú additív $\xi(A)$ halmazfüggvény. Ebben az esetben úgy járhatunk el, hogy felosztjuk az R_n teret megszámlálható sok olyan tégla egyesítésére, amelyeken belül a kiterjesztést el tudjuk végezni.

Jelen esetben H az n-dimenziós euklideszi tér: $H = R_n$, $\mathfrak{R}$ pedig az $a_k \leqq x_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ egyenlőtlenségek által meghatározott típusú téglák véges összegeiből álló gyűrű. Legyen $\xi(A)$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy H felosztható megszámlálható sok olyan $H_1, H_2, \ldots$ diszjunkt téglák összegére, melyek a végesben nem sűrűsödnek,* és $\xi(A)$ a H_k $\mathfrak{R}$ algebrákban kiterjeszthető. E feltételek mellett H minden korlátos B Borel-halmazához hozzárendelhető egy $\xi^*(B)$ valószínűségi változó oly módon, hogy az R_n tér korlátos Borel-halmazainak $\mathfrak{B}_1$ gyűrűjén ekként értelmezett $\xi^*(B)$ halmazfüggvény teljesen additív és

$$\xi^*(B) = \xi(B), \quad \text{ha} \quad B \in \mathfrak{R}.$$

A kiterjesztés egyértelmű, vagyis ha $\xi^{**}(B)$ a $\mathfrak{B}_1$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény és

$$\xi^*(B) = \xi^{**}(B), \quad \text{ha} \quad B \in \mathfrak{R},$$

akkor

$$\xi^*(B) = \xi^{**}(B), \quad \text{ha} \quad B \in \mathfrak{B}_1.$$

* Minden korlátos tartomány lefedhető véges sok tégla segítségével.

Ezt igen egyszerűen beláthatjuk. Először végezzük el a kiterjesztést a H_k halmazokon belül. Ha $B \in \mathfrak{B}_1$, akkor van olyan N, hogy $B \subseteq \sum_{k=1}^{N} H_k$. Legyen

$$\xi^*(B) = \sum_{k=1}^{N} \xi^*(BH_k).$$

Nyilvánvaló, hogy $\xi^*(B)$ teljesen additív a $\mathfrak{B}_2$ gyűrűn és $\mathfrak{R}$ elemein megegyezik $\xi(B)$-vel. Ugyancsak egyszerűen belátható az egyértelműségre vonatkozó állítás is.

Az előzőek alapján, a 3. 12. és 3. 13. tételek felhasználásával közvetlenül adódik, hogy ha $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}_1$ és $\xi(A)$ ugyanazt jelentik, mint az előbb és minden $A \in \mathfrak{R}$ halmazra $\xi(A)$ szimmetrikus eloszlású, vagy minden $A \in \mathfrak{R}$ halmazra $\xi(A) \geqq 0$, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető a $\mathfrak{B}_1$ gyűrűre.

A következő tételben a valószínűségi változók közé soroljuk azokat a $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ függvényeket is, amelyek mérhetők, de esetleg pozitív valószínűséggel végtelen értéket vesznek fel.

3. 16. TÉTEL. *Jelentse $\mathfrak{R}$ ugyanazt, mint a* 3. 15. *tételben. $\mathfrak{B}$ legyen az R_n tér Borel-halmazainak σ-algebrája, $\xi(A)$ pedig egy $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett, olyan teljesen additív halmazfüggvény, melyre*

$$0 \leqq \xi(A) < \infty, A \in \mathfrak{R}.$$

E feltételek mellett $\xi(A)$ $\mathfrak{B}$ minden elemére kiterjeszthető, és a kiterjesztés egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Először a jelen § elején mondottaknak megfelelően végezzük el $\xi(A)$ kiterjesztését a $\mathfrak{B}_1$ gyűrűre. Ha most B nem korlátos Borel-halmaz és $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, ahol a B_k halmazok korlátos, diszjunkt Borel-halmazok, akkor legyen

$$\xi^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k).$$

Ez a hozzárendelés egyértelmű, mert ha $C_1, C_2, \ldots$ egy olyan korlátos, diszjunkt Borel-halmazokból álló sorozat, melyre $B = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$, akkor mivel,

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} B_n C_k, \qquad C_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_k B_n,$$

következik, hogy

$$\xi^*(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_n C_k), \qquad \xi^*(C_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_k B_n),$$

és így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_n C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_k B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(C_k).$$

$\xi^*(B)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ugyanis a konstrukcióból nyilvánvaló, hogy ha a $B_1, B_2, \ldots, B_r$ halmazok páronként idegenek, akkor a $\xi^*(B_1), \xi^*(B_2), \ldots, \xi^*(B_r)$ valószínűségi változók függetlenek. Ha $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, ahol B_k diszjunkt Borel-halmazokból álló sorozat, akkor konstruáljunk olyan korlátos Borel-halmazokból álló $\{C_{kn}\}$ sorozatokat, melyekre teljesül, hogy

$$B_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}, \quad C_{kn} C_{km} = 0, \quad \text{ha} \quad n \neq m, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tudjuk, hogy

$$\xi^*(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_{kn}),$$

tehát $\xi^*(B)$ definíciójának egyértelműségéből következik, hogy

$$\xi^*(B) = \sum_{k,n} \xi^*(C_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k).$$

Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

1. MEGJEGYZÉS. A $\xi^*(B)$, $B \in \mathfrak{B}_1$ valószínűségi változók vagy 1 valószínűséggel véges, vagy 1 valószínűséggel végtelen értékűek. Ha ugyanis $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, ahol $B_k \in \mathfrak{B}_1, k = 1, 2, \ldots, B_i B_k = 0$, ha $i \neq k$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k)$ sor összege véges legyen, vagy 0 vagy 1 ([8]., 60. o.).

2. MEGJEGYZÉS. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ halmazfüggvény homogén, vagyis $\xi(A)$ eloszlása csak az A halmaz mértékétől függ, de nem függ annak helyzetétől. Ebben az esetben, ahhoz, hogy $\xi^*(B) < \infty$, szükséges és elegendő, hogy $|B| < \infty$.

Ha ugyanis $|B| < \infty$ és B_k egy olyan korlátos, diszjunkt Borel-halmazokból álló sorozat, melyre $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, akkor létezik olyan A korlátos Borel-halmaz és olyan diszjunkt Borel-halmazokból álló A_k sorozat, hogy $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, $|B_k| = |A_k|$, $k = 1, 2, \ldots$. Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, B_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, A_k)| < \infty,$$

következik, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)$ sor összege 1 valószínűséggel véges, tehát $\xi^*(B)<\infty$. Ha pedig $|B|=\infty$, akkor legyenek $B_1, B_2, \ldots$ olyan diszjunkt Borel-halmazok, hogy $B=\sum_{k=1}^{\infty}B_k$, $|B_k|=1$. Ebben az esetben

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-f(t,B_k)|=|1-f(t,B_1)|+|1-f(t,B_2)|+\cdots=\infty,$$

tehát a $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)$ sor nem konvergens. Ekkor azonban a 0 vagy 1 tétel szerint 1 annak a valószínűsége, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)=\xi^*(B)=\infty,$$

amivel az állítást bebizonyítottuk.

IV. FEJEZET

σ-GYŰRŰN ÉRTELMEZETT, TELJESEN ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

1. §. Korlátos variációjú halmazfüggvények

A III. fejezetben láttuk, hogy ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, akkor minden pozitív T-re és ε-ra a

$$\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t,A)|,\quad \int_{|x|\leqq\varepsilon}x^2dF(x,A),\quad \int_{|x|\leqq\varepsilon}xdF(x,A),\quad \mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon)$$

halmazfüggvények korlátos variációjúak. Erre támaszkodva bebizonyítjuk a következő két tételt.

4.1. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, $g(x)$ pedig egy olyan polinom, melyre $g(0)=0$. Ha az $[a,b]$ intervallumnak a 0 pont nem határpontja, akkor az*

$$\int_{a\leqq x\leqq b}g(x)dF(x,A)$$

halmazfüggvény korlátos variációjú.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, elég azt bebizonyítanunk, hogy az

$$\int_{a\leqq x\leqq b}xdF(x,A),\quad \int_{a\leqq x\leqq b}|x|^kdF(x,A),\quad k\geqq 2$$

halmazfüggvények korlátos variációjúak. Legyen $c_1 = \min(|a|, |b|)$, $c_2 = \max(|a|, |b|)$. Ha $a < 0 < b$, akkor

$$\Big| \int_{a \le x \le b} x dF(x, A) \Big| \le \Big| \int_{|x| \le c_1} x dF(x, A) \Big| + c_2 \mathbf{P}(|\xi(A)|) > c_1),$$

$$\int_{a \le x \le b} |x|^k dF(x, A) \le \int_{|x| \le 1} x^2 dF(x, A) + c_2^k \mathbf{P}(|\xi(A)| > 1),$$

ha pedig $b < 0$, vagy $a > 0$, akkor

$$\Big| \int_{a \le x \le b} x dF(x, A) \Big| \le \int_{a \le x \le b} |x| dF(x, A) \le c_2 \mathbf{P}(|\xi(A)| \ge c_1),$$

$$\int_{a \le x \le b} |x|^k dF(x, A) \le c_2^k \mathbf{P}(|\xi(A)| \ge c_1),$$

tehát állításunk igaz.

MEGJEGYZÉS. Az V. fejezetben látunk arra példát, hogy az

$$\int_{|x| \le \varepsilon} |x| dF(x, A)$$

halmazfüggvény nem mindig korlátos variációjú.

4. 2. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, $h(x)$ pedig egy olyan Borel szerint mérhető függvény, amelyre*

$$|h(x)| \le C, \; h(x) = O(x^2), \quad ha \quad x \to 0.$$

E feltételekből következik, hogy az

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x, A)$$

halmazfüggvény korlátos variációjú.

BIZONYÍTÁS. Feltevés szerint van olyan pozitív ε szám és olyan K állandó, hogy $|h(x)| \le Kx^2$, ha $|x| \le \varepsilon$. Ennek alapján azt kapjuk, hogy

$$\Big| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x, A) \Big| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dF(x, A) \le K \int_{|x| \le \varepsilon} x^2 dF(x, A) + C\mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon),$$

tehát mivel a jobboldalon korlátos variációjú halmazfüggvények állnak, állításunkat bebizonyítottuk.

2. §. Egy további konvergenciatétel

Ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény és $A_n \in \mathfrak{S}$ egy konvergens halmazsorozat, $\lim_{n \to \infty} A_n = A$, akkor a 3. 2. tétel szerint a valószínűségi változókból álló $\xi(A_n)$ sorozat sztochasztikusan konvergál a $\xi(A)$ valószínűségi változóhoz. Ha az A_n sorozat monoton, akkor a teljes additivitásból következik, hogy fennáll az erősebb

$$\lim_{n\to\infty} \xi(A_n) = \xi(A)$$

reláció is.

A következő tételben a $\xi(A)$ halmazfüggvényről nem tesszük fel, hogy diszjunkt halmazokhoz független valószínűségi változók tartoznak. Mivel csak nem-negatív értékű valószínűségi változókat engedünk meg $\xi(A)$ értékkészletében, a tétel ugyanúgy bizonyítható, mint a közönséges mértékekre vonatkozó megfelelő tétel.

4. 3. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{S}$ egy σ-gyűrű. $\mathfrak{S}$ minden A eleméhez tartozzék egy $\xi(A)$ nem-negatív valószínűségi változó oly módon, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ $\mathfrak{S}$ egy diszjunkt halmazsorozata, akkor*

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k). \tag{4. 1}$$

Ebben az esetben a $\xi(A)$ halmazfüggvény rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $B_1, B_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű egy konvergens sorozata, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \xi(B_n) = \xi(B).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$C_n = B_n B_{n+1}, \ldots, \quad D_n = B_n + B_{n+1} + \cdots.$$

Mivel

$$C_n \subseteq B_n \subseteq D_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

következik, hogy

$$\xi(C_n) \leqq \xi(B_n) \leqq \xi(D_n), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4. 2}$$

Másrészt

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

és így a (4. 1) relációból következik, hogy a monoton C_n és D_n sorozatokra teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \xi(C_n) = \lim_{n\to\infty} \xi(D_n) = \xi(B). \tag{4. 3}$$

(4. 2)-ből és (4. 3)-ból következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \xi(B_n) = \xi(B)$$

és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Arra vonatkozólag, hogy egy σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív $\xi(A)$ halmazfüggvényre vonatkozólag mindig érvényes-e a

$$\xi(A_n) \to \xi(A), \quad \text{ha} \quad A_n \to A, \; A_n \in \mathfrak{S}$$

reláció, nem tudok végleges választ adni. Bizonyos esetben azonban pozitív és negatív értéket egyaránt felvevő $\xi(A)$ halmazfüggvényre is fennáll ez az erősebb konvergencia. Ezzel egy további dolgozatban kívánok foglalkozni.

3. §. Folytonos és teljes halmazfüggvények

Legyen $\mathfrak{S}$ egy H halmaz bizonyos részhalmazaiból alkotott σ-gyűrű. Tegyük fel, hogy H elemei hozzátartoznak $\mathfrak{S}$-hez. Egy, az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt folytonosnak nevezünk, ha a H halmaz minden h elemére teljesül, hogy

$$\xi(h) = 0.$$

A $\xi(A)$ halmazfüggvényt tisztán diszkontinuusnak nevezzük, ha létezik olyan nem üres megszámlálható $H_1 \subseteq H$ halmaz, hogy

$$\xi(A) = 0, \quad \text{ha} \quad A \in H - H_1,$$
$$\xi(h) \neq 0, \quad \text{ha} \quad h \in H_1.$$

Ha $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény és $\xi(h) \neq 0$, ahol $h \in H$, akkor a h pontot $\xi(A)$ diszkontinuitási pontjának nevezzük. A valós értékű halmazfüggvények elméletében ismeretes, hogy minden diszkontinuitással rendelkező teljesen additív halmazfüggvény felbontható egy folytonos és egy tisztán diszkontinuus halmazfüggvény összegére. Hasonló felbontás itt is elvégezhető. Mielőtt erre rátérnénk, bebizonyítjuk a következő tételt:

4. 4. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha T rögzített pozitív szám, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény abszolút folytonos a $W(T, A)$* mértékre nézve, azaz*

$$\xi(A) = 0, \quad \textit{ha} \quad W(T, A) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel

$$|1 - f(t, A)| \leqq W(T, A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{S},$$

következik, hogy

$$f(t, A) = 1, \quad \text{ha} \quad |t| \leqq T.$$

Ebből az (1. 3) egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$f(t, A) \equiv 1,$$

amit bizonyítani akartunk.

* Lásd 318. o.

Ezután bebizonyítjuk, hogy fennáll a

4.5. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy H elemei hozzátartoznak $\mathfrak{S}$-hez és $\xi(A)$-nak van diszkontinuitási pontja. Ebben az esetben léteznek olyan $\xi'(A), \xi''(A)$ folytonos, illetve tisztán diszkontinuus, teljesen additív halmazfüggvények, hogy*

$$\xi(A) = \xi'(A) + \xi''(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{S}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen T rögzített pozitív szám. $W(T,A)$ véges mérték, tehát létezik egy olyan H_1 megszámlálható halmaz, hogy

$$W(T,h) = 0, \text{ ha } h \in H - H_1.$$

Mivel $\xi(A)$ abszolút folytonos a $W(T,A)$ mértékre nézve, következik, hogy

$$\xi(h) = 0, \text{ ha } h \in H - H_1.$$

Innen a tétel triviálisan következik.

Ugyanúgy, mint a közönséges halmazfüggvények esetében, bevezethetjük itt is a teljesség fogalmát. A definíció teljesen hasonló a [6] 34. oldalán található definícióhoz, ezért ezt nem részletezem. A 4.5. tétel figyelembevételével az is könnyen belátható, hogy a teljessé tétel processzusa is minden nehézség nélkül átvihető.

V. FEJEZET

PÉLDÁK

1. *Poisson-halmazfüggvény.* Jelöljön $M(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, valós értékű, véges, nem-negatív, additív halmazfüggvényt. Legyen továbbá $\xi(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ additív halmazfüggvény. Ha

$$\mathbf{P}(\xi(A) = k) = \frac{M^k(A)}{k!} e^{-M(A)}, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvényt Poisson-típusúnak nevezzük. $\xi(A)$ karakterisztikus függvénye ebben az esetben a következő alakú:

$$f(t, A) = e^{M(A)(e^{it}-1)}.$$

Ha az $M(A)$ halmazfüggvény teljesen additív (más szóval, $M(A)$ mérték), akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény is az. Ugyanis legyen $A_1, A_2, \ldots$ egy $\mathfrak{R}$ elemeiből álló, nem növekvő halmazsorozat, $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, akkor az

$$|1 - f(t,A)| \leqq M(A)|t|e^{M(A)|t|} \tag{5.1}$$

és a $\lim_{n\to\infty} M(A_n) = 0$ relációból következik, hogy

$$f(t, A_n) \Longrightarrow 1, \text{ ha } n \to \infty,$$

tehát a 2.1 tétel szerint $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ha az $M(A)$ mérték korlátos, akkor (5.1) szerint az $|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény korlátos variációjú, tehát $\xi(A)$ kiterjeszthető. Speciálisan, ha $H=R_1, M(A)=c|A|$, ahol c állandó, megkapjuk a közönséges homogén Poisson-folyamat differenciái által származtatott halmazfüggvényt.

2. *Összetett Poisson-halmazfüggvény.* Legyen $M_1(A), M_2(A), \ldots$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett valós értékű, nem-negatív, additív halmazfüggvények egy sorozata. Az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív $\xi(A)$ halmazfüggvényt összetett Poisson-típusúnak nevezzük, ha $\xi(A)$ karakterisztikus függvénye a következő alakú:

$$f(t,A)=\exp\sum_{k=1}^{\infty}M_k(A)(e^{i\lambda_k t}-1), \tag{5.2}$$

ahol a $\{\lambda_k\}$ halmaz a $\xi(A), A\in\mathfrak{R}$ valószínűségi változók lehetséges értékeinek összessége és

$$\sum_{k=1}^{\infty}M_k(A)<\infty, \quad \text{ha} \quad A\in\mathfrak{R}.$$

Ha

$$M(A)=\sum_{k=1}^{\infty}M_k(A), A\in\mathfrak{R}$$

véges mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn, akkor ugyanúgy, mint a Poisson-halmazfüggvények esetében, belátható, hogy $\xi(A)$ teljesen additív. Ha még azt is feltesszük, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|M_k(A)<\infty, A\in\mathfrak{R} \tag{5.3}$$

és az (5.3) összeg korlátos mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn, akkor az (5.2) relációból azt kapjuk, hogy

$$|1-f(t,A)|=\left|\prod_{k=1}^{\infty}e^{M_k(A)\,(e^{i\lambda_k t}-1)}-1\right|\leqq$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{M_k(A)\,(e^{i\lambda_k t}-1)}-1\right|\leqq$$

$$\leqq|t|\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|M_k(A)e^{|\lambda_k t|M_k(A)}\leqq L(t)\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|M_k(A),$$

ahol

$$L(t)=\max_k e^{|\lambda_k t|M_k(A)},$$

tehát $|1-f(t,A)|$ t minden rögzített értékére korlátos variációjú és így $\xi(A)$ kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre.

Könnyen belátható, hogy ha az $\mathfrak{R}$ gyűrű az R_n tér részhalmazai bizonyos összessége és $\xi(A)$ eloszlása csak az A halmaz $|A|$ mértékétől függ, akkor

$$M_k(A) = C_k|A|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ahol C_k állandó.

3. *Laplace—Gauss-halmazfüggvény.* Így nevezem azt az additív $\xi(A)$ halmazfüggvényt, melyre

$$f(t,A) = e^{itM(A) - D^2(A)\frac{t^2}{2}}, \quad A \in \mathfrak{R},$$

ahol $M(A)$ és $D^2(A)$ valós értékű, additív halmazfüggvények, $D^2(A) \geqq 0$, $A \in \mathfrak{R}$. Ha mindkét halmazfüggvény teljesen additív, akkor a 2. 1. tétel figyelembevételével következik, hogy $\xi(A)$ is az. Ha az $M(A)$ és $D^2(A)$ halmazfüggvények korlátosak is, akkor az

$$|1-f(t,A)| \leqq |1-e^{itM(A)}| + |1-e^{-D^2(A)\frac{t^2}{2}}| \leqq |t|M(A) + D^2(A)\frac{t^2}{2}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy t minden rögzített értéke mellett az $|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény korlátos variációjú, tehát $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re. Ha $\mathfrak{R}$ az R_n tér bizonyos részhalmazainak összessége és $\xi(A)$ eloszlása csak $|A|$-tól függ, akkor könnyen belátható, hogy

$$M(A) = M|A|, \quad D^2(A) = D^2|A|,$$

ahol M és D^2 állandók. Speciálisan, ha $n = 1$, akkor $\xi(A)$ nem más, mint a közönséges Brown-mozgás folyamat differenciái által származtatott halmazfüggvény.

4. Jelöljük $f_n(x)$-szel az n-edik Rademacher-függvényt:

$$f_n(x) = \operatorname{sgn} \sin 2^n \pi x, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Legyen a $[0, 1]$ intervallum az elemi események Ω tere és a lehetséges események legyenek a $[0, 1]$ intervallum LEBESGUE-szerint mérhető halmazai. Ekkor az $\{f_n(x)\}$ függvények független valószínűségi változók. Tekintsük a

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

valószínűségi változókat. Mivel

$$\mathbf{M}(g_n(x)) = 0, \quad \mathbf{D}^2(g_n(x)) = \frac{1}{n^2},$$

következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ha A a természetes számok egy halmaza, akkor a

$$\sum_{n\in A} g_n(x)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál ugyanahhoz a határfüggvényhez, továbbá a

$$g(x,A)=\sum_{n\in A} g_n(x)$$

halmazfüggvény teljesen additív a természetes számok H halmaza összes részhalmazainak $\mathfrak{S}$ σ-algebráján ([4] 118. o. Corollary 1.) A $g(x,A)$ halmazfüggvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a)
$$P\left(|g_n(x)|=\frac{1}{n}\right)=1,$$

tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$$

sor divergál. Ebből következik, hogy a $g(x,A)$ halmazfüggvényt nem lehet felbontani oly módon, hogy

$$g(x,A)=g^+(x,A)-g^-(x,A),$$

ahol $g^+(x,A)$ és $g^-(x,A)$ teljesen additív, nem-negatív halmazfüggvények, mert ha ilyen felbontás lehetséges volna, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|\leqq g^+(x,H)+g^-(x,H)$$

egyenlőtlenségből következnék, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ sor abszolút konvergens.*

b) Mivel minden pozitív ε-ra fennáll, hogy

$$M(|g_n(x)|)=\int_{|x|\leqq\varepsilon}|x|\,dF(x,n),\quad \text{ha } n\geqq\frac{1}{\varepsilon},$$

* Az előbbi egyenlőtlenségből látható, hogy $g(x,A)$ még úgy sem bontható fel nemnegatív $g^+(x,A)$, $g^-(x,A)$ halmazfüggvények különbségére, hogy az utóbbiaktól nem kívánjuk meg a 2. definícióban előírt függetlenségi feltevést, hanem csak a

$$g^+(x,A)=\sum_{k=1}^{\infty}g^+(x,A_k),\quad g^-(x,A)=\sum_{k=1}^{\infty}g^-(x,A_k)$$

relációkat, ahol $A_1, A_2, \ldots$ $\mathfrak{S}$ egy diszjunkt halmazsorozata és $A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$.

az a) tulajdonságból következik, hogy az

$$\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|\,dF(x,A)$$

halmazfüggvény nem korlátos variációjú.

IRODALOM

[1] A. Blanc—Lapierre, R. Fortet, Sur les répartitions de Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **240** (1955), 1045—1046.

[2] S. Bochner, Stochastic processes, *Ann. Math.*, **48** (1947), 1014—1061.

[3] H. Cramér, A contribution to the theory of stochastic processes, *Proc. Sec. Berkeley Symp*, *Berkeley and Los Angeles*, 1951, 329—340.

[4] J. L. Doob, Stochastic processes (*New-York, London*, 1953).

[5] B. V. Gnyegyenko, A. N. Kolmogorov, Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai (Magyar fordítás, Budapest, 1951).

[6] H. Hahn, A. Rosenthal, Set functions (*New-Mexico*, 1948).

[7] E. Hopf, Ergodentheorie (*Berlin*, 1937).

[8] A. N. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Berlin*, 1933).

[9] E. Marczewski, Remarks on the Poisson stochastic process (II), *Studia Mathematica* **13** (1953), 130—136.

[10] Prékopa A., Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról, MTA III. Oszt. Közl., **6** (1956), 191—198.

[11] Prékopa A., Banach-algebrából vett értékű multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése, MTA III. Oszt. Közl., **6** (1956), 339—351.

[12] C. Ryll—Nardzewski, On the non-homogeneous Poisson process (I), *Studia Math.* **14** (1953), 124—128.

BANACH-ALGEBRÁBÓL VETT ÉRTÉKŰ MULTIPLIKATÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK KITERJESZTÉSE

PRÉKOPA ANDRÁS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1956. április 27-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen X egy adott halmaz és $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ az X halmaz bizonyos részhalmazaiból alkotott halmazosztályok. Az $\mathfrak{R}$ halmazosztályt gyűrűnek nevezzük, ha $A+B \in \mathfrak{R}$, $A-B \in \mathfrak{R}$, feltéve, hogy $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$. Az $\mathfrak{S}$ halmazosztályt σ-gyűrűnek nevezzük, ha $\mathfrak{S}$ gyűrű és minden olyan $A_1, A_2, \ldots$ halmazsorozatra, melyre $A_k \in \mathfrak{S}$, $k=1,2,\ldots$, teljesül, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}$.

Legyen $\mathfrak{B}$ kommutatív, egységelemes Banach-algebra, tehát olyan Banach-tér, amelynek minden f, g elempárjához tartozik egy fg szorzat oly módon, hogy, ha $h \in \mathfrak{B}$, akkor $(fg)h = f(gh)$, $(f+g)h = fh+gh$, $fg = gf$, $\|fg\| \leqq \leqq \|f\| \, \|g\|$, továbbá létezik olyan $e \in \mathfrak{B}$, hogy az $ef = fe = f$ reláció $\mathfrak{B}$ minden f elemére teljesül és $\|e\| = 1$.

A vizsgálat tárgyát olyan $f(A)$ halmazfüggvény képezi, melynek értelmezési tartománya egy $\mathfrak{R}(A, B, \ldots)$ gyűrű, értékei pedig a $\mathfrak{B}$ Banach-algebrában vannak: $f(A) \in \mathfrak{B}$, ha $A \in \mathfrak{R}$.

Egy valós értékű $\alpha(A)$ halmazfüggvényt korlátos variációjúnak nevezünk, ha van olyan K szám, hogy $\mathfrak{R}$ minden $A_1, A_2, \ldots, A_r$ véges, diszjunkt halmazsorozatára teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} |\alpha(A_i)| \leq K.$$

Legyen $g_1, g_2, \ldots$ a $\mathfrak{B}$ Banach-algebra egy sorozata. Akkor mondom, hogy a $\prod_{i=1}^{\infty} g_i$ szorzat konvergens, ha a $g_1, g_2, \ldots$ elemek között csak véges sok 0 elem van és ha $g_i \neq 0$, $i = n_0, n_0+1, \ldots$, akkor van olyan $g_0 \in \mathfrak{B}$, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left\| g_0 - \prod_{i=n_0}^{n} g_i \right\| = 0.$$

Ha $n_0 = 1$, akkor legyen g_0 a végtelen szorzat értéke, ha pedig $n_0 > 1$, akkor legyen

$$\prod_{i=1}^{\infty} g_i = \left(\prod_{i=1}^{n_0-1} g_i \right) g_0.$$

Egy $f(A)$ halmazfüggvényt multiplikatívnak (teljesen multiplikatívnak) nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ minden A_1, A_2 diszjunkt halmazpárjára $\left(A_1, A_2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}\right.$, diszjunkt halmazsorozatára$\left.\right)$ teljesül, hogy

$$f(A_1+A_2)=f(A_1)f(A_2) \quad \left(f\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty} f(A_k)\right). \tag{1}$$

Ebben az esetben $f(0)$ legyen definíció szerint a $\mathfrak{B}$ Banach-algebra egységeleme: $f(0)=e$.

Egy $\mu(A)$ valós értékű halmazfüggvényt szubadditívnak (teljesen szubadditívnak) nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ minden A_1, A_2 diszjunkt halmazpárjára $\left(A_1, A_2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}\right.$, diszjunkt halmazsorozatára$\left.\right)$ teljesül, hogy

$$\mu(A_1+A_2) \leqq \mu(A_1)+\mu(A_2) \quad \left(\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\right).$$

A dolgozat célja egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény kiterjesztése az $\mathfrak{R}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre.

1. §. Előzetes lemmák

1. LEMMA. *Legyen μ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett nem-negatív, korlátos variációjú, teljesen szubadditív halmazfüggvény. Legyen*

$$\mathrm{Var}_\mu(A) = \sup_{\{A_k\}} \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k), \quad A \in \mathfrak{R},$$

ahol $A_1, A_2, \ldots, A_r$ az $A\mathfrak{R}$[1] *gyűrű diszjunkt halmazrendszere. A* $\mathrm{Var}_\mu(A)$ *halmazfüggvény korlátos mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn.*[2]

BIZONYÍTÁS. Legyen $B_1, B_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy olyan diszjunkt halmazsorozata, melyre $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathfrak{R}$. Válasszunk olyan $A_1, A_2, \ldots, A_r$ diszjunkt

[1] Ha $A \in \mathfrak{R}$, $A\mathfrak{R}$ azt a gyűrűt jelenti, melynek elemei az A halmaznak az $\mathfrak{R}$ gyűrűhöz tartozó részhalmazai.

[2] Egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett valós értékű, nem-negatív m halmazfüggvényt mértéknek nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ minden $B_1, B_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára, melyre $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathfrak{R}$, teljesül, hogy $m(B) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ és $m(0)=0$.

halmazokat, amelyek elemei a $B\mathfrak{R}$ gyűrűnek és

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i) + \varepsilon,$$

ahol ε előre megadott tetszőleges kis pozitív szám. Abból, hogy a $\mu(A)$ halmazfüggvény teljesen szubadditív, következik, hogy

$$\mu(A_i) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i B_k), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i B_k) + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i B_k) + \varepsilon \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k) + \varepsilon.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden pozitív ε-ra teljesül, következik, hogy

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k).$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k),$$

tehát ezzel az 1. lemmát bebizonyítottuk.

2. LEMMA. *Legyen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ és $g_1, g_2, \ldots, g_r$ egy tetszőleges Banach-algebra két olyan véges sorozata, hogy*

$$\left\| \prod_{i=1}^{l} f_i \right\| \leqq K, \quad \left\| \prod_{i=l}^{r} g_i \right\| \leqq K, \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

ahol K állandó. Ekkor

$$\left\| \prod_{i=1}^{r} f_i - \prod_{i=1}^{r} g_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=1}^{r} \|f_i - g_i\|.$$

BIZONYÍTÁS. Kiindulva a

$$\prod_{i=1}^{r} f_i - \prod_{i=1}^{r} g_i = \sum_{i=1}^{r} f_1 \ldots f_{i-1}(f_i - g_i) g_{i+1} \ldots g_r$$

azonosságból és mindkét oldal normáját véve, megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

3. LEMMA. *Legyen $f_1, f_2, \ldots$ a $\mathfrak{B}$ kommutatív, egységelemes Banach-algebra elemeiből álló sorozat. Ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f_k\| < \infty,$$

akkor a

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k$$

végtelen szorzat konvergens és a szorzat független a tényezők sorrendjétől.

BIZONYÍTÁS. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1-\|f_k\|| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|e-f_k\|$$

egyenlőtlenségből következik, hogy van olyan n_0, hogy $\|f_k\| > 0$, ha $k \geqq n_0$, és a pozitív tényezőkből álló

$$\prod_{k=n_0}^{\infty} \|f_k\|$$

végtelen szorzat abszolút konvergens. Legyen

$$K = \prod_{k=n_0}^{\infty} (1+|1-\|f_k\||).$$

A 2. lemma szerint minden m, n számpárra ($m \geqq n_0$, $n \geqq n_0$) azt kapjuk, hogy

$$\left\| \prod_{i=n_0}^{m} f_i - \prod_{i=n_0}^{n} f_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \|e-f_i\|.$$

Figyelembe véve feltételünket, azt kapjuk, hogy van olyan $f_0 \in \mathfrak{B}$, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_0 - \prod_{i=n_0}^{n} f_i \right\| = 0.$$

Ha $i_1, i_2, \ldots$ az $n_0, n_0+1, \ldots$ sorozat egy átrendezett sorozata, és N_n olyan nagy szám, hogy az $A_n = \{n_0, n_0+1, \ldots, N_n\}$ halmaz tartalmazza az $I_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ halmazt, akkor

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} f_{i_k} - \prod_{k=n_0}^{N_n} f_k \right\| \leqq K^2 \sum_{k \in A_n - I_n} \|e-f_k\|.$$

Ez az egyenlőtlenség maga után vonja azt, hogy $\prod_{k=1}^{\infty} f_{i_k} = f_0$, amiből következik, hogy a szorzat értéke független a tényezők sorrendjétől.

4. LEMMA. *Legyen $\mu(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett olyan valós értékű, nem-negatív, szubadditív halmazfüggvény, melyre teljesül a következő két feltétel:*

a) $\mu(A) \leqq K$, $A \in \mathfrak{R}$, ahol K állandó;

b) ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű diszjunkt halmazsorozata, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

Ebben az esetben a $\mu(A)$ halmazfüggvény korlátos variációjú.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\mu(A)$ nem korlátos variációjú. Válasszunk olyan $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{k_1}^{(1)}$ $(k_1 > 1)$ $\mathfrak{R}$-beli diszjunkt halmazokat, hogy

$$\sum_{l=1}^{k_1} \mu(B_l^{(1)}) \leqq 2K.$$

Mivel a $\mu(A)$ halmazfüggvény szubadditív, következik, hogy a $\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}$ és $\overline{\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}}$ halmazok közül legalább az egyikben nem korlátos variációjú. Ha a $\overline{\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}}$ halmaz rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor találhatók benne olyan $B_{k_1+1}^{(1)}, B_{k_1+2}^{(1)}, \ldots, B_{k_2}^{(1)}$ $\mathfrak{R}$-beli diszjunkt halmazok, hogy

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} \mu(B_l^{(1)}) \geqq K.$$

Ugyanúgy, mint az előbb, belátható, hogy a $\mu(A)$ halmazfüggvény a $\sum_{l=1}^{k_2} B_l^{(1)}$ és $\overline{\sum_{l=1}^{k_2} B_l^{(1)}}$ halmazok közül legalább az egyikben nem korlátos variációjú, stb. Véges számú lépés után a láncnak vége szakad, mert ha $\mu(A)$ a $\overline{\sum_{l=1}^{k_r} B_l^{(1)}}$ halmazok egyikében sem korlátos variációjú, akkor a

$$\sum_{l=1}^{k_r} \mu(B_l^{(1)}) \geqq (r+1)K$$

egyenlőtlenségből következnék, hogy a $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots$ diszjuñkt halmazsorozat azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(B_l^{(1)}) = \infty,$$

ami a *c*) feltétel miatt lehetetlen. Létezik tehát a $k_1, k_2, \ldots$ számok között egy olyan n_1 szám, hogy $\mu(A)$ nem korlátos variációjú a $\sum_{l=1}^{n_1} B_l^{(1)}$ halmazban. $\mu(A)$ szubadditivitásából következik, hogy a $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{n_1}^{(1)}$ halmazok közül legalább az egyikben végtelen a variáció. Legyen az a $B_{n_1}^{(1)}$ halmaz. Ekkor, mivel

$$\sum_{l=1}^{n_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq \sum_{l=1}^{k_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq 2K,$$

az *a*) feltétel figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^{n_1-1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq K.$$

Az előző meggondolást megismételve azt találjuk, hogy a $B_{n_1}^{(1)}$ halmazban vannak olyan diszjunkt, $\mathfrak{R}$-hez tartozó $B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \dots, B_{n_2}^{(2)}$ halmazok, hogy a $B_{n_2}^{(2)}$ halmazban végtelen a variáció és

$$\sum_{l=1}^{n_2-1} \mu(B_l^{(2)}) \geqq K.$$

Ezt az eljárást folytatva, kiválaszthatunk egy olyan, ($\mathfrak{R}$-beli elemekből álló) $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_{n_1-1}^{(1)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \dots, B_{n_2-1}^{(2)}, \dots$ diszjunkt halmazsorozatot, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_k-1} \mu(B_l^{(k)}) = \infty,$$

ami a c) feltétel szerint ellentmondás. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. §. Teljesen multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése

1. TÉTEL. *Legyen $f(A)$ valamely $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre $f(A) \in \mathfrak{B}$ és $\|f(A)\| \leqq 1$, ha $A \in \mathfrak{R}$. Ha az $\mathfrak{R}$ gyűrű minden $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt halmazsorozatára teljesül, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\| < \infty, \tag{2}$$

akkor létezik egy és csak egy olyan $f^*(A)$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre $f^*(A) = f(A)$, ha $A \in \mathfrak{R}$.

Ha $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy konvergens halmazsorozata, $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f^*(A_k) = f^*(A).$$

BIZONYÍTÁS. Először bebizonyítom, hogy az $e - f(A)$ halmazfüggvény korlátos variációjú. Elég azt belátnunk, hogy teljesülnek a 4. lemma feltételei. Ha $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$ és $AB = 0$, akkor

$$\begin{aligned} \|e - f(A+B)\| &= \|e - f(A) + f(A) - f(A)f(B)\| \leqq \\ &\leqq \|e - f(B)\|\,\|f(A)\| + \|e - f(A)\| \leqq \|e - f(B)\| + \|e - f(A)\|, \end{aligned} \tag{3}$$

tehát az $\|e - f(A)\|$ nem-negatív halmazfüggvény szubadditív. Az a) feltétel teljesül, mert

$$\|e - f(A)\| \leqq \|e\| + \|f(A)\| \leqq 2.$$

Végül a b) feltétel teljesülését a (2) reláció biztosítja.

Legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy olyan diszjunkt halmazsorozata, melyre $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \mathfrak{R}$.

A 3. egyenlőtlenségből következik, hogy minden n-re

$$\left\| e-f\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)\right\| \leqq \sum_{k=1}^{n} \|e-f(A_k)\|.$$

Elvégezve az $n\to\infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$\|e-f(A)\| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|e-f(A_k)\|. \tag{4}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $\|e-f(A)\|$ $(A\in\mathfrak{R})$ halmazfüggvény teljesíti az 1. lemma feltételeit, tehát ha $\mu(A)=\|e-f(A)\|$, akkor $\mathrm{Var}_\mu(A)$ korlátos mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn. Legyen $m(B)$, $B\in\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ a $\mathrm{Var}_\mu(A)$ mértéknek megfelelő, az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre kiterjesztett korlátos mérték.

Képezzünk egy gyűrűkből álló $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ transzfinit sorozatot a következőképpen: $\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}_1$; $\mathfrak{R}_1$ legyen azoknak a halmazoknak a gyűrűje, amelyek előállíthatók $\mathfrak{R}_0$-ba tartozó halmazok konvergens sorozatainak limeszeként; ha $\mathfrak{R}_\nu$-t minden olyan ν-re, melyre $\nu<\nu_0<\omega_1$, már értelmeztük, akkor legyen $\mathfrak{R}_{\nu_0}$ azoknak a halmazoknak a gyűrűje, amelyek előállíthatók a $\sum_{\nu<\nu_0}' \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű elemeiből álló konvergens sorozatok limeszeként. Nyilvánvaló, hogy $\sum_{\nu}' \mathfrak{R}_\nu=\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

A továbbiakban fel fogjuk használni a következő megjegyzést: ha E_n az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy olyan halmazsorozata, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} E_n=0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(E_n)=e$. Ez a tény az

$$\|e-f(E_n)\| \leqq m(E_n)$$

egyenlőtlenségből következik, figyelembe véve, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=0$.

Legyen A_n az $\mathfrak{R}_0$ gyűrű egy konvergens halmazsorozata. Ez esetben

$$\lim_{m,n\to\infty} (A_n-A_m)=\lim_{m,n\to\infty} (A_m-A_n)=0$$

és így

$$\begin{aligned}
\|f(A_n)-f(A_m)\| &\leqq \|f(A_n)-f(A_nA_m)\|+\|f(A_m)-f(A_nA_m)\|=\\
&=\|f(A_nA_m)f(A_n-A_m)-f(A_nA_m)\|+\|f(A_nA_m)f(A_m-A_n)-f(A_nA_m)\|\leqq\\
&\leqq \|f(A_nA_m)\|\;\|e-f(A_n-A_m)\|+\|f(A_nA_m)\|\;\|e-f(A_m-A_n)\|\leqq\\
&\leqq \|e-f(A_n-A_m)\|+\|e-f(A_m-A_n)\|\to 0, \text{ ha } m,n\to\infty,
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy az $f(A_n)$ sorozat konvergens. Definiáljuk az $f_1(A)$, $A\in\mathfrak{R}_1$ halmazfüggvényt a következőképpen: $A_n\in\mathfrak{R}_0$, $n=1,2,\ldots$ és $A=\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, akkor

$$f_1(A)=\lim_{n\to\infty} f(A_n).$$

Bebizonyítjuk, hogy az $f_1(A)$ halmazfüggvény definíciója egyértelmű. Legyen A_n és A'_n az $\mathfrak{R}_0$ gyűrű két konvergens sorozata, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A'_n = A$. Az

$$A_n = A_n A'_n + (A_n - A'_n),$$
$$A'_n = A_n A'_n + (A'_n - A_n)$$

felbontásból következik, hogy

$$f(A_n) = f(A_n A'_n) f(A_n - A'_n),$$
$$f(A'_n) = f(A_n A'_n) f(A'_n - A_n).$$

Mivel $A_n A'_n \to A$ és

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n - A'_n) = \lim_{n\to\infty} f(A'_n - A_n) = e,$$

következik, hogy az $f(A_n A'_n)$ sorozat konvergens és így

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n) = \lim_{n\to\infty} f(A'_n) = \lim_{n\to\infty} f(A_n A'_n).$$

Ebből az is következik, hogy $f_1(A) = f(A)$, ha $A \in \mathfrak{R}_0$.

$f_1(A)$ multiplikatív halmazfüggvény az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn. Ha ugyanis A, B az $\mathfrak{R}_1$ gyűrű diszjunkt halmazai és $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $B = \lim_{n\to\infty} B_n$, $A_n \in \mathfrak{R}_0$, $B_n \in \mathfrak{R}_0$, $n = 1, 2, \ldots$, akkor

$$f_1(A+B) = \lim_{n\to\infty} f(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} f(A_n) \lim_{n\to\infty} f(B_n - A_n) = f_1(A) f_1(B).$$

Az $f_1(A)$ halmazfüggvény azonban teljesen multiplikatív is. Ennek bizonyításához előbb megjegyzem, hogy ha $B \in \mathfrak{R}_1$, $\mu_1(B) = \|e - f_1(B)\|$, akkor $\mathrm{Var}_{\mu_1}(B) \leqq m(B)$. Ha ugyanis $B_1, B_2, \ldots, B_r$ olyan diszjunkt halmazok, amelyekre $B_i \in \mathfrak{R}_1$, $B_i \subseteq B$, $i = 1, 2, \ldots, r$, akkor találhatók olyan $B_i^{(n)}$ sorozatok, amelyekre $B_i = \lim_{n\to\infty} B_i^{(n)}$, $B_i^{(n)} \in \mathfrak{R}_0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $B_i^{(n)} B_k^{(n)} = 0$, ha $i \neq k$, $n = 1, 2, \ldots$. Mivel

$$\sum_{i=1}^{r} \|e - f(B_i^{(n)})\| \leqq m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i^{(n)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

továbbá $\lim_{n\to\infty} f(B_i^{(n)}) = f_1(B_i)$, $\lim_{n\to\infty} m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i^{(n)}\right) = m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i\right)$, következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} \|e - f_1(B_i)\| \leqq m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i\right) \leqq m(B).$$

Ha most $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}_1$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}_1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f_1(A_k)\| \leqq m(A),$$

tehát a $\prod_{k=1}^{\infty} f_1(A_k)$ végtelen szorzat konvergens. Legyen $C_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$. Felhasználva azt, hogy f_1 multiplikatív halmazfüggvény, azt kapjuk, hogy

$$\left\| f_1(A) - \prod_{k=1}^{n} f_1(A_k) \right\| = \left\| \prod_{k=1}^{n} f_1(A_k) f_1(C_{n+1}) - \prod_{k=1}^{n} f_1(A_k) \right\| \leqq$$

$$\leqq \|e - f_1(C_{n+1})\| \leqq m(C_{n+1}) \to 0, \text{ ha } n \to \infty,$$

tehát f_1 teljesen multiplikatív halmazfüggvény.

Ugyanúgy, mint ahogy $\mathfrak{R}_0$ esetében tettük, az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn értelmezett $\mu_1(A) = \|e - f_1(A)\|$ halmazfüggvényről is beláthatjuk, hogy teljesen szubadditív. Azt már láttuk, hogy korlátos variációjú és nyilván $\|e - f_1(A)\| \leqq 2$, tehát az 1. lemma szerint $\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)$ korlátos mérték az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn. Láttuk azt is, hogy ha $A \in \mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}_1$, akkor

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) \leqq m(A).$$

Másrészt a $\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)$ halmazfüggvényre nyilvánvalóan fennáll a

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) \geqq \mathrm{Var}_{\mu}(A) = m(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_0,$$

reláció, hiszen $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_0$. Ebből következik, hogy

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) = m(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{R}.$$

Mivel egy korlátos mérték kiterjesztése egyértelmű, következik, hogy

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) = m(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_1.$$

Tegyük fel, hogy minden olyan ν rendszámhoz, amelyre $\nu < \nu_0 < \omega_1$, már hozzárendeltünk egy olyan $f_\nu(A)$ teljesen multiplikatív halmazfüggvényt, amelyre $f_\nu(A) = f_{\nu'}(A)$, ha $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, $\nu' < \nu$ és $\mathrm{Var}\,\mu_\nu(A) = m(A)$, ahol $\mu_\nu(A) = \|e - f_\nu(A)\|$, $A \in \mathfrak{R}_\nu$.

Könnyen belátható, hogy a $\sum_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn értelmezett

$$g_{\nu_0}(A) = f_\nu(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_\nu, \nu < \nu_0$$

halmazfüggvény teljesen multiplikatív. Ha ugyanis $A_1, A_2, \ldots$ a $\sum_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \sum_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - g_{\nu_0}(A_k)\| \leqq m(A) \quad ,$$

és így a 3. lemma szerint a $\prod_{k=1}^{\infty} g_{\nu_0}(A_k)$ végtelen szorzat konvergens; a g_{ν_0} halmazfüggvény nyilván multiplikatív, tehát

$$g_{\nu_0}(A) = \prod_{k=1}^{n} g_{\nu_0}(A_k) g_{\nu_0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \right),$$

amiből következik, hogy

$$\left\| g_{\nu_0}(A) - \prod_{k=1}^{n} g_{\nu_0}(A_k) \right\| \leqq \left\| e - g_{\nu_0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \right\| \leq m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \to 0,$$

ha $n \to \infty$, vagyis

$$g_{\nu_0}(A) = \prod_{k=1}^{\infty} g_{\nu_0}(A_k).$$

Ugyanúgy, mint ahogy az $\mathfrak{R}_0$ gyűrűn értelmezett f halmazfüggvény segítségével megkonstruáltuk az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn értelmezett f_1 halmazfüggvényt, a $\sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn értelmezett g_ν halmazfüggvény segítségével is megkonstruálhatjuk az f_{ν_0} halmazfüggvényt és beláthatjuk azt is, hogy az utóbbira teljesül az indukciós feltevés.

Értelmezzük az $f^*(A)$, $A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ halmazfüggvényt a következőképpen

$$f^*(A) = f_\nu(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_\nu.$$

Az, hogy az $f^*(A)$ halmazfüggvény teljesen multiplikatív, abból következik, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \sum_\nu \mathfrak{R}_\nu$ σ-gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, akkor van olyan $\nu' < \omega_1$ rendszám, hogy $\nu_k < \nu'$, $k = 1, 2, \ldots$ és így $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, tehát

$$f^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) = f_{\nu'}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_{\nu'}(A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} f^*(A_k).$$

Ugyanígy belátható az is, hogy ha A_n az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy konvergens halmazsorozata, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} f^*(A_n) = f^*(A)$.

A KITERJESZTÉS EGYÉRTELMŰSÉGÉNEK BIZONYÍTÁSA. Legyen f^{**} az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény. Legelőször megjegyezzük, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy nem-csökkenő halmazsorozata, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, akkor, mivel az f^{**} halmazfüggvény teljesen multiplikatív, következik, hogy

$$f^{**}(A) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} f^{**}(A_{k+1} - A_k) \right) f^{**}(A_1) = f^{**}(A_1) \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-1} f^{**}(A_{k+1} - A_k),$$

tehát

$$f^{**}(A) = \lim_{n\to\infty} f^{**}(A_n). \tag{5}$$

Tegyük fel, hogy f^* és f^{**} megegyezik a $\sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn:

$$f^*(A) = f^{**}(A), \quad \text{ha} \quad A \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu.$$

Bebizonyítjuk, hogy ekkor e két halmazfüggvény az $\mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn is megegyezik.

Legyen $B_1, B_2, \ldots$ a $\sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű egy monoton nem-növekvő halmazsorozata, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Az f^*, f^{**} halmazfüggvények teljesen multiplikatívak, tehát

$$f^*(B_n) = f^*(B) \prod_{k=n}^{\infty} f^*(B_k - B_{k+1}),$$

$$f^{**}(B_n) = f^{**}(B) \prod_{k=n}^{\infty} f^{**}(B_k - B_{k+1}).$$

Figyelembe véve feltevésünket, azt kapjuk, hogy

$$f^*(B_n - B) = \prod_{k=n}^{\infty} f^*(B_k - B_{k+1}) = \prod_{k=n}^{\infty} f^{**}(B_k - B_{k+1}),$$

$$f^*(B_n) = f^{**}(B_n),$$

tehát

$$f^*(B) f^*(B_n - B) = f^{**}(B) f^*(B_n - B).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} f^*(B_n - B) = e$, következik, hogy $f^*(B) = f^{**}(B)$.

Tekintsünk végül egy tetszőleges olyan C_n konvergens halmazsorozatot, amelyre $C_n \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, $n = 1, 2, \ldots$. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C, \quad A_n = C_n C_{n+1} \ldots,$$

továbbá

$$A_{r,n} = C_n C_{n+1} \ldots C_{n+r}, \quad n, r = 1, 2, \ldots.$$

Nyilvánvaló, hogy $A_{r,n} \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, $A_{r,n} \subseteq C_n$, $A_{r,n} \supseteq A_{r+1,n}$. Ebből következik, hogy

$$f^{**}(C_n) = f^{**}(C_n - A_{r,n}) f^{**}(A_{r,n}) = f^*(C_n - A_{r,n}) f^{**}(A_{r,n}). \tag{6}$$

Mivel $\lim_{r\to\infty} A_{r,n} = A_n$ és az $A_{1,n}, A_{2,n}, A_{3,n}, \ldots$ sorozat minden rögzített n-re monoton nem-növekvő, az előbbiek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{r\to\infty} f^{**}(A_{r,n}) = \lim_{r\to\infty} f^*(A_{r,n}) = f^*(A_n) = f^{**}(A_n). \tag{7}$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$\lim_{r\to\infty} f^*(C_n - A_{r,n}) = f^*(C_n - A_n), \tag{8}$$

tehát (6), (7) és (8) alapján írhatjuk, hogy

$$f^{**}(C_n) = f^*(C_n - A_n) f^{**}(A_n). \tag{9}$$

Az A_n sorozat monoton nem-csökkenő, $\lim_{n\to\infty} A_n = C$, tehát (5) szerint

$$\lim_{n\to\infty} f^{**}(A_n) = f^{**}(C). \tag{10}$$

Mivel

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty} f^{**}(C_n) = \lim_{n\to\infty} f^{*}(C_n) = f^{*}(C),\ \lim_{n\to\infty} f^{*}(C_n - A_n) = e,$$

tehát, ha a (9) egyenlőségben elvégezzük az $n\to\infty$ határátmenetet, akkor (10) és (11) alapján azt kapjuk, hogy

$$f^{*}(C) = f^{**}(C).$$

A transzfinit indukció elvéből következik, hogy az f^{*}, f^{**} halmazfüggvények $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \sum_{\nu} \mathfrak{R}_{\nu}$ minden elemén megegyeznek. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{R}$ egy gyűrű és $f(A)$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre $f(A) \in \mathfrak{B}$, ha $A \in \mathfrak{R}$. Tegyük fel, hogy létezik az $\mathfrak{R}$ gyűrűn egy olyan $\varphi(A)$ korlátos, valós értékű teljesen additív halmazfüggvény, amelyre*

$$(12)\qquad \|f(A)\| \leqq 2^{\varphi(A)},\quad \textit{ha}\quad A \in \mathfrak{R},$$

és az $\mathfrak{R}$ gyűrű minden $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\| < \infty.$$

Ebben az esetben az $f(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre, a kiterjesztés egyértelmű és ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy konvergens sorozata, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f^{*}(A_k) = f^{*}(A).$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $g(A) = 2^{-\varphi(A)} f(A)$ halmazfüggvényt. Erre teljesülnek az 1. tétel feltételei. Ugyanis egyrészt (12) szerint $\|g(A)\| \leqq 1$. Másrészt

$$(13)\qquad \begin{aligned} \|e - g(A)\| &= \|e - e2^{-\varphi(A)} + e2^{-\varphi(A)} - 2^{-\varphi(A)} f(A)\| \leqq |1 - 2^{-\varphi(A)}| + \\ &+ \|e - f(A)\|\, 2^{-\varphi(A)} \leqq K(|\varphi(A)| + \|e - f(A)\|), \end{aligned}$$

ahol K pozitív állandó, tehát ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, akkor (13) alapján

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - g(A_k)\| \leqq K\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(A_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\|\right) < \infty.$$

Ha a $\varphi(A)$ és a $g(A)$ halmazfüggvényeket kiterjesztjük és a kiterjesztett halmazfüggvényeket $\varphi^{*}(A)$-val, illetve $g^{*}(A)$-val jelöljük, akkor világos, hogy

$$f^{*}(A) = 2^{\varphi^{*}(A)} g^{*}(A)$$

az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett olyan teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre

$$f^{*}(A) = f(A),\quad \text{ha}\quad A \in \mathfrak{R}.$$

Igen egyszerűen beláthatók a tétel többi állításai is.

MEGJEGYZÉS. Ha az $\mathfrak{R}$ gyűrű minden A elemére teljesül, hogy $0 < \delta_1 \leqq \leqq \|f(A)\| \leqq \delta_2$, ahol δ_1 és δ_2 állandók, továbbá

$$(14) \qquad \|f(A)f(B)\| = \|f(A)\| \, \|f(B)\|,$$

ha $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$, $AB = 0$, akkor a 2. tétel (12) feltétele teljesül. Ugyanis a $\varphi(A) = \log_2 \|f(A)\|$ halmazfüggvényre teljesül a (12) reláció. A (14) egyenlőség teljesül pl. a komplex számok Banach-algebrája esetében.

Végül köszönetet mondok Császár Ákosnak értékes megjegyzéseiért.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.

MINDENÜTT FOLYTONOS, SEHOL SEM DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEKRŐL

MIKOLÁS MIKLÓS

Bevezetés

1. Mióta WEIERSTRASS híres példája[1] $\left(W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' b^n \cos(a^n \pi x)\right.$, ahol a páratlan, 1-nél nagyobb egész szám, $0<b<1$, $\left. ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$ a múlt század hetvenes éveiben általánosan ismertté vált, a modern valós függvénytan kialakulásával párhuzamosan számos szerző foglalkozott *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényekkel.*[2] KNOPP egy hosszabb dolgozatban[3] foglalta össze az 1918-ig talált példák legnagyobb részét, mégpedig egységes, általános eljárás alapján. A tárgykör mindmáig a matematikai érdeklődés előterében maradt: VAN DER WAERDEN újabb keletű elegáns példáján[4] $\left(V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' 10^{-n}\psi(10^n x)\right.$, ahol $\psi(x)$ azt az 1 szerint periodikus függvényt jelenti, melyre $\psi(x)=|x|$, ha $\left.-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$ és más, egészen speciális jellegű példákon kívül,[5] ki kell emelnünk a lengyel és indiai matematikai iskola bizonyos eredményeit a harmincas és negyvenes években, melyek értékes adalékokat szolgáltatnak a szóban forgó függvények DINI-féle derivált-számok szerinti osztályozására, ill. nulla-helyeire vonatkozólag.[6]

2. A következőkben egyszerű, új *módszert* adunk meg, mely lehetővé teszi mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvények „családjainak"

[1] L. [6] és [26].
[2] L. az irodalomjegyzéket.
[3] [12]. KNOPP törtvonalakból határátmenettel keletkező periodikus $f(x)$ függvényekkel foglalkozik; fő kikötése, hogy az $[f(x+h)-f(x)]/h$ különbségi hányados (kétoldali) limesz szuperiorja $+\infty$, limesz inferiorja $-\infty$ legyen az alapintervallum minden x belső helyén.
[4] Vö. [25]. (A bizonyítás HEYTINGtől származik.)
[5] Vö. pl. [3], [4], [8], [10], [15], [24].
[6] Vö. [2], [18], [19], [20], ill. [17], [21].

tényleges konstrukcióját (II. tétel); az eljárás — KNOPPtól eltérően — a differenciálhatóságnak egy szükséges és elégséges feltételére (vö. (1)) támaszkodik. Az így nyert függvényosztály magában foglal majdnem minden az irodalomban megtalálható, idevágó példát, eltekintve néhánytól, melyek konstrukciója aritmetikai jellegű. Egy nagyon speciális esetben, mely mintegy a módszer „mintáját" szolgáltatja, egy *elemi példára* jutunk, melynél a folytonosság és nem-deriválhatóság igazolása két mondatban elvégezhető (I. tétel). — Az alapgondolatot $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi(\nu_k x)$ alakú függvényekre alkalmazva, ahol $\Sigma|c_k|<\infty$ és $\nu_k|\nu_{k+1}$ $(k=0,1,\ldots)$, *új típusú eredmények* adódnak: $\Phi(x)$ folytonos, nem differenciálható tetszőleges *konvex* (vagy konkáv) ívekből felépülő, ill. LIPSCHITZ-feltételt kielégítő, periodikus $\varphi(x)$ függvény esetében, feltéve, hogy c_k, ν_k eleget tesz bizonyos könnyen teljesíthető limesz-kikötéseknek (IV—VI. tétel). Korolláriumként nyerünk két egyszerű tételt, melyek több szempontból általánosítják WEIERSTRASS, ill. VAN DER WAERDEN példáját (III. és VII. tétel).

1. §. Egy elemi példa

3. Legyen $f(x)$ egy a helyen és ennek valamely környezetében differenciálható függvény. Akkor — a definícióból folyóan — bármely pozitív ε megadása után meghatározható[7] egy $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ úgy, hogy az

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right|<2\varepsilon \tag{1}$$

egyenlőtlenség teljesül az *összes* olyan $t_1 \neq t_2$, $u_1 \neq u_2$ értékpárok esetében, melyekre $a-\delta<t_1\leqq a\leqq t_2<a+\delta$, ill. $a-\delta<u_1\leqq a\leqq u_2<a+\delta$.

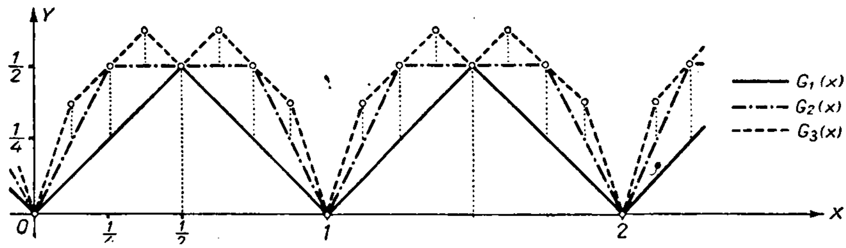
4. Legyen adva két pont: $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$, $x_1<x_2$; tekintsük azt az $M(\xi,\eta)$ pontot,[8] melynek koordinátái: $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\eta=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(x_2-x_1)$ és képezzük az $\overline{MP_1}$, $\overline{MP_2}$ szakaszokat. Az utóbbiakat $\overline{P_1P_2}$ *járulékainak* fogjuk nevezni, a $P_1MP_2\triangle$-et pedig *járulékháromszögnek*. Kieme-

[7] Emlékeztetünk arra, hogy $[f(x_1)-f(x_2)]/(x_1-x_2)$ $(x_1 \neq a, x_2 \neq a;\ a-\delta<x_1\leqq a\leqq x_2<a+\delta)$ az $[f(x_1)-f(a)]/(x_1-a)$ és $[f(x_2)-f(a)]/(x_2-a)$ differenciahányadosok közé esik. Különben CAUCHY konvergenciakritériumára tekintettel (1) nemcsak szükséges, hanem elegendő feltétele is az a-ban való deriválhatóságnak.

[8] M egyszerű szerkesztésmódja nyilvánvaló.

lendő, hogy az oldalak irányhatározóira nézve fennáll: $\frac{\eta-y_1}{\xi-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+1$, $\frac{y_2-\eta}{x_2-\xi}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-1$.

Képezzük az x-tengely $[i, i+1]$ $(i=0, \pm 1, \dots)$ szakaszainak járulékait; az így nyert törtvonal egy $G_1(x)$ folytonos függvényt ábrázol. E törtvonal minden „oldalának" járulékait meghúzva, egy $G_2(x)$ folytonos függvény képéhez, az utóbbiból járulék-képzéssel egy újabb $G_3(x)$ törtvonalhoz jutunk stb. (L. az ábrát.)



I. TÉTEL. (I) *A* $G(x)=\lim_{n\to\infty} G_n(x)$ *függvény mindenütt folytonos, de* (II) *sehol sem differenciálható. Érvényes a* $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}((2^k x))$ *sor-előállítás, ahol* $((x))$ *jelenti x-nek a legközelebbi egész abszcisszájú ponttól való távolságát.*

BIZONYÍTÁS. Világos, hogy $G_{k+1}(x)-G_k(x)\leq 2^{-(k+1)}$ $(k=1, 2, \dots)$, tehát $G_n(x)=G_1(x)+\sum_{k=1}^{n}[G_{k+1}(x)-G_k(x)]$ $(n=2, 3, \dots)$ egyenletesen konvergens minden x-re, s innen következik (I). (II)-re térve megjegyezzük, hogy $G(x)$ képe nyilván minden felhasznált járulékháromszög csúcspontjait tartalmazza; így valamely a hely s egy ezt körülvevő $(a-\delta, a+\delta)$ környezet megadása után található három pont: x_1, ξ, x_2 úgy, hogy abszcisszáik rendre $r\cdot 2^{-k}$, $(2r+1)2^{-k-1}$, $(r+1)2^{-k}$ (r egész) alakúak, továbbá $a\in[x_1, x_2]\subset(a-\delta, a+\delta)$ és

$$\frac{G(\xi)-G(x_1)}{\xi-x_1}-\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{G(x_2)-G(\xi)}{x_2-\xi}=1,$$

ellentétben az (1) feltétellel.

Ami $G(x)$ kérdéses előállítását illeti, ez rögtön folyik, ha $G_0(x)\equiv 0$-t írva figyelembe vesszük, hogy a $G_{k+1}(x)-G_k(x)$ $(k=0, 1, \dots)$ különbség minden $[r\cdot 2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$ alakú intervallum felezőpontjában a 2^{-k-1}, két végpontjában pedig a 0 értéket veszi fel, továbbá lineáris ennek mindkét felében.

2. §. Egy lemma és egy ezen alapuló általános geometriai konstrukció

5. A fenti okoskodás lényege — kissé általánosítva — a következő módon fejezhető ki:

LEMMA. *Legyen $f(x)$ egy I számközben értelmezett függvény és a I-nek egy belső pontja. Ha minden $(a-\delta, a+\delta)$ alakú I-ben fekvő intervallum tartalmaz három ekvidisztans pontot: x_0-h, x_0, x_0+h $(h>0)$ úgy, hogy $a\in[x_0-h, x_0+h]$ és*

$$(2)\qquad \left|f(x_0)-\frac{1}{2}[f(x_0+h)+f(x_0-h)]\right|\geqq 2h\cdot\lambda,$$

ahol λ fix pozitív szám, akkor $f(x)$ nem differenciálható az a helyen.

Valóban: (2)-ből látjuk, hogy a

$$(3)\qquad d=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

különbség abszolút értékben nem kisebb 2λ-nál, ami pedig elegendő kis δ esetén ellentmond az (1) feltételnek.

6. Legyen $\lambda>0$ megadva egyszer s mindenkorra. Evidens módon bármely adott $Q(x,y)$, $Q'(x',y')$, $x<x'$ pontpárhoz szerkeszthető (végtelen sok) oly $P(\xi,\eta)$ pont, hogy $\xi=\frac{1}{2}(x+x')$, $\left|\eta-\frac{1}{2}(y+y')\right|\geqq\lambda(x'-x)$ (vö. (2)); P-t a Q, Q' pontok egy *asszociált*jának fogjuk hívni.

Az eddigiek alapján könnyű az 1. §-ban megadott eljárást messzemenően általánosítani; így olyan *módszer*re jutunk, mely ekvidisztans alappontokon átmenő törtvonalak helyett változatos módon választható alappontokat és görbeíveket[9] használ fel. Legyen ui. $y=F_0(x)$ egy mindenütt folytonos függvény, $Q_i(a_i, b_i)$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ egy pontsorozat, melyre $a_i<a_{i+1}$, $b_i=F_0(a_i)$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_i=\infty$, $\lim\limits_{i\to-\infty} a_i=-\infty$ és legyen adva egy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varrho_n$ pozitív-tagú összetartó sor. Tekintsük az $y=F_0(x)$ függvénygörbe ϱ_1-környezetét[10] (jelöljük V_{ϱ_1}-gyel)

[9] A következőkben az „ív" és „görbeív" szavakat kizárólag olyan JORDAN-féle görbeívek megjelölésére tartjuk fenn, melyeknek $y=y(x)$ analitikus előállításában $y(x)$ *egyértékű* folytonos függvény.

[10] Egy $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq a')$ ív ϱ-környezetén (V_ϱ) értjük azon (x,y) pontok halmazát, melyekre $a\leqq x\leqq a'$, $f(x)-\varrho<y<f(x)+\varrho$.

és rendeljünk hozzá a grafikon minden $[Q_i, Q_{i+1}]$ ívéhez egy $P_r(x_r, y_r)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ pontrendszert úgy, hogy 1) P_0, P_m azonos Q_i-vel ill. Q_{i+1}-gyel, $P_r \in V_{\varrho_1}$ és $x_r < x_{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$; 2) minden P_r, P_{r+1} „szomszédos“ pontpárnak van V_{ϱ_1}-be eső P_r^* asszociáltja.[11] Húzzunk mármost V_{ϱ_1}-ben egy görbeívet úgy, hogy átmenjen a P_r, P_r^* pontok mindegyikén és vetülete az x-tengelyen az $[a_i, a_{i+1}]$ számköz legyen; nevezzük ezt a $[Q_i, Q_{i+1}]$ ív egy elsőrendű *adjungált*jának. Következő lépésként tekintsük ennek az adjungáltnak ϱ_2-környezetét (V_{ϱ_2}), s ebben minden $[P_r, P_r^*]$, $[P_r^*, P_{r+1}]$ ívnek képezzük egy adjungáltját ugyanolyan értelemben, mint az imént $[Q_i, Q_{i+1}]$-ét; kapjuk az eredeti $[Q_i, Q_{i+1}]$ görbeív $2m$-számú másodrendű adjungáltját. Ez utóbbiak mindegyikére ismét alkalmazva az eljárást, előállnak $[Q_i, Q_{i+1}]$ harmadrendű adjungáltjai $(\subset V_{\varrho_3})$ s. i. t. — Az összes $[Q_i, Q_{i+1}]$ $(i = 0, \pm 1, \ldots)$ görbeívek elsőrendű adjungáltjai egy folytonos $y = F_1(x)$ függvényt ábrázolnak, az összes másodrendű adjungáltak szolgáltatta folytonos függvény legyen $y = F_2(x)$ stb.

II. TÉTEL. $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ *mindenütt folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. 1° A konstrukció szerint $|F_{k+1}(x) - F_k(x)| < \varrho_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; mivel $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varrho_{k+1} < \infty$, innen folyik az

$$F_n(x) = F_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [F_{k+1}(x) - F_k(x)] \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

függvénysorozat egyenletes konvergenciája és, tekintettel $F_n(x)$ mindenütt folytonos voltára, egyúttal $F(x)$ folytonossága $-\infty < x < \infty$ mellett.

Jelöljük E_n-nel az összes n-edrendű adjungáltak végpontjainak halmazát. Az 1) feltétel szerint E_n pontjai egyidejűleg hozzátartoznak az $F_n(x)$, $F_{n+1}(x)$, $F_{n+2}(x), \ldots$ függvénygörbékhez, tehát szükségképp $F(x)$ képéhez is $(n = 1, 2 \ldots)$. Ennélfogva az utóbbi tartalmazza a $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ halmazt.

2° Először is megállapítjuk, hogy (az asszociált pontok felhasználása miatt) $[Q_i, Q_{i+1}]$ bármely másodrendű adjungáltjának vetülete az x-tengelyen legfeljebb $\frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i)$ hosszúságú, minden harmadrendű adjungált vetületének hossza legfeljebb $\frac{1}{4}(a_{i+1} - a_i)$ stb. $(i = 0, \pm 1, \ldots)$. Innen folyik, hogy bármely rögzített $[Q_i, Q_{i+1}]$ ívhez és $\delta > 0$ számhoz található olyan $N = N(\delta)$

[11] Világos, hogy ha az 1)-nek megfelelő x_r abszcisszákra $\max(x_{r+1} - x_r)$ elegendő kicsi, találhatók olyan P_r pontok, hogy 2) is teljesüljön.

küszöbszám, hogy $[Q_i, Q_{i+1}]$ összes N-ed- (és magasabb) rendű adjungáltjának vetülete legfeljebb δ hosszúságú; különben $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ vetülete mindenütt sűrű az x-tengelyen.

Legyen megadva mármost egy $x=a$ hely s ennek egy $(a-\delta, a+\delta)$ környezete; válasszuk i-t úgy, hogy a beleessék az $[a_i, a_{i+1}]$ intervallumba és N-et az imént említett módon. Akkor található egy (N-edrendű) C_N adjungált, melynek x-tengelymenti vetülete tartalmazza az a pontot és része $(a-\delta, a+\delta)$-nak. A konstrukció és 1° alapján C_N tartalmaz három olyan $Q(x, F(x))$, $P(\xi, F(\xi))$, $Q'(x', F(x'))$ pontot, hogy $a \in [x, x']$ és P asszociáltja Q-nak és Q'-nek; mivel $[x, x'] \subset (a-\delta, a+\delta)$ és $\delta > 0$ tetszőleges, a lemma felhasználásával közvetlenül folyik, hogy $F(x)$ nem differenciálható az a pontban, qu. e. d.

7. Ami a II. tétel *alkalmazásait* illeti, nehézség nélkül igazolható, hogy az ismert geometriai példák jó része eleget tesz a szóban forgó feltételeknek (vö. [12]). Ha az $F_0(x)=f_0(x)$, $F_{k+1}(x)-F_k(x)=f_{k+1}(x)$ $(k=0, 1, \ldots)$, $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ jelöléseket vezetjük be, akkor az

$$(5) \qquad F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

sorról van szó, melynek részletösszegei bizonyos megszorításoknak vannak alávetve. Az utóbbiak legkönnyebben úgy teljesíthetők analitikus úton, hogy olyan periodikus függvények lineáris kombinációját tekintjük, melyeknek frekvenciái racionális viszonyban vannak, s amelyek eltűnnek az alapintervallum végpontjaiban. (Meggyőződhetünk pl. arról, hogy $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} (2\mu)^{-k}((2^k \mu^k x))$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} (2\mu)^{-k}((2^k \mu^k x))$, $\mu=1, 2, \ldots$ esetén kielégülnek a II. tétel feltételei; itt $((x))$-nek ugyanaz a jelentése, mint az I. tételben.)

3. §. $\Phi(x)=\Sigma c_k \varphi(\nu_k x)$ alakú függvények vizsgálata $\varphi(x)$-re vonatkozó konvexitási (konkavitási) kikötések mellett

8. A következő fejezetekben néhány állandó jellegű *jelöléssel* ill. *megszorítással* élünk. — Így $c_0, c_1, c_2, \ldots$ mindig oly valós, 0-t nem tartalmazó együttható-sorozatot jelent, melyre $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ konvergens; $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ pozitív egész számok szigorúan monoton növekedő sorozata, melyben ν_{k+1} osztható ν_k-val

$(k=0,1,2,\ldots)$; rövidség kedvéért írjuk: $\nu_{k,l}=\frac{\nu_k}{\nu_l}$. $\varphi(x)$ folytonos és $p>0$ szerint periodikus függvény; legyen

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k\varphi(\nu_k x). \tag{6}$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos.*

III. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x)$ *konvex*[12] *(konkáv) a* $[0,p]$ *számközben. Tegyük fel, hogy* $\operatorname{sgn} c_k$ $(k=0,1,\ldots)$ *állandó és hogy van oly* $\varrho>0$ *konstans, hogy* $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,\ldots)$.

Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

9. E tételt jóval általánosabb alakban akarjuk bebizonyítani, felhasználva a következő fogalmat: egy $f(x)$ függvényt $[a,b]$-ben *szakaszonként konvex*nek nevezünk $a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$ osztópontokkal, ha $f(x)$ folytonos e pontokban és konvex vagy lineáris az $[x_{r-1},x_r]$ $(r=1,2,\ldots,m)$ szakaszok mindegyikében. A *szakaszonként konkáv* függvények definíciója analóg.

IV. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x)$ $[0,p]$*-ben szakaszonként konvex (vagy konkáv)* ω_r $(r=0,1,\ldots,m)$ *osztópontokkal; legyen* $\varphi(0)>$ *(ill.* $<$*)* $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. *Tegyük fel, hogy* 1) $\operatorname{sgn} c_k$ $(k=0,1,\ldots)$ *állandó;* 2) *vannak tetszőlegesen nagy olyan k indexek, melyekre a* $\nu_{k,k-1}\cdot\omega_r/p$ $(r=0,1,\ldots,m)$ *viszonyszámok egészek;* 3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\nu_k|c_k|>0$.

Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. 2) folytán minden $\frac{\omega_r}{p}$ viszony racionális $\left(\text{speciálisan } \frac{\omega_0}{p}=0, \frac{\omega_m}{p}=1\right)$; tehát $\omega_r=\frac{\beta_r}{\gamma_r}p$ $(r=1,2,\ldots,m-1)$, ahol β_r,γ_r relatív prím természetes számok. Jelöljük Γ-val $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1}$ legkisebb közös többszörösét; akkor a 2) feltételből következik egy olyan $n_1<n_2<\cdots$ index-sorozat létezése, hogy $\nu_{k,k-1}$ osztható Γ-val, ha $k=n_1,n_2,\ldots$. 3) szerint van oly $\varrho>0$ konstans, hogy $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

[12] Most és később JENSEN [11] definíciója veendő tekintetbe: egy $[a,b]$-ben értelmezett $f(x)$ függvényt itt konvexnek, ill. konkávnak nevezünk, ha $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$, ill. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ minden $[a,b]$-ben fekvő x_1,x_2 pontpárra és nem mindig az egyenlőség jele érvényes (linearitás esete).

Tekintsünk három ekvidisztans pontot rendre $\frac{\mu}{\nu_n}p$, $\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p$, $\frac{\mu+1}{\nu_n}p$ ($\mu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) alakú abszcisszákkal, s képezzük a következő különbséget:

$$(7)\qquad \begin{aligned}\Delta &= \Phi\left(\frac{\mu}{\nu_n}p\right)+\Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu_n}p\right)-2\Phi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p\right)=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu\nu_k}{\nu_n}p\right)+\varphi\left(\frac{(\mu+1)\nu_k}{\nu_n}p\right)-2\varphi\left(\frac{(2\mu+1)\nu_k}{2\nu_n}p\right)\right]=\sum{}'+\sum{}'',\end{aligned}$$

ahol

$$(8)\qquad \begin{cases}\sum{}'=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)+\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right],\\ \sum{}''=\sum\limits_{k=n}^{\infty}c_k\left[\varphi(\mu\nu_{k,n}p)+\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)-2\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)\right]\end{cases}$$

($\nu_{n,k}(k<n)$ és $\nu_{k,n}(k\geqq n)$ pozitív egész számok). Az alábbiakban n értékét az $\{n_i\}$ sorozat elemeire korlátozzuk.

Minthogy $\nu_{n,k}=\prod\limits_{i=k}^{n-1}\nu_{i+1,i}$, a $\nu_{n,0}, \nu_{n,1}, \ldots, \nu_{n,n-1}$ számok oszthatók Γ-val; innen folyik, hogy az ω_r+sp ($r=0, 1, \ldots, m$; $s=0, \pm 1, \ldots$) pontok egyike sem eshetik valamely $\left[\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p, \frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right]$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$; $\mu=0, \pm 1, \ldots$) alakú intervallum belsejébe. Így $\varphi(x)$ szakaszonként konvex (konkáv) volta és az 1) feltétel alapján következik, hogy Σ' minden tagja ugyanolyan előjelű. Másfelől a Σ'' összegben nyilván $\varphi(\mu\nu_{k,n}p)=\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)=\varphi(0)$ és $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)=\varphi(0)$ vagy $=\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$ aszerint, amint $\nu_{k,n}$ páros vagy páratlan; ennélfogva

$$(9)\qquad \sum{}''=2\left[\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right](c_n+\sum c_k),$$

ahol az utolsó összeg k-nak azon n-nél nagyobb értékeire terjesztendő ki, melyekre $\nu_{k,n}$ páratlan. Látjuk, hogy Σ'' minden tagjának előjele ugyanaz, mint Σ' tagjaié.

Végeredményben (7), (8) és (9) alapján nyerjük:

$$\begin{aligned}|\Delta| &= \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\left|\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)+\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}\right)\right|+\\ &+2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|(|c_n|+\sum|c_k|)\geqq\\ &\geqq 2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right||c_n|\geqq 2\lambda\cdot\frac{p}{\nu_n}\quad (\mu=0, \pm 1, \ldots,; n=n_1, n_2, \ldots),\end{aligned}$$

ahol $\lambda = \frac{\varrho}{p}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|$; mivel minden előírt $(a-\delta,\ a+\delta)$ alakú intervallum tartalmaz olyan $\left[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$ (μ egész, $n=n_1, n_2, \ldots$) alakú számközt, melyre $a \in \left[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$, hacsak n elegendő nagy, a lemma felhasználásával (vö. [2]) azonnal adódik $\Phi(x)$ nem-deriválhatósága, qu. e. d.

4. §. Lipschitz-feltételt kielégítő $\varphi(x)$ alapfüggvény esete

10. Ha $\varphi(x)$-ről a konvexitás (konkavitás) helyett azt tesszük fel, hogy az alapintervallumban egyenletesen $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leqq H|x_1-x_2|$, akkor a $\operatorname{sgn} c_k =$ konstans feltétel elejthető, s az előzőket bizonyos irányban kiegészítő tételeket mondhatunk ki.

V. TÉTEL. *Legyen $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H\, 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$ és $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. A c_k együtthatók legyenek tetszőleges előjelűek, de tegyük fel, hogy*

$$\lim_{\overline{n\to\infty}}\left(\nu_n\sigma_n - A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\,\nu_k\right) > 0, \tag{10}$$

ahol $A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}$ és $\sigma_n = |\Sigma c_k|$; az utolsó összegben k azokon az $(n-1)$-nél nagyobb egész számokon fut végig, melyekre $\nu_{k,n}$ páratlan.[13]
Akkor $\Phi(x)$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk ismét három pontot, melyeknek abszcisszái rendre $\frac{\mu}{\nu_n}p$, $\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p$, $\frac{\mu+1}{\nu_n}p$ (μ egész) alakúak. A (7), (8) alatti jelölésekkel írhatjuk:

$$\begin{aligned}|\Sigma'| \leqq \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\left[\left|\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)-\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right|+\left|\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right|\right] \leqq \\ \leqq H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\,\nu_k;\end{aligned} \tag{11}$$

[13] Tehát — speciálisan — $\sigma_n = |c_n|$ vagy $\sigma_n = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right|$ aszerint, amint a $\nu_{k+1,k}$ $(k=0, 1, \ldots)$ viszonyszámok mindegyike páros, ill. páratlan. — Nyilvánvaló, hogy a c_k-kat a $\Sigma|c_k| < \infty$ feltételnek megfelelően és $\varepsilon\,(>0)$-t tetszőlegesen előírva, a $\nu_1, \nu_2, \ldots$ egész számokat mindig sorra megválaszthatjuk úgy, hogy a $\nu_n\sigma_n > A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k + \varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$ egyenlőtlenségek teljesüljenek, honnan következik (10).

másfelől nyerjük, akárcsak fent (vö. (9))

$$\sum'' = 2\left[\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right]\sum c_k, \tag{12}$$

ahol k a tételben jelzett értékeken fut végig.

Tehát elegendő nagy n-re

$$\begin{aligned}|\Delta| &\geqq \left|\sum''\right| - \left|\sum'\right| \geqq 2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|\sigma_n - H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k = \\ &= \frac{2}{\nu_n}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|\left(\nu_n\sigma_n - A_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\right) > 2\lambda\cdot\frac{p}{\nu_n},\end{aligned} \tag{13}$$

ahol $\lambda = \frac{\vartheta}{2p}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|$, ϑ-val jelölve a (10) alatti limesz inferiort.

Minden a pont lefedhető $\left[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$ $(\mu=0, \pm 1, \ldots; \quad n=1, 2, \ldots)$ alakú intervallummal, s ennek hossza 0-hoz tart, midőn $n\to\infty$. Így (13) (vö. (2)) és a lemma alapján arra jutunk, hogy $\Phi(x)$ a-ban nem deriválható, qu. e. d.

11. Mint a $\varphi(x)=\sin x$ példa mutatja, figyelmet érdemel az a lehetőség is, midőn az utolsó tétel $\varphi(0)\neq\left(\frac{p}{2}\right)$ kikötése nem teljesül. Erre vonatkozik a következő

VI. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x)\in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0\leqq x\leqq p)$ *és* $\varphi(0)=\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\neq\varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)$. *Tegyük fel, hogy teljesül a következő feltételek valamelyike: a* $\nu_{k+1,k}$ *viszonyszámok párosak (*1.* *eset), (*$4r+1$*)-alakúak (*2.* *eset), ill. (*$4r-1$*)-alakúak (*3.* *eset) elegendő nagy k-ra. Legyen továbbá*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\nu_n\tau_n - B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\right) > 0, \tag{14}$$

ahol $\left\{\begin{matrix}u_\varphi\\ U_\varphi\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\right\}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)\right|$ *jelölés mellett* $B_\varphi = H\frac{p}{4}u_\varphi^{-1}$ *és* $\tau_n=|c_n|$, *vagy* $\tau_n=\left|\sum_{k=n}^{\infty}c_k\right|$, *ill.* $\tau_n=\left|\sum_{l=0}^{\infty}c_{n+2l}\right| - \frac{U_\varphi}{u_\varphi}\left|\sum_{l=0}^{\infty}c_{n+2l+1}\right|$ *aszerint, amint az* 1.*, 2*, *ill.* 3*. *eset áll fenn.*

Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. Írjuk: $\frac{p}{2}=q$ és tekintsük a $\frac{\mu}{\nu_n}q, \frac{2\mu+1}{2\nu_n}q, \frac{\mu+1}{\nu_n}q$ $(\mu=0, \pm 1, \ldots; n=1, 2, \ldots)$ pontokat. Ha ismét a fenti jelöléseket alkalmazzuk p

helyett q-val, mindenekelőtt nyerjük:

$$(15)\qquad \left|\sum'\right| \leqq H\frac{q}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k.$$

Mivel $\varphi(\mu\nu_{k,n}q)=\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}q)=\varphi(0)$ és $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{q}{2}\right)=\varphi(0)$, $\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$, vagy $\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$ aszerint, amint $\nu_{k,n}\equiv 0 \pmod 2$, $\nu_{k,n}\equiv 1$, ill. $-1 \pmod 4$, a másik szóban forgó összeg számára adódik

$$(16)\qquad \sum'' = \begin{cases} 2c_n\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right] & (1.^*),\\ 2\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right]\sum_{k=n}^{\infty}c_k & (2.^*),\\ 2\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_n+c_{n+2}+\cdots)+ & \\ \qquad +2\left[\varphi(0)-\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_{n+1}+c_{n+3}+\cdots) & (3.^*),\end{cases}$$

rendre a jobboldalon feltüntetett eseteknek megfelelően, feltéve, hogy n nagyobb egy alkalmas természetes számnál.

Így (14) folytán elegendő nagy n-re

$$(17)\qquad |\varDelta| \geqq \left|\sum''\right|-\left|\sum'\right| \geqq 2\frac{u_\varphi}{\nu_n}\left(\nu_n\tau_n-B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|\right)>2\lambda\cdot\frac{q}{\nu_n},$$

ahol $\lambda=\frac{u_\varphi}{2q}\theta$, $\theta=\varliminf_{n\to\infty}\left(\nu_n\tau_n-B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|\right)$, τ_n-nek és B_φ-nek a tételben megadott jelentése mellett; a bizonyítás befejezése ezek után hasonlóan történik, mint fent (vö. (13)).

12. Ha $\{c_k\}$ és $\{\nu_k\}$ *geometriai haladványok,* azaz $c_k=c^k$ $(0<|c|<1)$, $\nu_k=\nu^k$ $(k=0,1,\ldots)$, akkor az V. és VI. tétel kikötései egyszerűbb alakot öltenek.

Valóban, ha felhasználjuk a következő zárt kifejezéseket:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|=\frac{(\nu|c|)^n-1}{\nu|c|-1},\quad \sum_{k=n}^{\infty}c_k=\frac{c^n}{1-c},\quad \sum_{l=0}^{\infty}c_{n+2l}=\frac{c^n}{1-c^2},\quad \sum_{l=0}^{\infty}c_{n+2l+1}=\frac{c^{n+1}}{1-c^2},$$

korolláriumként könnyen adódik a

VII. TÉTEL. *Legyen $\varphi(x)\in \mathrm{Lip}_H\, 1$ $(0\leqq x\leqq p)$, $0<|c|<1$ és ν egy 1-nél nagyobb egész szám.*

1) *Ha* $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$, *tegyük még fel, hogy* $\nu|c| \geqq 1 + A_\varphi$, *vagy* $1 + A_\varphi(1-c)$ $\left(A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}\right)$ *aszerint, amint* ν *páros vagy páratlan.*

2) *Amennyiben* $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) \neq \varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)$, *úgy páros* ν *mellett álljon fenn a* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi$, $\nu \equiv 1 \pmod 4$ *mellett a* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi(1-c)$, *végre* $\nu \equiv -1 \pmod 4$ *mellett a* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi(1-c^2)\,(1-\Theta_\varphi|c|)^{-1}$ *és* $|c| < \Theta_\varphi^{-1}$ *egyenlőtlenség, ahol* $B_\varphi = H\frac{p}{4}u_\varphi^{-1}$, $\Theta_\varphi = U_\varphi u_\varphi^{-1}$, $\begin{Bmatrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix} \left|\varphi(0) - \varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)\right|$.

Az összetartozó feltételek teljesülése esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} c^k \varphi(\nu^k x)$ *sor mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényt állít elő.*

5. §. Alkalmazások, megjegyzések

13. Vessük össze tételeinket az idevágó irodalom legnevezetesebb példáival.

Legyen $\varphi(x) = |x|$ $\left(|x| \leqq \frac{1}{2}\right)$ és $p = 1$, tehát $\varphi(x) = ((x))\,(-\infty < x < \infty)$, $c_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ ($\nu > 1$, egész). Akkor a III. tétel értelmében adódik: $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k((\nu^k x))$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, hacsak $c\nu \geqq 1$. E példát KNOPP adta meg ([12]) a $c\nu > 4$ megszorítással; viszont a legfontosabb speciális eset kétségkívül éppen $c\nu = 1$, mely a VAN DER WAERDEN-féle példának felel meg ([25]). — Hasonlóképpen: $\varphi(x) = ((x))$, $c_k = 10^{-k}$, $\nu_k = 2^{k!}$ mellett nyerjük FABER példáját ([7]), míg a $\varphi(x) = |\sin \pi x|$, $c_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, $\nu_k = \nu^k (\nu > 1)$ esetben arra jutunk, hogy $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k |\sin \nu^k \pi x|$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, hacsak $c\nu \geqq 1$. Az utóbbi szintén megtalálható KNOPPnál, de csak a $c\nu > 1 + \frac{3}{2}\pi \approx 5{,}71$ megszorítással.

Legyen $\varphi(x) = \cos \pi x$, $p = 2$, $H = \pi$, tehát $A_\varphi = \frac{\pi}{2}$ a VII. tételben. Akkor következik, hogy $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k \cos \nu^k \pi x$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, feltéve, hogy $0 < |c| < 1$, $\nu = 2, 3, \ldots$ és $\nu|c| \geqq 1 + \frac{\pi}{2}$ vagy

$\nu|c| \geqq 1 + \frac{\pi}{2}(1-c)$ aszerint, amint ν páros vagy páratlan. $\left(\nu c \geqq 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2{,}57,\right.$ tehát megfelel $c>0$ és bármely kérdéses ν esetén.$\left.\right)$ Ez WEIERSTRASS példája ([26]), de az ő feltételei c-re és ν-re: $0<c<1$, ν páratlan, $\nu c > 1 + \frac{3}{2}\pi \approx 5{,}71$. Írjuk: $\Phi(x) = \sin \pi x$, $p=2$, $H=\pi$, $u_\varphi = U_\varphi = \Theta_\varphi = 1$, $B_\varphi = \frac{\pi}{2}$, akkor folyik: $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k \sin \nu^k \pi x$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, feltéve, hogy $0<|c|<1$, $\nu=2,3,\ldots$ és $\nu|c| \geqq 1 + \frac{\pi}{2}$, vagy $\nu|c| \geqq 1 + \frac{\pi}{2}(1-c)$, ill. $\nu|c| \geqq 1 + \frac{\pi}{2}(1+|c|)$ aszerint, amint $\nu \equiv 0 \pmod 2$, vagy $\nu \equiv 1 \pmod 4$, ill. $\nu \equiv -1 \pmod 4$. (Így a $\nu|c| \geqq 1 + \pi$ feltétel elegendő minden szóba jövő c és ν esetén.) E példa DINItől származik ([5]); KNOPP a $0<|c|<1$, $\nu \equiv 0$ (mod 2), vagy $\nu \equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ és $\nu|c| > 1 + \frac{3}{2}\pi$ feltételek mellett diszkutálja. — Jelöljük $\chi(x)$-szel azt a páratlan, 2-periódusú függvényt, melyre $\chi(x) = ((x))$ $(0 \leqq x \leqq 1)$; újra a VII. tétel alapján adódik, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} c^k \chi(\nu^k x)$ mindenütt folytonos, nem-deriválható függvényt állít elő, hacsak $0<|c|<1$, $\nu=2,3,\ldots$, továbbá $\nu|c|$ nem kisebb, mint $\frac{3}{2}$, vagy $1+\frac{1}{2}(1-c)$, ill. $1+\frac{1}{2}(1+|c|)$, rendre páros, $(4r+1)$-, ill. $(4r-1)$-alakú ν-érték esetének megfelelően. Az utolsó sor szintén megtalálható KNOPP idézett dolgozatában, de a $0<|c|<1$, $\nu \equiv 0 \pmod 2$ vagy $\nu \equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ és $\nu|c|>4$ feltételekkel.

A fenti tételek természetesen tetszőleges számú hasonló példát szolgáltatnak. (A legegyszerűbbek: $\varphi(x)$ legyen szakaszonként lineáris, vagy körívekből, ill. parabolaívekből összetett grafikonú függvény stb.)

14. ZYGMUND egy újabb keletű híres dolgozatában[14] többek közt olyan $f(x)$ függvényekkel foglalkozik, melyekre fennáll

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h} = 0 \tag{18}$$

valamely x_0 pontban, ill. egyenletesen egy intervallumban ("smooth functions"); így az első rendszeres tárgyalását nyújtja egy függvényosztálynak, mely RIE-

[14] [27].

MANN óta alkalmazást nyert a trigonometrikus sorok elméletében, és megmutatja számos eredményen keresztül, hogy e függvények az egész valós analízisben lényeges szerepet játszanak. Mivel nyilvánvalóan a differenciálhatóság fogalmának egy általánosítása forog szóban, érdemesnek tartom megjegyezni, hogy a fent konstruált, nem-deriválható függvények semilyen szakaszon nem rendelkeznek egyenletesen a (18) tulajdonsággal; ezt könnyű igazolni (18) és (2) összehasonlítása útján.

Különben HARDYnak a WEIERSTRASS-függvényre vonatkozó mély eredményei azt mutatják, hogy az V. és VI. tételben c_k-ra és ν_k-ra tett kikötések bizonyos speciális esetben élesíthetők lehetnek.[15] Másfelől úgy látszik, hogy pl. a IV. tétel 3) kikötése (speciálisan: $c_k = c^k$, $\nu_k = \nu^k$ esetén $|c|\nu \geqq 1$) nélkülözhetetlen. E problémákkal, valamint a szóban forgó függvények DINI-számainak behatóbb vizsgálatával más alkalommal kívánok foglalkozni.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

IRODALOM

[1] F. A. BEHREND, Some remarks on the construction of continuous non differentiable functions, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **50** (1949), 463—481.

[2] A. S. BESICOVITCH, Diskussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit, *Bull. Acad. Sci. URSS, Leningrade*, (6) **19** (1925), 527—540.

[3] K. A. BUSH, Continuous functions without derivatives, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 222—225.

[4] J. DIEUDONNÉ, Sur une fonction continue sans dérivée, *Mathesis*, **47** (1933), 277—279.

[5] U. DINI, Su alcuni funzioni che in tutto in intervallo non hanno mai derivata, *Annali di Mat.*, (2) **8** (1877), 121—137.

[6] P. DU BOIS-REYMOND, Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente, *Journal für Math.*, **79** (1875), 21—37.

[7] G. FABER, Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **16** (1907), 538—540.

[8] H. HAHN, Über stetige Funktionen ohne Ableitung, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **26** (1918), 281—284.

[9] G. H. HARDY, Weierstrass' non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 301—325.

[10] T. H. HILDEBRANDT, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly*. **40** (1933), 547—548.

[15] A [9] dolgozatban többek között be van bizonyitva, hogy a $\sum a^n \cos b^n \pi x$ és $\sum a^n \sin b^n \pi x$ sorok mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényeket állítanak elő, ha $0 < a < 1$, $b > 1$ és $ab \geqq 1$. Egy másik tétel szerint a $\sum n^{-2} \sin n^2 \pi x$ RIEMANN-féle sor összegfüggvénye sem differenciálható, ha x irracionális.

[11] J. L. W. V. JENSEN, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 175—193.

[12] K. KNOPP, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbaren Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **2** (1918), 1—26.

[13] H. KOCH, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta. Math.*, **30** (1906), 145—174.

[14] G. KOWALEWSKI, Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion, *Acta Math.*, **44** (1923), 315—319.

[15] H. LEBESGUE, Une fonction continue sans dérivée, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 212—213.

[16] M. MIKOLÁS, Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), megjelenés alatt.

[17] B. N. MUKHOPADHYAY, On some generalisations of Weierstrass' non-differentiable functions, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **25** (1934), 179—184.

[18] W. ORLICZ, Sur les fonctions continues non dérivables, *Fund. Math.*, **34** (1947), 45—60.

[19] E. D. PEPPER, On continuous functions without a derivative, *Fund. Math.*, **12** (1928), 244—253.

[20] S. SAKS, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.*, **19** (1932), 211—219.

[21] A. N. SINGH, The theory and construction of non-differentiable functions, *Lucknow Univ. Studies.*, No 1. (Lucknow, 1935).

[22] E. STEINITZ, Stetigkeit und Differentialquotient, *Math. Annalen*, **52** (1899), 58—69.

[23] T. TAKAGI, A simple example of continuous function without derivative, Journal Phys.-Math. Soc. Tokyo, 1 (1903), 176—177.

[24] R. TAMBS LYCHE, Une fonction continue sans dérivée, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 208—211

[25] B. L. VAN DER WAERDEN, Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 474—475.

[26] K. WEIERSTRASS, Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Werke* **2**, 71—74. (1872 VII. 18-án tartott előadás.)

[27] A. ZYGMUND, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), 47—76.

RÉSZECSKESZÁMLÁLÓK ELMÉLETÉBEN FELLÉPŐ SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Időben véletlenszerűen érkező korpuszkulák (fotonok) észlelésére legelterjedtebben a Geiger—Müller számlálót, az elektronsokszorozót és a kristályszámlálót használják. A korpuszkulák (fotonok) érkezési törvényszerűségének a vizsgálata a következőképpen történik: A vizsgálandó részecskéket a számlálócsőbe bocsátjuk. A számlálócső a beérkező részecskék hatására (esetleg ezek közül bizonyosak hatására) feszültség-impulzusokat szolgáltat. A keletkezett impulzusok áthaladnak egy vagy több (erősítő, formáló, leosztó stb.) fokozaton és végül egy többnyire mechanikus számláló regisztrálja az impulzusokat.

A fenti jelenséggel kapcsolatban felmerül az a probléma, hogy a számlálócsőbe jutó részecskék érkezési törvényszerűségének és a berendezés sajátságainak ismeretében megállapitsuk a regisztrálások törvényszerűségét. Ennek a feladatnak megoldására azért van szükségünk, hogy egyrészt a számlálóberendezés sajátságait célunknak megfelelően, optimálisan választhassuk meg, másrészt a regisztrált események folyamatából vissza tudjunk következtetni a vizsgált (valódi) események folyamatára.

Az egyetlen számlálócsővel történő számlálás mellett fontos szerepet játszik egyidejűleg több számlálócsővel történő vizsgálat is. Ennél a jelenségnél fontos feladat a véletlen koincidenciák törvényszerűségének megállapítása. Ennek ismeretére különösen atommagfizikai méréseknél, kozmikus sugárzás vizsgálatánál stb. van szükség.

A részecskeszámlálás jelenségének matematikai tárgyalásával elsőnek L. v. BORTKIEWITZ [5] és RUTHERFORD és tanítványai [42] foglalkoztak. Azóta a matematikai és fizikai irodalomban számos ilyen jellegű dolgozat jelent meg, amelyek közül többet később említünk meg.

Jelen értekezésünkben feltesszük, hogy ismerjük a *valódi események folyamatát* (a számlálócsőbe jutó részecskék érkezési időpontjainak sorozatát leíró törvényt) és *meghatározzuk a ritkított* (szelektált) *események folyamatát* (a számlálóberendezés egyes fokozatainál észlelt impulzusok kezdőpontjainak sorozatára érvényes törvényt) és végül a *regisztrált események folyamatát* (a mechanikus számláló regisztrálási időpontjainak sorozatát leíró törvényt). Továbbá több számlálócsővel történő egyidejű vizsgálat esetén meghatározzuk a lehetséges *véletlen koincidenciák folyamatának* törvényszerűségét.

A felvetett probléma megoldására kétféle út kínálkozik.

Az egyik, a precíz tárgyalás, tekintetbe veszi a feszültségimpulzusok alakjának időbeli lefolyását és a számlálóberendezés olyan sajátságait, amelyek befolyást gyakorolnak a feszültségimpulzusok időbeli változására. Egy ilyen tárgyalás bonyolult matematikai apparátust igényel. A kérdés ilyen tárgyalásával néhány egyszerű modell esetén szerző [51], [52], [53] dolgozataiban foglalkozik.

A másik, a közelítő tárgyalás, csupán arra van tekintettel, hogy egy adott időpillanatban folyamatban van-e impulzus vagy nincs, de nem veszi tekintetbe a feszültségimpulzusok alakját. A probléma ilyen tárgyalásával a matematikai és fizikai irodalom számos dolgozata foglalkozik. Jelen dolgozatunkban mi is ezt az utat követjük. Néhány új elv alkalmazásával az eddigieknél messzebbmenő eredményeket érünk el és több, eddig heurisztikusan indokolt eredmény precíz bizonyítását megadjuk.

I. AZ ÉSZLELÉSEK KÉRDÉSE

1. §. A véletlen ritkítás törvénye

Tegyük fel, hogy egy számlálócsőhöz $0 \leq t < \infty$ időközben $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ időpontokban érkeznek részecskék ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$). A számlálócső bizonyos részecskék érkezési időpontjában egy jelzést küld a következő fokozatba, bizonyosakra nem. Azaz a számlálócső a valódi $\{t_n\}$ eseményfolyamatot megritkítja. Jelölje a ritkított eseményfolyamatot $\{t'_n\}$ sorozat, amely részsorozata az előzőnek. A számlálóberendezés minden további fokozata hasonlóképpen ritkítja meg az előző fokozat által előállított eseménysorozatot. Ily módon $\{t_n\}$, $\{t'_n\}$, $\{t''_n\}, \ldots$ stb. eseménysorozatokat nyerjük. Végül az utolsó eseménysorozat szolgáltatja a regisztrált események folyamatát.

A $\{t_n\}$ sorozat modellje. Feltesszük, hogy az alapul vett $\{t_n\}$ sorozatot a következő törvény határozza meg: A $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \ldots; t_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók. Feltesszük, hogy $\mathbf{P}\{t_n - t_{n-1} \leq x\} = F(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Legyen továbbá

$$\mu = \int_0^\infty x \, dF(x)$$

és

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x-\mu)^2 dF(x),$$

megengedve a végtelen értékeket is. A $\{t_n\}$ sorozatot röviden *rekurrens események sorozatának* nevezzük.

Feltesszük, hogy a számlálócső és a számlálóberendezés további fokozatai is az alábbi véletlen ritkítási törvény szerint működnek. Ezt a ritkítási modellt G. E. ALBERT és L. NELSON [2] vezették be speciális esetben, különböző részecskeszámlálók elméletének egységes tárgyalására.

Mivel minden egyes fokozatnál hasonló törvény szerint történik a ritkítás, ezért elegendő csupán az első fokozatra szorítkozni. Tekintsük tehát a $\{t_n\}$ eseménysorozatot és tegyük fel, hogy a $\{t'_n\}$ sorozat a következőképpen nyerhető:

A VÉLETLEN RITKÍTÁS ÁLTALÁNOS MODELLJE. *Legyen* $t'_0 = t_0$ *és tegyük fel, hogy* t_0 *időpontban kezdődik egy* χ_0 *időtartamú impulzus. Sorra haladva a* t_n $(n \geqq 1)$ *időpontokban előforduló események közül mindazok, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn impulzus folyamatban van, egymástól függetlenül* p *valószínűséggel* $(0 \leqq p \leqq 1)$ *indítanak el újabb impulzusokat és ha nincs impulzus folyamatban, úgy* 1 *valószínűséggel. Jelölje az egymást követő impulzusok időtartamait rendre* $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots$ *valószínűségi változó, amelyekről feltesszük, hogy azonos eloszlású, egymástól és egyéb változóktól független, pozitív valószínűségi változók. Legyen* $\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} = H(x)$ *és*

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dH(x),$$

továbbá

$$\beta^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2 d\,H(x),$$

megengedve a végtelen értékeket is. A $\{t'_n\}$ *sorozatot a* $\{t_n\}$ *időpontok közül azok alkotják, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn nincs folyamatban impulzus.*

Ezen modell speciális eseteként megkapjuk a részecskeszámlálók szokásos I. és II. modelljét.

I. MODELL. *Az általános modell ama speciális esete, midőn* $p = 0$.

II. MODELL. *Az általános modell ama speciális esete, midőn* $p = 1$.

Célszerű még a következő modellt is bevezetni a véletlen ritkításra.

III. MODELL. *Legyen* $t'_0 = t_0$ *és* $t'_n = t_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n}$, *ahol* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ *egyforma eloszlású, egymástól és a* t_n *időpontoktól független valószínűségi változók* $\mathbf{P}\{\nu_n = k\} = p_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *valószínűségeloszlással.*

A $\{t_n'\}$ sorozat törvénye. Ha a ritkított $\{t_n'\}$ sorozatot tekintjük, úgy könynyen látható, hogy $\{t_n'\}$ is rekurrens eseménysorozat. Ugyanis $t_0'=0$ és a $t_n'-t_{n-1}'$ $(n=1,2,3,\ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók, ami onnan következik, hogy a t_n' időpontok a folyamat regenerációs pontjait alkotják. Jelölje a $t_n'-t_{n-1}'$ $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változók ismeretlen eloszlásfüggvényét $G(x)$ és legyen

$$A=\int_0^\infty x\,d\,G(x)$$

és

$$B^2=\int_0^\infty (x-A)^2\,d\,G(x),$$

ahol a végtelen értékeket is megengedjük.

Továbbá jelölje $P(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban nincs folyamatban impulzus.

Végül a $t_0', t_1', t_2', \ldots, t_n', \ldots$ időpontokban kezdődő (egy vagy esetleg több impulzusból álló) impulzusszakaszok az ún. *holt idők* hosszait jelölje rendre $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ valószínűségi változó. Ezek egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Legyen $\mathbf{P}\{\tau_n \leqq x\}=U(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ és

$$T=\int_0^\infty x\,d\,U(x).$$

MEGJEGYZÉSEK: A részecskeszámlálók elméletében rendszerint feltételezik, hogy a részecskéknek a számlálócsőhöz történő érkezési időpontjai Poisson-folyamatot követnek. Ha $\lambda(t)$ jelöli az eseménysűrűséget, úgy annak a valószínűsége, hogy $(0,t)$ időközben pontosan n részecske érkezik a számlálócsőhöz

$$w(t,n)=e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^n}{n!},$$

ahol

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du$$

a $(0,t)$ időközben érkező részecskék várható száma. Ha a Poisson-folyamat időben homogén, azaz $\lambda(t)\equiv\lambda$ (állandó), úgy

$$w(t,n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

és

$$\Lambda(t)=\lambda t.$$

Ezen utóbbi esetben, mint ismeretes, a $\{t_n\}$ sorozat rekurrens események sorozata, éspedig $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, ha $x\geqq 0$. Így, ha a fenti modellek bármelyike szerint is történik a további ritkítás, érvényes lesz, hogy a $\{t_n'\}$, $\{t_n''\}, \dots$ stb. sorozatok is rekurrens eseménysorozatok lesznek. Tehát az általunk vizsgált modell magában foglalja ezt a legfontosabb speciális esetet és ugyanakkor általánosabb kérdések vizsgálatát is lehetővé teszi.

Szólnunk kell az ismertetett ritkítási modellek alkalmazási lehetőségeiről.

Az I. modell Geiger—Müller számlálócsővel történő észlelés esetén alkalmazható. A Geiger—Müller számlálónál minden egyes észlelés kivált egy impulzust, amelynek tartama alatt (az ún. kisülési idő, vagy holtidő alatt) esetleg érkező újabb részecskék elvesznek az észlelés számára. Továbbá mechanikus regisztrálókra is az I. modell alkalmazható. Utóbbi berendezéseknél a tehetetlenségi erő folytán lép fel bizonyos holtidő.

A II. modell főleg elektronsokszorozókkal történő részecskeszámlálásnál alkalmazható. Elektronsokszorozóknál minden egyes részecske létrehoz egy bizonyos időtartamú impulzust, amelynek tartama alatt esetleg érkező újabb részecskék nemcsak hogy elvesznek az észlelés számára, de ráadásul megnyújtják az éppen folyamatban levő impulzus időtartamát. Kristályszámlálókra hasonlóképpen a II. modell alkalmazható. Továbbá a II. modell alkalmazható a számlálóberendezés egyes fokozataira is, ha azok elektroncsővel működnek, azaz, ha a tehetetlenségi erő elhanyagolható.

A III. modell a leosztó fokozatra alkalmazható. Ha a leosztó csupán minden r-edik jelzést engedi tovább, úgy, $p_r = 1$, míg $p_k = 0$, ha $k \neq r$. Megjegyezzük még, hogy ha a számlálócső képes is jelezni, általában akkor sem szólal meg minden részecskére, hanem létezik egy bizonyos p megszólalási valószínűség. Ha ezt is tekintetbe vesszük, úgy tulajdonképpen egy véletlen ritkításról van szó, amely a III. modellt követi és $p_k = p(1-p)^{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Megjegyezzük azonban, hogy a valóságos helyzet általában bonyolultabb, mint fent vázoltuk. Geiger—Müller számlálónál például a kisülési idő után fellépő regenerációs idő alatt érkező részecskék zavarják az ideális helyzetet, míg elektronsokszorozóknál a tértöltés fellépte okoz zavaró jelenségeket. Jelenlegi modelljeink ezen zavaró körülmények hatását figyelmen kívül hagyják.

2. §. A feladat kitűzése

Tekintsünk egy alap $\{t_n\}$ rekurrens eseménysorozatot. Feltesszük, hogy az előző fejezetben definiált ritkítási modellek szerint ezen sorozatból újabb $\{t_n'\}$, $\{t_n''\}, \dots$ sorozatokat nyerünk. Az egymást követő ritkítási folyamatok különböző modellek szerint és különböző paraméter értékek mellett történhetnek. Megállapítandó az egyes $\{t_n'\}$, $\{t_n''\}, \dots$ sorozatok törvényszerűsége. Mivel — mint láttuk — ritkítás által mindig hasonló típusú folyamatra jutunk, tehát elegendő egyetlen ritkítás folyamatot részletes vizsgálat tárgyává tenni.

Ennek ismeretében feladatunkat szukcesszív lépésekben meg tudjuk oldani. Elegendő tehát, ha arra szorítkozunk, hogy $\{t_n\}$ ismeretében valamennyi ritkítási modell esetén megállapítsuk a $\{t'_n\}$ sorozat törvényszerűségét.

A feladat részletezése. Jelölje ν_t valószínűségi változó a $\{t'_n\}$ sorozatban $(0, t]$ időközben előforduló események számát (t'_0 nincs számításba véve). Meghatározzuk a $\mathbf{P}\{\nu_t \leq n\}$, $\mathbf{P}\{\nu_{T+t} - \nu_T \leq n\}$ valószínűségeket és a $\lim\limits_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\nu_{T+t} - \nu_T \leq n\}$ határértéket. Amennyiben ezen utóbbi határérték létezik, ezt tekintjük a szűkebb értelemben vett stacionárius megoldásnak. Továbbá meghatározzuk a $\mathbf{P}\{\nu_{\tau+t} - \nu_\tau \leq n\}$ valószínűséget, ahol τ a $(0, T)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ezen utóbbi valószínűség határértéke $T \to \infty$ esetben szolgáltatja a tágabb értelemben vett stacionárius megoldást. Ezután ν_t aszimptotikus eloszlását határozzuk meg. Végül $P(t)$ meghatározásával és a $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = P$ határérték létezésének a kérdésével foglalkozunk.

A szakirodalom áttekintése. A fent vázolt kérdésekkel legalábbis egyes speciális esetekben a matematikai és fizikai irodalom számos dolgozata foglalkozik. A ritkított események sűrűségének megállapításával alapul vett Poisson-folyamat esetén L. I. SCHIFF [44], A. E. RUARK és F. E. BRAMMER [41] foglalkoznak. Az I. modellel alapul vett Poisson-folyamat és állandó impulzusidő mellett B. V. GNYEGYENKO [21], J. D. KURBATOV és H. B. MANN [31], J. GILTAY [20], RES JOST [26], W. FELLER [17], szerző [46] és A. RAMAKRISHNAN és P. M. MATHEWS [39] foglalkoznak, változó impulzusidő mellett pedig szerző [47] és A. RAMAKRISHNAN [40]. Rekurrens alapfolyamat esetével J. M. HAMMERSLEY [22] és szerző [54], [55] munkái foglalkoznak. Szukcesszív ritkítások kérdésével pedig R. JOST [26] és S. MALMQUIST [34] foglalkoznak. A II. modellel alapul vett Poisson-folyamat és állandó időtartamú impulzusok esetén C. LEVERT és W. L. SCHEEN [32] (vö. szerző [57]), L. KOSTEN [30], W. FELLER [17] és A. RAMAKRISHNAN és P. M. MATHEWS [39] foglalkoznak, tetszőleges impulzusidők mellett pedig szerző [48], [49], J. M. HAMMERSLEY [22] és A. RAMAKRISHNAN [40]. Rekurrens alapfolyamat esetével F. POLLACZEK [37] és szerző [55] foglalkozik. Az általános ritkítás kérdésével alapulvett Poisson-folyamat és állandó impulzus idő mellett G. E. ALBERT és L. NELSON [2] foglalkoznak.

A következőkben az általános ritkítás kérdését csupán $\chi_n \equiv \alpha$ (állandó) esetben oldjuk meg, bár az általános esetre is adunk eredményeket. Az I., II. és III. modell teljes tárgyalását megadjuk. Az így nyert eredmények speciális esetként tartalmazzák a fentemlített eredményeket. Kivételt képez B. V. GNYEGYENKO [21] dolgozata, amelyben nem homogén Poisson-folyamat esetével is foglalkozik. Ezt a kérdést dolgozatunk nem érinti.

3. §. A $\{t_n\}$ sorozat vizsgálata

Tekintsük a $\{t_n\}$ eseménysorozatot. Jelölje μ_t a $(0, t]$ intervallumban előforduló események számát. A μ_t valószínűségi változó eloszlására vonatkozóan az alábbi eredményeket mondhatjuk ki.

A μ_t eloszlása. Legyen $\mathbf{P}\{\mu_t \leqq n\} = W(t, n)$. Mivel a $\mu_t \leqq n$ esemény azonos a $t < t_{n+1}$ eseménnyel, ezért felírható, hogy

$$W(t, n) = \mathbf{P}\{t < t_{n+1}\} = 1 - \mathbf{P}\{t_{n+1} \leqq t\} = 1 - F_{n+1}(t), \tag{1}$$

ahol $F_n(t)$ jelöli az $F(t)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres kompozícióját ($F_0(t) = 1$, ha $t \geqq 0$ és $F_0(t) = 0$, ha $t < 0$). Ugyanis $t_{n+1} = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \ldots + (t_{n+1} - t_n)$ előállítás szerint látszik, hogy t_{n+1} egyenlő $n+1$ független valószínűségi változó összegével, amelyek mindegyikének eloszlásfüggvénye $F(x)$.

A μ_t várható értéke és momentumai. Jelölje $m(t)$ a $(0, t]$ időközben előforduló események várható számát, azaz $m(t) = \mathbf{M}\{\mu_t\}$. Erre fennáll

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t). \tag{2}$$

Legyen μ_t r-edik momentuma $m_r(t) = \mathbf{M}\{\mu_t^r\}$. Erre fennáll

$$m_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^r [W(t, n) - W(t, n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] F_{n+1}(t), \tag{3}$$

ahol a jobboldal Abel-féle sorátrendezéssel nyerhető. A fenti sor konvergens, ha $F(0) < 1$. Ez esetünkben teljesül, feltettük ugyanis, hogy $F(0) = 0$.

Legyen továbbá $d^2(t) = \mathbf{D}^2\{\mu_t\}$, azaz $d^2(t) = m_2(t) - m_1^2(t)$.

Az (1), (2) és (3) függvények könnyen meghatározhatók Laplace-transzformáció segítségével. Legyen ugyanis

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \quad (\Re(s) \geqq 0),$$

úgy $\Re(s) > 0$-ra

$$\int_0^{\infty} e^{-st} W(t, n)\, dt = \frac{1 - [\varphi(s)]^{n+1}}{s}, \tag{4}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}, \tag{5}$$

és

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dm_r(t) = \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{S}_r^j \frac{j!\,[\varphi(s)]^j}{[1 - \varphi(s)]^j},$$

ahol $\mathfrak{S}_r^j$ a másodfajú Stirling-számokat jelöli. (vö. CH. JORDAN [25]). A fenti képletek segítségével a kérdéses függvények egyértelműen meghatározhatók.

Elemi úton igazolhatók a következő asszimptotikus képletek (S. TÄCKLIND [58]):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{6}$$

és ha $\sigma^2 < \infty$, úgy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d^2(t)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}. \tag{7}$$

Ha feltesszük, hogy $F(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény (azaz nincs olyan $d>0$ szám, amelyre $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{t_1 = jd\} = 1$) és $\mu < \infty$, úgy tetszőleges $h>0$-ra fennáll (D. BLACKWELL [4]):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t+h)-m(t)}{h} = \frac{1}{\mu}. \tag{8}$$

J. L. DOOB [12] ezt az összefüggést arra az esetre bizonyította be, midőn feltesszük, hogy $F_n(t)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ egyike sem szinguláris eloszlásfüggvény.

Megjegyezzük, hogy az $F(x)$-re vonatkozó további megszorító feltevések mellett (S. TÄCKLIND [59], W. FELLER [18], D. R. COX és W. L. SMITH [6]) az is érvényes, hogy

$$\lim_{t\to\infty} m'(t) = \frac{1}{\mu}. \tag{9}$$

A μ_t aszimptotikus eloszlása. Most bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha $\sigma^2 < \infty$, úgy μ_t aszimptotikusan normális eloszlást követ, azaz fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\mu_t - \dfrac{t}{\mu}}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \tag{10}$$

A bizonyítás W. FELLER [19] dolgozatában közölt módszere segítségével könnyen elvégezhető. Vegyük tekintetbe ugyanis, hogy tetszőleges t és n értékre fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\mu_t < n\} = \mathbf{P}\{t < t_n\}. \tag{11}$$

Legyen most

$$n = \left[\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}} \right].$$

Mivel

$$\mathbf{P}\{\mu_t < n\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} < \frac{n - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}\right\}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} = x$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mu_t < n\} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} < x\right\}.$$

Másrészt, mivel

$$\mathbf{P}\{t < t_n\} = \mathbf{P}\left\{\frac{t - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{t_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = -x$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{t < t_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-x < \frac{t_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}.$$

A centrális határeloszlástétel szerint azonban

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-x < \frac{t_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

és így (10) a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mu_t < n\} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{t < t_n\}$ egyenlőség alapján adódik.

Felmerül a kérdés, hogy egyéb esetekben μ_t aszimptotikus eloszlása mivel egyenlő. A (11) összefüggésből könnyen következik, hogy ha μ_t-nek van aszimptotikus eloszlása, úgy az csakis stabilis eloszlás lehet. Az alábbiakban megadjuk mindazon eseteket, amelyekben a μ_t változónak létezik aszimptotikus eloszlása. Az alábbi tételek W. FELLER [19] munkájában rekurrens eseményekre bebizonyított tételeinek folytonos esetre való kiterjesztései. Tegyük fel tehát, hogy $\sigma^2 = \infty$. Erre az esetre a következő tétel érvényes:

A μ_t változónak akkor és csakis akkor létezik aszimptotikus eloszlása, ha

(12) $$1 - F(x) = x^{-\alpha} h(x),$$

ahol $0<\alpha<2$ *és bármely pozitív* c *állandóra*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(cx)}{h(x)}=1.$$

Ez a tétel a (11) összefüggés tekintetbevételével W. DOEBLIN [8] eredményéből következik.

Ha $\sigma^2=\infty$ *és* $\mu<\infty$ *és feltesszük, hogy fennáll* (12) $1\leqq\alpha<2$ *kitevővel, úgy*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t-\frac{t}{\mu}}{b_t\mu^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}}<x\right\}=1-G_\alpha(-x), \tag{13}$$

ahol b_t *értékét* $1-F(b_t)\sim\frac{1}{t}$ *követelmény szabja meg és* $G_\alpha(x)$ *az a stabilis eloszlásfüggvény, amelynek karakterisztikus függvényére,* $\gamma_\alpha(z)$*-re érvényes, hogy*

$$\log\gamma_\alpha(z)=-|z|^\alpha\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}-i\sin\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sgn} z\right)\Gamma(1-\alpha).$$

A bizonyítás egyszerűen abból következik, hogy a mondott feltételek mellett fennáll (W. DOEBLIN [8]) a következő határeloszlástétel:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{t_n-n\mu}{b_n}<x\right\}=G_\alpha(x).$$

Tekintsük most a (11) összefüggést és legyen abban

$$n=\left[\frac{t}{\mu}+xb_t\mu^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}\right].$$

Mivel

$$\mathbf{P}\{\mu_t<n\}=\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t-\frac{t}{\mu}}{b_t\mu^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}}<\frac{n-\frac{t}{\mu}}{b_t\mu^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}}\right\}$$

és

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n-\frac{t}{\mu}}{b_t\mu^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}}=x,$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\mu_t<n\}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t-\frac{t}{\mu}}{b_t\mu^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}}<x\right\}.$$

Másrészt, mivel

$$\mathbf{P}\{t < t_n\} = \mathbf{P}\left\{\frac{t-n\mu}{b_n} < \frac{t_n-n\mu}{b_n}\right\}.$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t-n\mu}{b_n} = -x,$$

ugyanis $\frac{b_t}{b_n} \sim \left(\frac{1-F(b_n)}{1-F(b_t)}\right)^{1/\alpha} \sim \left(\frac{t}{n}\right)^{1/\alpha} \sim \mu^{1/\alpha}$, tehát

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{t < t_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-x < \frac{t_n-n\mu}{b_n}\right\},$$

ahonnan (11) következtében a tétel helyessége már következik.

Megjegyezzük, hogy ha $\mu = \infty$ és $\alpha = 1$, úgy a fentihez hasonló tétel érvényes, csupán t/μ helyettesítendő valamilyen lassabban növekedő függvénnyel.

Ha $\mu = \infty$ *és feltesszük, hogy fennáll* (12) $0 < \alpha < 1$ *kitevővel, úgy*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mu_t[1-F(t)] > x\} = G_\alpha(x^{-1/\alpha}).$$

A bizonyítás az előző tétel bizonyításához hasonlóan W. DOEBLIN [8] tételén alapszik. (vö. E. B. DÜNKIN [13]).

Megjegyezzük, hogy ha μ_t helyett a $\mu_{T+t}-\mu_T$ változót tekintjük, úgy erre is érvényesek a fenti tételek. Így a stacionárius határesetben ($T\to\infty$) is a fenti aszimptotikus eloszlások érvényesek.

A stacionárius megoldás. Legyen $\mathbf{P}\{\mu_{T+t}-\mu_T \leqq n\} = W_T(t, n)$, azaz $W_T(t, n)$ annak a valószínűsége, hogy $(T, T+t]$ intervallumban legfeljebb n esemény fordul elő. Erre fennáll, hogy

$$W_T(t, n) = 1 - F_T^*(t) * F_n(t), \tag{14}$$

ahol

$$F_T^*(t) = \int_T^{T+t} [1-F(T+t-u)]\,dm(u). \tag{15}$$

Ez a következőképpen indokolható. Vezessük be az $\eta_T = t_{\mu_T+1} - T$ valószínűségi változót, azaz η_T jelenti a T időpont után előforduló első eseménynek a T időponttól vett távolságát. Most $\mu_{T+t}-\mu_T \leqq n$, ha $t < \eta_T + (t_{\mu_T+2} - t_{\mu_T+1}) + \cdots + (t_{\mu_T+n+1} - t_{\mu_T+n})$ és ezen utóbbi egyenlőtlenség jobboldalán $n+1$ független valószínűségi változó összege áll. (14) annak figyelembevételével adódik, hogy η_T eloszlásfüggvénye (15). Ez az utóbbi állítás pedig könnyen belátható, ugyanis $F_T^*(t)$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $(T, T+t]$ időközben legalább egy esemény előfordul. Ezen utóbbi esemény pedig több egymást kizáró módon jöhet létre: $(T, T+t]$ intervallumban az utolsó előforduló esemény lehet a $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Így tehát

$$F_T^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T < t_n \leq T+t < t_{n+1}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_T^{T+t} [1-F(T+t-u)]\,dF_n(u),$$

amely (2)-re való tekintettel megegyezik (15) fenti alakjával.

Bennünket a határeloszlás érdekel. Vizsgáljuk ezért a $\lim_{T\to\infty} F_T^*(t)$ határértéket. Ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás és $\mu < \infty$, úgy fennáll $\lim_{T\to\infty} F_T^*(t) = F^*(t)$, ahol

$$F^*(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1-F(u)]\,du. \tag{16}$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $g_T(u) = m(T+t) - m(T+t-u)$ rögzített t mellett. Ekkor

$$F_T^*(t) = \int_0^t [1-F(u)]\,dg_T(u).$$

Mivel $\lim_{T\to\infty} g_T(u) = u/\mu$ az $F(u)$ monotonitásának felhasználásával könnyen igazolható, hogy $F_T^*(t) \to F^*(t)$, ha $T \to \infty$.

Ez az eredmény heurisztikus meggondolások alapján már régóta ismeretes (vö. pl. S. MALMQUIST [34]). J. L. DOOB [12] bebizonyította arra az esetre, ha $F_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nem szinguláris eloszlás. A fenti esetre szerző [50] és E. B. DÜNKIN [13] adtak bizonyítást.

A fentiekből következik, hogy ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás és $\mu < \infty$, úgy $\lim_{T\to\infty} W_T(t, n) = W^*(t, n)$ határérték is létezik, ahol

$$W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t). \tag{17}$$

Ez szolgáltatja a *szűkebb értelemben vett stacionárius megoldást*, vagyis annak a valószínűségét, hogy a végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén t időtartam alatt legfeljebb n esemény fordul elő.

A fenti $W^*(t, n)$ valószínűségeloszlás olyan esetekben is létezik, midőn $F(x)$ rácsos eloszlás, ekkor azonban nem tekinthető $W_T(t, n)$ határértékének. Kérdés ilyen esetben, hogyan értelmezhető $W^*(t, n)$. Most megmutatjuk, hogy a stacionárius $W^*(t, n)$ eloszlásnak adható egy enyhébb értelmezése is, amely nem tesz kikötést $F(x)$-re. Ez a következő: válasszunk a $(0, T)$ időintervallumon egy egyenletes eloszlást mutató véletlen τ pontot. Jelölje $\overline{W}_T(t, n)$ annak a valószínűségét, hogy $(\tau, \tau+t]$ időintervallumban legfeljebb n esemény fordul elő. Ez a valószínűség könnyen megállapithatóan

(18) $$\overline{W}_T(t,n)=1-\overline{F}_T(t)*F_n(t),$$

ahol most

(19) $$\overline{F}_T(t)=\int_0^t[1-F(t-u)]\frac{m(T+u)-m(u)}{T}du.$$

Ha $\mu<\infty$, úgy $\lim\limits_{t\to\infty} m(t)/t=1/\mu$ következtében fennáll $\lim\limits_{T\to\infty}\overline{F}_T(t)=F^*(t)$, ahol $F^*(t)$-t (16) értelmezi. Tehát (18) szerint $\mu<\infty$ esetén fennáll, hogy

$$\lim_{T\to\infty}\overline{W}_T(t,n)=W^*(t,n),$$

ahol $W^*(t,n)$-et (17) értelmezi. Ezen utóbbi értelmezés szerint nyert megoldást nevezzük *tágabb értelemben vett stacionárius* megoldásnak.

A fenti valószínűségeloszlások is könnyen meghatározhatók Laplace-transzformáció segítségével, ha tekintetbe vesszük, hogy (15) szerint

$$\int_0^\infty e^{-st}d_tF_T^*(t)=[1-\varphi(s)]e^{sT}\int_T^\infty e^{-su}dm(u)$$

és (16) szerint

(20) $$\int_0^\infty e^{-st}dF^*(t)=\frac{1-\varphi(s)}{\mu}.$$

Így (17) szerint

(21) $$\int_0^\infty e^{-st}W^*(t,n)\,dt=\frac{1}{s}-\frac{[1-\varphi(s)][\varphi(s)]^n}{\mu s^2}.$$

A $\{W^*(t,n)\}$ valószínűségeloszlás r-edik momentuma a következő:

$$m_r^*(t)=\sum_{n=0}^\infty[(n+1)^r-n^r][1-W^*(t,n)]$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dm_r^*(t)=\frac{1}{\mu s}\sum_{j=1}^r\mathfrak{S}_r^j\frac{j!\,[\varphi(s)]^{j-1}}{[1-\varphi(s)]^{j-1}}.$$

Speciálisan az $m^*(t)=m_1^*(t)$ várható értékre fennáll, hogy

$$m^*(t)=\sum_{n=0}^\infty[1-W^*(t,n)]=\frac{t}{\mu}.$$

1. MEGJEGYZÉS. Ha feltesszük, hogy $F(x)$ nem rácsos eloszlás és $\sigma^2 < \infty$, úgy fennáll, hogy

$$m(t) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \varepsilon_t, \tag{22}$$

ahol $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_t = 0$.

A (22) formulára bizonyos megszorító feltevések mellett analitikus bizonyításokat adtak. W. FELLER [18] és S. TÄCKLIND [59]. Most (22)-t az ismert WALD-féle egyenlőség (vö. A. N. KOLMOGOROV és JU. V. PROHOROV [29]) alapján bizonyítjuk. Tekintsük a $(t_1 - t_0), (t_2 - t_1), \ldots, (t_n - t_{n-1}), \ldots$, valószínűségi változókat és a $\mu_t + 1$ változót. A $\mu_t + 1 = n$ esemény független a $(t_{n+1} - t_n), (t_{n+2} - t_{n+1}), \ldots$ valószínűségi változóktól. Így WALD egyenlősége alapján felírható, hogy $\mathbf{M}\{t_{\mu_t+1}\} = \mu \mathbf{M}\{\mu_t + 1\}$, azaz $t + \mathbf{M}\{\eta_t\} = \mu[m(t) + 1]$, ahonnan

$$m(t) - \frac{t}{\mu} = \frac{\mathbf{M}\{\eta_t\}}{\mu} - 1.$$

A mondott feltételek mellett η_t határeloszlását $t \to \infty$-re (16) szolgáltatja és így

$$\int_0^\infty x\, dF^*(x) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} \tag{23}$$

szerint fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\{\eta_t\} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}.$$

Végül

$$\lim_{t\to\infty} \left[m(t) - \frac{t}{\mu} \right] = \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

2. MEGJEGYZÉS. A fentiekkel kapcsolatban rá szeretnénk mutatni arra a paradox tényre, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\{\eta_t\} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}.$$

Ugyanis gondolhatnánk, hogy η_t kisebb, mint valamelyik $t_{n+1} - t_n$ távolság, amely utóbbinak a várható értéke μ és így η_t várható értéke is kisebb, mint μ. Ezzel szemben, ha például $\sigma^2 = \infty$, úgy $\mathbf{M}\{\eta_t\}$ tetszőleges nagy lehet, hacsak t elegendő nagy.

Az eseménysűrűség. A fizikai alkalmazásokban rendszerint az események sűrűségének megállapítása játszik lényeges szerepet. Mégpedig főleg a stacionárius állapotra vonatkozó eredmény bír fontossággal. Ha stacionárius állapot nem létezik, úgy be kell érni egyéb pótmegoldásokkal.

A következőkben az alábbi definíciókat fogjuk használni:

Az események átlagos sűrűsége

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{24}$$

és ez mindig létezik (S. TÄCKLIND [58]).

Az időegységre eső események várható száma, ha azt egy végtelen hosszú ideje tartó folyamat „találomra" kiválasztott $h>0$ hosszúságú szakaszára vonatkoztatjuk:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{m(u+h)-m(u)}{h}\,du = \frac{1}{\mu} \tag{25}$$

és ez is minden esetben létezik.

Ha feltesszük, hogy $\mu<\infty$ és $F(x)$ nem rácsos eloszlás, úgy — mint láttuk — mindig létezik stacionárius megoldás és az időegységre eső események várható száma

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t+h)-m(t)}{h} = \frac{1}{\mu} \tag{26}$$

(D. BLACKWELL [4]).

Az $F(x)$-re vonatkozó további megszorító feltevések mellett (S. TÄCKLIND [59], W. FELLER [18], D. R. COX és W. L. SMITH [6]) érvényes, hogy az eseménysűrűség stacionárius esetben

$$\lim_{t\to\infty} m'(t) = \frac{1}{\mu}. \tag{27}$$

A következőkben általában azt fogjuk mondani, hogy az eseménysűrűség

$$f = \frac{1}{\mu} \tag{28}$$

és rá fogunk mutatni, hogy mikor melyik definícióról van szó.

3. MEGJEGYZÉS. Tekintsük most a $\{t_n\}$ sorozatot abban az általánosabb esetben, midőn feltételezzük, hogy $\mathbf{P}\{t_1 \leqq x\} = \hat{F}(x)$ és $\mathbf{P}\{t_n - t_{n-1} \leqq x\} = F(x)\ (n=2,3,\dots)$ és a $t_n - t_{n-1}\ (n=1,2,3,\dots)$ valószínűségi változók függetlenek és pozitívak. Ezt az esetet azért említjük meg, mert a koincidenciakérdések tárgyalásánál szerepelni fog ilyen folyamat.

Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0,t]$ időközben a $\{t_n\}$ sorozatban legfeljebb n esemény fordul elő

$$\hat{W}(t,n) = 1 - \hat{F}(t) * F_n(t) \tag{29}$$

és a $(0, t]$ időközben előforduló események várható száma

$$(30) \qquad \hat{m}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(t) * F_n(t).$$

Egyébként az összes említett eredmények és határértékek változatlanok maradnak, csupán $m(t)$ értelmezése lesz a (30) szerinti ezekben a kifejezésekben. Megjegyezzük azonban, hogy (4), (5) és egyéb Laplace-transzformáltak változást szenvednek, ugyanis ezekben most $\hat{F}(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\hat{\varphi}(s)$ is szerepelni fog. Így (4) helyett

$$(31) \qquad \int_0^{\infty} e^{-st} \hat{W}(t, n) dt = \frac{1 - \hat{\varphi}(s)[\varphi(s)]^n}{s}$$

lesz és (5) helyett

$$(32) \qquad \int_0^{\infty} e^{-st} d\hat{m}(t) = \frac{\hat{\varphi}(s)}{1 - \varphi(s)}.$$

A (22) kifejezés is változást fog szenvedni.

4. §. A $\{t'_n\}$ sorozat vizsgálata

Mint már említettük, a $\{t'_n\}$ sorozat éppen úgy rekurrens eseménysorozat, mint a $\{t_n\}$ sorozat. Csak amíg $P\{t_n - t_{n-1} \leq x\} = F(x)$ ismert volt, addig $P\{t'_n - t'_{n-1} \leq x\} = G(x)$ ismeretlen. Ha a $G(x)$ eloszlásfüggvényt ismernénk, úgy az előző fejezetben a μ_t változó eloszlására nyert eredményeket szó szerint alhalmazhatnánk a ν_t változóval kapcsolatos valószínűségszámítási kérdések megoldására. Így a feladat $G(x)$ eloszlásfüggvény meghatározására redukálódik.

Bevezetjük a következő jelöléseket: Legyen $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$(33) \qquad \gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x), \quad (\Re(s) \geq 0).$$

Továbbá legyen $\mathbf{M}\{\nu_t\} = M(t)$, úgy (2). szerint

$$(34) \qquad M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t),$$

ahol $G_n(t)$ jelöli a $G(t)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres kompozícióját. Legyen továbbá

$$\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dM(t). \tag{35}$$

A (34) tekintetbevételével felírható, hogy

$$\mu(s) = \frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)}. \tag{36}$$

G(*x*) *meghatározása.* A $G(x)$ meghatározására a következő kerülő utat követjük. Feltesszük, hogy az $M(t)$ átlagfüggvény ismeretes. Ekkor $\mu(s)$ kiszámítható és (36) segítségével felírható, hogy

$$\gamma(s) = \frac{\mu(s)}{1+\mu(s)}. \tag{37}$$

A $\gamma(s)$ Laplace—Stieltjes transzformált ismeretében pedig a $G(x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. Így a feladat $M(t)$ meghatározására redukálható.

Megjegyezzük, hogy a (37) összefüggés közvetlenül is megkapható. Fennáll ugyanis, hogy $x \leq t$-re

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid t_1' = x\} = 1 + M(t-x)$$

és $M(t) = \mathbf{M}\{\nu_t\}$ a teljes várható érték tétel alapján a következőképpen írható:

$$M(t) = \int_0^t [1 + M(t-x)]\, dG(x).$$

Innen Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve azt kapjuk, hogy $\mu(s) = \gamma(s) + \gamma(s)\mu(s)$, ahonnan következik (37).

1. A véletlen ritkítás általános esete

Az $M(t)$ átlagfüggvény meghatározása az általános modell esetén nem könnyű feladat. Sok esetben azonban nincs is szükség ν_t eloszlásának pontos ismeretére, hanem elegendő az átlag, szórás és aszimptotikus eloszlás megbecslése. Ezek megállapításához pedig a gyakorlati esetekben csupán az A várható érték és a B^2 szórásnégyzet ismerete szükséges. Ezért mindenekelőtt ezen mennyiségek meghatározásával fogunk foglalkozni.

A *G*(*x*) *várható értékének és szórásnégyzetének meghatározása.* Legyen $A = \mathbf{M}\{t_1'\}$ és $B^2 = \mathbf{D}^2\{t_1'\}$. Vezessük be továbbá az

$$A(y) = \mathbf{M}\{t_1' \mid \chi_0 = y\} \tag{38}$$

feltételes várható értéket és a

$$B^2(y) = \mathbf{D}^2\{t_1' \mid \chi_0 = y\} \tag{39}$$

feltételes szórásnégyzetet. Ezek segítségével, a teljes várható érték tétel alapján felírható, hogy

$$A = \int_0^\infty A(y)\,dH(y) \tag{40}$$

és

$$B^2 = \int_0^\infty B^2(y)\,dH(y) + \int_0^\infty [A(y)-A]^2\,dH(y). \tag{41}$$

Vezessük be továbbá a következő valószínűségi változót. Jelölje t_ν a $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ események közül az első olyan eseményt, amely létrehoz impulzust. A

$$\mathbf{P}\{t_\nu \leqq x \mid \chi_0 = y\} = V_y(x)$$

feltételes eloszlásfüggvény könnyen felírható

$$\mathbf{P}\{t_\nu \leqq x \mid \chi_0 = y\} = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\{\nu = n, t_n \leqq x \mid \chi_0 = y\}$$

figyelembevételével. Így azt nyerjük, hogy

$$V_y(x) = \begin{cases} pm^*(x), & \text{ha } 0 \leqq x < y, \\ m_y^*(x) - m_y^*(y) + pm^*(y), & \text{ha } y \leqq x < \infty, \end{cases} \tag{42}$$

ahol

$$m^*(x) = \sum_{n=1}^\infty (1-p)^{n-1} F_n(x)$$

és

$$m_y^*(x) = F(x) + (1-p)\int_0^y F(x-u)\,dm^*(u).$$

A fentiek mellett célszerű a

$$V(x) = pm^*(x) \qquad (0 \leqq x < \infty), \tag{43}$$

eloszlásfüggvényt külön is bevezetni.

Legyen továbbá a t_ν valószínűségi változó feltételes várható értéke $\chi_0 = y$ feltétel mellett $C(y) = \mathbf{M}\{t_\nu \mid \chi_0 = y\}$, azaz

$$C(y) = \int_0^y x\,dV(x) + \int_y^\infty x\,dV_y(x). \tag{44}$$

1. TÉTEL: *Az $A(y)$ feltételes várható érték a következő integrálegyenlet megoldásával határozható meg:*

$$A(y) = \int_0^y A(y-x)H(y-x)\,dV(x) + \int_0^y \left[\int_{y-x}^\infty A(z)\,dH(z)\right] dV(x) + C(y). \tag{45}$$

Ez könnyen nyerhető a teljes várható érték tétel alapján, ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\mathbf{M}\{t_1'|t_\nu=x,\chi_0=y,\chi_1=z\}=\begin{cases}x+A(y-x), & \text{ha } 0<z<y-x \text{ és } 0<x<y,\\ x+A(z), & \text{ha } y-x<z<\infty \text{ és } 0<x<y,\\ x, & \text{ha } y<x<\infty.\end{cases}$$

2. TÉTEL: *A $B^2(y)$ feltételes szórásnégyzet a következő integrálegyenlet megoldásával nyerhető:*

$$(46)\qquad B^2(y)=\int_0^y B^2(y-x)H(y-x)\,dV(x)+\int_0^y\Big[\int_{y-x}^\infty B^2(z)\,dH(z)\Big]dV(x)+$$
$$+\int_0^y[x+A(y-x)]^2H(y-x)\,dV(x)+$$
$$+\int_0^y\Big[\int_{y-x}^\infty(x+A(z))^2\,dH(z)\Big]dV(x)+\int_y^\infty x^2\,dV_y(x)-A^2(y).$$

A bizonyítás ismét a teljes várható érték tétel alapján végezhető el, ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\mathbf{D}^2\{t_1'|t_\nu=x,\chi_0=y,\chi_1=z\}=\begin{cases}B^2(y-x), & \text{ha } 0<z<y-x \text{ és } 0<x<y,\\ B^2(z), & \text{ha } y-x<z<\infty \text{ és } 0<x<y,\\ 0, & \text{ha } y<x<\infty.\end{cases}$$

PÉLDA: Tegyük fel, hogy a $\{\chi_n\}$ változók exponenciális eloszlásúak, mégpedig legyen $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$, ha $x\geqq 0$. Ebben az esetben (45) és (46) egyenletek Laplace-transzformáció alkalmazásával megoldhatók. Vezessük be ezért a következő Laplace—Stieltjes transzformáltakat:

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dA(y),$$

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dV(y)$$

és legyen

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dC(y).$$

A (45) egyenletből Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve azt kapjuk, hogy

$$(47)\qquad \psi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)=\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\Gamma(s)}{\Omega(s)}-\frac{1-\Omega(s)}{\Omega(s)}\psi(s).$$

Ez egy függvényegyenlet a $\psi(s)$ ismeretlen számára. Innen $\psi(s)$ a következőképpen határozható meg. A (47) függvényegyenletnek ismételt alkalmazásával $\psi\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)$ $(n=1,2,\ldots)$ sorjában kifejezhető $\psi(s)$ és $\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\psi(s)\to 0$, ha $s\to\infty$, úgy $\lim_{n\to\infty}\psi\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)=0$ lévén, végül is $\psi(s)$ meghatározható. Ilyen módon eljárva azt kapjuk, hogy

$$(48)\qquad \psi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\Gamma\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)}{\Omega\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)}\right]\prod_{j=0}^{n}\frac{\Omega\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}.$$

Hátra van még $\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ kiszámítása. Ha a (48) egyenletben $s=1/\alpha$, úgy innen a $\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ismeretlen lineáris egyenlet megoldásával nyerhető, éspedig

$$(49)\qquad \psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}}{1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}}.$$

Az $A(y)$ feltételes várható érték (48) megfordításával egyértelműen meghatározható. A keresett A várható érték pedig

$$(50)\qquad A=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}A(y)e^{-\frac{y}{\alpha}}dy=\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

azaz éppen megegyezik a (49) kifejezéssel.

A $B^2(y)$ feltételes szórásnégyzet pontosan ugyanolyan egyenletnek tesz eleget, mint az $A(y)$ feltételes várható érték, csupán $C(y)$ helyett egy más, mondjuk $C_1(y)$ függvény fog állni. Így $B^2(y)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja meg fog egyezni a (48) kifejezéssel, ha abban $\Gamma(s)$ helyett $C_1(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját, $\Gamma_1(s)$-et írjuk be. A B^2 szórásnégyzet hasonlóan felírható $B^2(y)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja segítségével, de ehhez ismerni kell $A(y)$ explicit alakját.

P(t) határértéke. $P(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban nincs folyamatban impulzus. Erre felírható, hogy

$$P(t) = U(t) - \int_0^t [1 - U(t-x)]\, dM(x). \tag{51}$$

Ez a következőképpen látható be. Annak a valószínűsége, hogy t időpontban folyamatban van impulzus

$$1 - P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{t'_n \leq t \leq t'_n + \tau_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t [1 - U(t-x)]\, dG_n(x).$$

Ugyanis a vizsgált esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: a $\{t'_n\}$ sorozatban $[0, t]$ időközben előforduló utolsó esemény lehet a $t'_0, t'_1, \ldots, t'_n, \ldots$. Ha t'_n az utolsó esemény, úgy kell, hogy a t'_n időpontban kezdődő τ_n hosszúságú impulzusszakasz ne fejeződjék be t időpontig.

Az $U(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében az (51) képlet segítségével $P(t)$ kiszámítható. Rendszerint azonban könnyebb a $P(t)$ valószínűséget közvetlenül meghatározni és inkább (51) segítségével következtetni $U(x)$-re. $U(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáció alkalmazásával egyszerűen megkapható.

Most $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = P$ határérték vizsgálatával fogunk foglalkozni.

3. TÉTEL: *Ha feltesszük, hogy $G(x)$ nem rácsos eloszlás és átlaga A véges, úgy fennáll*

$$P = \lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{A - T}{A} \tag{52}$$

határérték, ahol

$$T = \int_0^{\infty} x\, dU(x).$$

BIZONYÍTÁS. Ki fogjuk mutatni, hogy

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^{t/2} [1 - U(t-x)]\, dM(x) = 0 \tag{53}$$

és

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t/2}^{t} [1 - U(t-x)]\, dM(x) = \frac{T}{A} \tag{54}$$

és ezzel (52) igazolást nyer, ugyanis $U(\infty) = 1$.

(53) *igazolása.* Ha $A < \infty$ úgy $T < \infty$ is fennáll és ekkor

$$\lim_{t \to \infty} t[1 - U(t)] = 0,$$

mivel

$$0 \leqq t[1-U(t)] \leqq \int_t^{\infty} x\,dU(x) \to 0, \quad \text{ha} \quad t \to \infty.$$

Végül

$$0 \leqq \int_0^{t/2} [1-U(t-x)]\,dM(x) \leqq \left[1-U\left(\frac{t}{2}\right)\right] M\left(\frac{t}{2}\right)$$

és itt a jobboldal a zérushoz tart az előzőek és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{A}$$

tekintetbevételével.

(54) *igazolása.* A (6) képlet szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \frac{1}{A}.$$

Válasszuk meg a $h > 0$ számot oly kicsinyre, hogy

$$\left| \int_0^{\infty} [1-U(x)]\,dx - h \sum_{n=0}^{\infty} [1-U(nh)] \right| < \varepsilon$$

legyen. Továbbá legyen t olyan nagy, hogy egyrészt

$$h \sum_{n=\left[\frac{t}{2h}\right]}^{\infty} [1-U(nh)] < \varepsilon,$$

másrészt $x \geqq t/2$-re

$$\left| \frac{M(x+h)-M(x)}{h} - \frac{1}{A} \right| < \varepsilon$$

legyen. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra elegendő nagy t esetén felírható, hogy

$$\left(\frac{1}{A}-\varepsilon\right)\left(h \sum_{n=0}^{\infty} [1-U(nh)] - \varepsilon\right) \leqq \int_{t/2}^{t} [1-U(t-x)]\,dM(x) \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{1}{A}+\varepsilon\right)\left(h \sum_{n=0}^{\infty} [1-U(nh)]\right),$$

azaz

$$\left(\frac{1}{A}-\varepsilon\right)(T-2\varepsilon) \leqq \int_{t/2}^{t} [1-U(t-x)]\,dM(x) \leqq \left(\frac{1}{A}+\varepsilon\right)(T+\varepsilon).$$

Ez tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra csak úgy állhat fenn, ha a középső tag határértéke $t \to \infty$ esetben $\frac{T}{A}$. Ezzel igazoltuk (52)-t.

Ha csupán azt tesszük fel $G(x)$-ről, hogy átlaga $A < \infty$, úgy fennáll

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(u)du = \frac{A-T}{A}. \tag{55}$$

Ennek igazolására vegyük tekintetbe, hogy

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left[\int_0^u (1-U(u-x))dM(x) \right] du = \frac{1}{t} \int_0^t \left[\int_0^{t-x} (1-U(u))du \right] dM(x).$$

Ha itt a jobboldalon a belső integrál felső határát ∞-nek vesszük, akkor ezzel az integrál értékét nem csökkentjük. Ha viszont a külső integrált t helyett $t-t_0$, $(0 < t_0 < t)$ felső határral és a belsőt t_0 felső határral vesszük $(t_0 < t-x)$, úgy nem növeljük az integrált. Így viszont felírható, hogy

$$\frac{M(t-t_0)}{t} \int_0^{t_0} [1-U(x)]dx \leqq \frac{1}{t} \int_0^t [U(u)-P(u)]\,du \leqq T\frac{M(t)}{t}.$$

Most rögzített t_0-nál $\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{A}$ és $\frac{M(t-t_0)}{t} \to \frac{1}{A}$, ha $t \to \infty$ és ha ezután $t_0 \to \infty$, úgy

$$\int_0^{t_0} [1-U(x)]dx \to T,$$

azaz

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [U(u)-P(u)]du = \frac{T}{A},$$

amivel tételünk igazolást nyert, ugyanis $U(\infty) = 1$.

A fentiekből látjuk, hogy P meghatározásához elegendő A mellett csupán T ismerete. T meghatározására vezessük be a

$$T(y) = \mathbf{M}\{\tau_1 | \chi_0 = y\} \tag{56}$$

feltételes várható értéket. Ennek segítségével felírható, hogy

$$T = \int_0^\infty T(y)dH(y). \tag{57}$$

4. TÉTEL: *A $T(y)$ feltételes várható érték a következő integrálegyenlet megoldásával nyerhető:*

$$(58)\qquad T(y)=\int_0^y T(y-x)H(y-x)\,dV(x)+\int_0^y\left[\int_{y-x}^{\infty}T(z)\,dH(z)\right]dV(x)+$$
$$+\int_0^y x\,dV(x)+y[1-V(y)].$$

A fenti képlet könnyen nyerhető a teljes várható érték tétel alapján, ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\mathbf{M}\{\tau_1|t_\nu=x,\chi_0=y,\chi_1=z\}=\begin{cases}x+T(y-x), & \text{ha } 0<z<y-x \text{ és } 0<x<y,\\ x+T(z), & \text{ha } y-x<z<\infty \text{ és } 0<x<y,\\ y, & \text{ha } y<x<\infty.\end{cases}$$

Az (58) egyenlet megegyezik a (45) egyenlettel, csupán az ottani $C(y)$ helyettesítendő

$$C^*(y)=\int_0^y x\,dV(x)+y[1-V(y)]$$

függvénnyel.

PÉLDA. Legyen ismét $H(x)=1-e^{-x\alpha}$ $(x\geqq 0)$ és jelölje $C^*(y)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját $\Gamma^*(s)$. Ekkor $T(y)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját a (48) képlet szolgáltatja, de abban $\Gamma(s)$ helyettesítendő $\Gamma^*(s)$-gal. Így végül (49)-hez hasonlóan azt nyerjük, hogy

$$T=\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\Gamma^*\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}}{\displaystyle 1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}},$$

ahol

$$\Omega(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dV(x)$$

és

$$\Gamma^*(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dC^*(x).$$

Állandó impulzus időtartam esete. Tegyük fel most, hogy $\chi_n \equiv \alpha$ (állandó). Ekkor $M(t)=0$, ha $t<\alpha$ és $M(t)$, $t \geqq \alpha$ értékekre a következő integrálegyenlet megoldásával nyerhető:

$$M(t)=Z(t)-Z(\alpha)+\int_0^t M(t-y)\,dZ(y), \tag{59}$$

ahol $Z(t)=V_\alpha(t)$ a (26) alatt definiált eloszlásfüggvény $\gamma=\alpha$-ra. Most egyszerűen $\mathbf{P}\{t_\nu \leqq t\}=Z(t)$.

(59) a teljes várható érték tétel alapján nyerhető, ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid t_\nu = y\} = \begin{cases} M(t-y), & \text{ha} \quad 0<y\leqq \alpha, \\ 1+M(t-y), & \text{ha} \quad \alpha<y\leqq t, \\ 0, & \text{ha} \quad t<y<\infty. \end{cases}$$

(59)-ből Laplace-transzformációra áttérve azt kapjuk, hogy

$$\mu(s)=\frac{\int_\alpha^\infty e^{-st}\,dZ(t)}{1-\int_0^\infty e^{-st}\,dZ(t)}, \tag{60}$$

ahonnan (37) szerint

$$\gamma(s)=\frac{\int_\alpha^\infty e^{-st}\,dZ(t)}{1-\int_0^\alpha e^{-st}\,dZ(t)}. \tag{61}$$

$\gamma(s)$ ismeretében $G(x)$ egyértelműen meghatározható és $G(x)$ segítségével a ν_t valószínűségi változó eloszlása már meghatározható. Speciálisan (61) alapján könnyen nyerhető, hogy

$$A=\frac{\int_0^\infty x\,dZ(x)}{1-Z(\alpha)} \tag{62}$$

és

$$B^2+A^2=\frac{\int_0^\infty x^2\,dZ(x)}{1-Z(\alpha)}+2\,\frac{\int_0^\alpha x\,dZ(x)\int_0^\infty x\,dZ(x)}{[1-Z(\alpha)]^2}. \tag{63}$$

A $P(t)$ valószínűségre fennáll, hogy $P(t)=0$, ha $t<\alpha$ és $P(t)$ a $t\geqq\alpha$ értékekre a következő integrálegyenlet megoldásával nyerhető:

$$P(t)=1-Z(t)+\int_0^t P(t-y)\,dZ(y). \tag{64}$$

Ez a következőképpen indokolható: $P(t)$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a $(0,t)$ időközben kezdődő valamennyi impulzus befejeződik t időpontig. Ha $t < \alpha$ úgy ez az esemény a lehetetlen esemény. Ha $t \geqq \alpha$, akkor ez az esemény úgy jöhet létre, hogy vagy $t_\nu > t$ vagy $t_\nu = y$ (ahol $0 < y < t$) és az (y,t) intervallumban kezdődő valamennyi impulzus befejeződik t időpontig.

Legyen $P(t)$ Laplace — transzformáltja

$$\pi(s) = \int_0^\infty e^{-st} P(t)\,dt \tag{65}$$

úgy (51) szerint fennáll

$$\pi(s) = \frac{\int_\alpha^\infty [1 - Z(t)] e^{-st}\,dt}{1 - \int_0^\infty e^{-st}\,dZ(t)}. \tag{66}$$

(66) segítségével $P(t)$ egyértelműen meghatározható.

Ha $A < \infty$ és $G(x)$ nem rácsos eloszlás, úgy $P = \lim_{t\to\infty} P(t)$ határérték létezik éspedig $P = \lim_{s\to 0} s\pi(s)$. Ezen az alapon

$$P = \frac{\int_\alpha^\infty [1 - Z(t)]\,dt}{\int_0^\infty [1 - Z(t)]\,dt} \tag{67}$$

adódik.

Ha speciálisan $\{t_n\}$ homogén Poisson-folyamat λ eseménysűrűséggel, úgy könnyen nyerhető, hogy

$$Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda p t}, & \text{ha } 0 < t < \alpha, \\ 1 - e^{-\lambda t + \lambda\alpha(1-p)}, & \text{ha } \alpha \leqq t < \infty. \end{cases}$$

2. A véletlen ritkitás I. modellje

a) $\{t_n\}$ *Poisson-folyamat.* Tegyük fel először, hogy az alapul vett $\{t_n\}$ folyamat Poisson-féle homogén folyamat λ eseménysűrűséggel. Ekkor $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és $\mu = 1/\lambda$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

A ritkitott $\{t'_n\}$ sorozat törvényszerűségének megállapitásához elegendő $G(x)$ ismerete. $G(x)$ pedig egyszerűen megkapható a következőképpen:

$$G(x) = \lambda \int_0^x H(x - u) e^{-\lambda u}\,du, \tag{68}$$

ugyanis t_1' összetevődik χ_0-ból és egy χ_0-tól független és $F(x)$-szel megegyező eloszlású valószínűségi változóból.

Ha $H(x)$ átlagát α és szórásnégyzetét β^2 jelöli, úgy $G(x)$ átlaga

(69) $$A = \frac{1+\lambda\alpha}{\lambda}$$

és szórásnégyzete

$$B^2 = \frac{1+\lambda^2\beta^2}{\lambda^2}.$$

$P(t)$ *meghatározása.* Az (51) képlet szerint most $P(t)$-re felirható

(70) $$P(t) = H(t) - \lambda \int_0^t [1-H(t-x)]P(x)dx.$$

Ez onnan adódik, hogy a $p=0$ esetben egyszerűen $U(x)=H(x)$ és mint az alábbiakban látni fogjuk, ebben az esetben fennáll

(71) $$M(t) = \lambda \int_0^t P(u)du.$$

(70) a $P(t)$ számára jólismert Volterra típusú integrálegyenlet, melynek alapján $P(t)$ egyértelműen meghatározható. Szerző [47] dolgozatában kimutatta, hogy $P(t)$-re fennáll a következő határérték:

(72) $$P = \lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{1+\lambda\alpha}.$$

A bizonyítás R. E. A. C. PALEY és N. WIENER [36] (59. o.) tételén alapszik.

$P(t)$ könnyen meghatározható Laplace-transzformáció segítségével. (70) szerint fennáll ugyanis, hogy

(73) $$\pi(s) = \int_0^\infty e^{-st}P(t)dt = \frac{\psi(s)}{s+\lambda[1-\psi(s)]},$$

ahol

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dH(x).$$

(71) *igazolása.* $M(t)$ jelenti a $(0,t]$ időközben előforduló $\{t_n'\}$ sorozathoz tartozó események várható számát. $M(t)$ azonban úgy is meghatározható, hogy tekintjük a $\{t_n'\}$ eseményeket és ezek közül csak azokat vesszük számításba, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn nincs folyamatban impulzus. Így azt nyerjük, hogy

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(u)dF_n(u) = \int_0^t P(u)dm(u).$$

Mivel esetünkben $m(t)=\lambda t$, tehát megkaptuk (71)-et.

Most a ritkított események sűrűségét értelmezhetjük $f' = \lim_{t\to\infty} M'(t)$ képlettel és (72) szerint erre azt kapjuk, hogy

(74) $$f' = \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}.$$

PÉLDÁK. 1. Tegyük fel először, hogy $\chi_n \equiv \alpha$ állandó, azaz $H(x) = 0$, ha $x < \alpha$ és $H(x) = 1$, ha $x \geqq \alpha$. Ekkor (68) szerint

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-\alpha)}, & \text{ha } x \geqq \alpha, \\ 0, & \text{ha } x < \alpha \end{cases}$$

és

$$\gamma(s) = \frac{\lambda e^{-s\alpha}}{s+\lambda}.$$

Most (1) szerint a $\nu_t \leqq n$ esemény valószínűsége

$$W(t,n) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j (t-n\alpha)^j}{j!} e^{-\lambda(t-n\alpha)}, & \text{ha } n\alpha \leqq t, \\ 1, & \text{ha } n\alpha \geqq t. \end{cases}$$

A $P(t)$ valószínűség pedig a (73) szerint fennálló

$$\pi(s) = \frac{e^{-s\alpha}}{s+\lambda[1-e^{-s\alpha}]}$$

Laplace-transzformáltból határozható meg, ahonnan:

$$P(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} e^{-\lambda(t-(j+1)\alpha)} \frac{\lambda^j (t-(j+1)\alpha)^j}{j!}.$$

2. Legyen χ_n eloszlásfüggvénye $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$, ha $x \geqq 0$ és $H(x) = 0$, ha $x < 0$, úgy

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-\lambda x} - \lambda\alpha e^{-x/\alpha}}{1-\lambda\alpha}, & \text{ha } \lambda \neq 1/\alpha, \\ 1 - e^{-\lambda x}(1+\lambda x), & \text{ha } \lambda = 1/\alpha \end{cases}$$

és

$$\gamma(s) = \frac{\lambda}{(\lambda+s)(1+\alpha s)}.$$

(1) szerint a $\nu_t \leqq n$ esemény valószínűsége $\lambda \neq 1/\alpha$ esetén

$$W_1(t,n) = \sum_{j=1}^{n} (A_{j,n} e^{-\lambda t} + B_{j,n} e^{-t/\alpha}) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!},$$

ahol $A_{j,n}$ és $B_{j,n}$ könnyen meghatározható állandók. Stacionárius esetben a megfelelő valószínűség hasonlóan határozható meg a (17) képlet alapján.

Most $P(t)$ a (73) alapján fennálló

$$\pi(s) = \frac{1}{(1+\lambda\alpha)s+\alpha s^2}$$

egyenletből határozható meg. Innen

$$P(t) = \frac{1}{1+\lambda\alpha}\left[1-e^{-\frac{1+\lambda\alpha}{\alpha}t}\right].$$

b) $\{t_n\}$ *rekurrens folyamat.* Ebben az esetben a $G(x)$ eloszlásfüggvény a következő explicit alakban írható fel:

$$G(x) = \int_0^x \left\{ \int_y^x [1-F(x-u)]\, dm(u) \right\} dH(y). \tag{75}$$

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvalóan felírható, hogy $G(x) = \mathbf{P}\{t_1' \leqq x\}$. Tekintsük a $\mathbf{P}\{t_1' \leqq x \mid \chi_0 = y\}$ feltételes eloszlásfüggvényt. Ha $x < y$, úgy nyilvánvalóan

$$\mathbf{P}\{t_1' \leqq x \mid \chi_0 = y\} = 0$$

és ha $x \geqq y$, úgy

$$\mathbf{P}\{t_1' \leqq x \mid \chi_0 = y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_y^x [1-F(x-u)]\, dF_n(u) = \int_y^x [1-F(x-u)]\, dm(u).$$

Ez az utóbbi állítás a következőképpen látható be: A szóban forgó esemény ekvivalens azzal, hogy $(y, x]$ intervallumban legalább egy $\{t_n\}$ sorozatbeli esemény előfordul. Ez több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig az $(y, x]$ intervallumban előforduló utolsó esemény lehet a $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ esemény. A (75) képlet a teljes valószínűség tétele alapján nyerhető:

$$\mathbf{P}\{t_1' \leqq x\} = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{t_1' \leqq x \mid \chi_0 = y\}\, dH(y).$$

$G(x)$ átlaga és szórásnégyzete. Tegyük fel először, hogy $\chi_n \equiv \alpha$ (állandó). Ekkor (75) szerint

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < \alpha, \\ \int_\alpha^x [1-F(x-u)]\, dm(u), & \text{ha } x \geqq \alpha. \end{cases}$$

Ebben a speciális esetben $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x) = \varphi(s) - (1-\varphi(s)) \int_0^{\alpha} e^{-su} dm(u).$$

Innen könnyen meghatározhatók $G(x)$ momentumai, éspedig

$$\int_0^{\infty} x\, dG(x) = \mu[1+m(\alpha)] \tag{76}$$

és

$$(77)\qquad \int_0^\infty x^2 dG(x) = (\sigma^2+\mu^2)[1+m(\alpha)] + 2\mu \int_0^\alpha u\,dm(u).$$

Innen következik, hogy az általános esetben

$$(78)\qquad A = \mu \int_0^\infty [1+m(x)]\,dH(x)$$

és

$$(79)\qquad B^2 + A^2 = (\sigma^2+\mu^2)\int_0^\infty [1+m(x)]\,dH(x) + 2\mu \int_0^\infty \left[\int_0^x u\,dm(u)\right] dH(x).$$

Ugyanis a (76) és (77) eredmények felfoghatók, mint $\mathbf{M}\{t_1' \mid \chi_0 = \alpha\}$ és $\mathbf{M}\{t_1'^2 \mid \chi_0 = \alpha\}$ feltételes várható értékek és ekkor $\mathbf{M}\{t_1'\}$ és $\mathbf{M}\{t_1'^2\}$ a teljes várható érték tétel alapján nyerhető.

Hasonlóképpen állíthatók elő $G(x)$ magasabbrendű momentumai is.

1. MEGJEGYZÉS A (78) alatti A átlagot $G(x)$ ismerete nélkül közvetlenül is meghatározhatjuk az A. WALD-féle ismert tétel alapján (vö. A. N. KOLMOGOROV és JU. V. PROHOROV [29]) az $m(t)$ átlagfüggvény segítségével.

Jelölje ξ_n valószínűségi változó a $[t'_{n-1}, t'_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ időközben előforduló $\{t_n\}$ sorozathoz tartozó események számát és legyen $\nu = \nu_t + 1$, ahol ν_t jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló $\{t'_n\}$ sorozathoz tartozó események számát. Tekintsük a $\zeta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu$ összeget. Érvényes, hogy a $\nu = m$ esemény és a ξ_n $(n > m)$ valószínűségi változók függetlenek. Ha $\mathbf{M}\{\nu_t\} < \infty$, úgy mivel a ξ_n változók egyforma eloszlásúak, A. WALD tétele szerint fennáll, hogy

$$(80)\qquad \mathbf{M}\{\zeta_\nu\} = \mathbf{M}\{\nu\}\,\mathbf{M}\{\xi_1\}.$$

Most itt

$$(81)\qquad \mathbf{M}\{\xi_1\} = \int_0^\infty [1+m(x)]\,dH(x).$$

Ugyanis $\mathbf{M}\{\xi_1 \mid \chi_0 = x\} = 1 + m(x)$ és (81) a teljes várható érték tétel alapján adódik. Továbbá fennáll (6) szerint

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu\}}{t} = \frac{1}{A}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\zeta_\nu\}}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

A (80) egyenlet mindkét oldalát t-vel osztva és $t \to \infty$ határátmenetet véve, nyerjük a bizonyítandó

$$M=\mu\int_0^\infty [1+m(x)]dH(x)$$

képletet.

2. MEGJEGYZÉS. Meg kell jegyezni, hogy A kiszámítására a következő szemléletesség látszatát keltő okoskodás nem helyes. Egyszerűség kedvéért a $\chi_n\equiv$(állandó) esetre szorítkozunk, amikor is $A=\mu[1+m(\alpha)]$. Gondolhatnánk, hogy ennek fennállása következőképpen is indokolható. Jelentse p_n annak a valószínűségét, hogy az α ideig tartó impulzus alatt n esemény fordul elő a $\{t_n\}$ sorozatban. Ekkor $\Sigma np_n=m(\alpha)$ és így $A=\Sigma p_n(n+1)\mu=[1+m(\alpha)]\mu$. Ugyanis, ha α idő alatt n esemény fordul elő, úgy a $\{t'_n\}$ sorozatban két egymást követő esemény $n+1$ számú $\{t_n\}$ sorozatbeli esemény távolságra követi egymást, és ennek a távolságnak a várható értéke $(n+1)\mu$. Azonban akárhány esemény fordul is elő α idő alatt, ezek közötti távolságok összegének várható értéke $\leqq\alpha$, míg $n\mu$ elegendő nagy n-re nagyobb lesz α-nál. Azért kapunk mégis helyes eredményt, mert nagy n-ekre nagyobb és kis n-ekre kisebb értéket veszünk és a két hatás kompenzálja egymást.

A ritkított események sűrűsége most

$$f'=\frac{1}{\mu\int_0^\infty [1+m(x)]dH(x)} \tag{82}$$

és a $\chi_n\equiv\alpha$ (állandó) esetben

$$f'=\frac{1}{\mu[1+m(\alpha)]},$$

ahol f' értelmezésére a (24)—(28) képletek eredményei mérvadók.

$P(t)$ meghatározása. Az általános esetre adott (51) képletből következik, hogy

$$P(t)=H(t)-\int_0^t [1-H(t-u)]dM(u),$$

ugyanis most $U(x)=H(x)$. A korábbi eredmények szerint felírható, hogy ha $G(x)$ nem rácsos eloszlás és A véges, úgy fennáll

$$P=\lim_{t\to\infty}P(t)=\frac{A-\alpha}{A}$$

határérték. Ha csupán azt tesszük fel, hogy A véges, úgy fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P(u)du=\frac{A-\alpha}{A}$$

határérték.

A fenti tárgyalásból kitűnik, hogy ha szukcesszív ritkításnál ismerjük az előző fokozatra érvényes átlagfüggvényt és az impulzusok időtartamának eloszlásfüggvényét, úgy a (82) képlet szerint meghatározhatjuk a következő fokozatra érvényes eseménysűrűséget és ehhez nem szükséges a $G(x)$ eloszlásfüggvény ismerete.

PÉLDA. Tekintsünk Geiger—Müller számlálócsővel történő részecskeszámlálást. A beeső részecskék időpontjai alkossanak λ_1 sűrűségű homogén Poisson-folyamatot. A létrehozott impulzusok időtartamának várható értéke legyen α_1. Ekkor a Geiger—Müller számlálócső után kapcsolt fokozathoz érkező impulzusok sűrűsége stacionárius esetben (74) szerint

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1\alpha_1},$$

függetlenül az impulzusok időtartamának eloszlásától.

Tegyük fel, hogy a számlálócső után kapcsolt erősítő és regisztráló fokozatra egyetlen α_2 (állandó) felbontási idő jellemző. Ekkor az észlelő berendezés szempontjából a Geiger—Müller számlálócsőből érkező impulzusok tekintendők valódi eseményeknek és regisztráltak a ritkított eseményeknek. Legyen a regisztrált események sűrűsége stacionárius esetben f_2, úgy, (82) szerint erre fennáll, hogy

$$f_2 = \frac{f_1}{1+m(\alpha_2)},$$

ugyanis most $f_1 = 1/\alpha$. Itt $m(t)$ a Geiger—Müller számlálócső után észlelt események sorozatára vonatkozó átlagfüggvény. Ez már függ a χ_n kisülési idő $H(x)$ eloszlásfüggvényétől.

Ha $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha_1}$ $(x \geqq 0)$, úgy (71) szerint

$$(83) \qquad m(\alpha_2) = \frac{\lambda_1\alpha_1\alpha_2}{1+\lambda_1\alpha_1} + \left(\frac{\lambda_1\alpha_1}{1+\lambda_1\alpha_1}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{1+\lambda_1\alpha_1}{\alpha_1}\alpha_2}\right),$$

míg ha $\chi_n \equiv \alpha_1$ (állandó), úgy (71) szerint

$$(84) \qquad m(\alpha_2) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]} \left[1 - \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1(\alpha_2 - k\alpha_1)} \frac{\lambda_1^j(\alpha_2 - k\alpha_1)^j}{j!}\right].$$

A $\chi_n \equiv \alpha_1$ (állandó) esetre vonatkozó példa megtalálható S. MALMQUIST [34] munkájában. A különbség a tárgyalás módjában van, Amíg MALMQUIST az eloszlásfüggvény kiszámításának alapján határozza meg az eseménysűrűséget, addig mi ezt anélkül tesszük meg.

3. *A véletlen ritkítás II. modellje*

a) $\{t_n\}$ *Poisson-folyamat.* Tegyük fel először, hogy az alapul vett $\{t_n\}$ eseménysorozat λ eseménysűrűségű homogén Poisson-folyamat, azaz $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (ha $x \geqq 0$).

$G(x)$ meghatározása. Már említettük, hogy ha $\mu(s)$ jelöli $M(t)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját, úgy $\gamma(s)$, a $G(x)$ eloszlásfüggvény Laplace—Stieltjes transzformáltja,

$$\gamma(s) = \frac{\mu(s)}{1+\mu(s)}$$

képlettel határozható meg. Így a kérdés vissza van vezetve $M(t)$ meghatározására. A (71)-hez hasonló okoskodással kimutatható azonban, hogy

$$M(t) = \lambda \int_0^t P(u)\,du$$

és így a feladat $P(t)$ meghatározására redukálható. Így eljárva a következő eredményre jutunk.

5. TÉTEL: *A $G(x)$ eloszlásfüggvény Laplace—Stieltjes transzformáltjára fennáll, hogy*

$$\gamma(s) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}\left\{\int_0^\infty e^{-st-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}\,dt\right\}^{-1}. \tag{85}$$

BIZONYÍTÁS. A tétel közvetlenül adódik abból a tényből, hogy

$$P(t) = H(t)\,e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}. \tag{86}$$

Ez a következőképpen látható be: t időpontban akkor nincs folyamatban impulzus, ha a $t_0 = 0$ időpontban kezdődő impulzus befejeződik t időpontig, aminek valószínűsége $H(t)$ és a $(0,t)$ időközben kezdődő valamennyi impulzus befejeződik t időpontig, aminek a valószínűsége

$$P^*(t) = e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}. \tag{87}$$

Az összetett esemény valószínűsége a függetlenség következtében

$$P(t) = H(t)\cdot P^*(t).$$

(87) *igazolása.* Annak a valószínűsége, hogy az alapul vett $\{t_n\}$ Poisson-folyamatban $(0,t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő,

$$w(t,n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Viszont ama feltétel mellett, hogy $(0,t)$ időközben a Poisson-folyamatban pontosan n esemény fordul elő, az n számú esemény bekövetkezési időpontjai úgy tekinthetők, mint n számú egyenletes eloszlású független véletlen pont eloszlása ezen az intervallumon (vö. szerző [51] munkáját). Annak a valószínűsége, hogy egy a $(0,t)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen pontban kezdődő impulzus befejeződik t időpontig

$$\frac{1}{t}\int_0^t H(x)\,dx.$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy a $(0,t)$ időközben kezdődő valamennyi impulzus befejeződik t időpontig

$$P^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\left[\frac{1}{t}\int_0^t H(x)dx\right]^n = e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]dx}.$$

Ugyanis a kérdéses esemény több egymást kizáró módon jöhet létre. A $(0,t)$ időközben $n=0,1,2,\ldots$ esemény fordulhat elő a Poisson-folyamatban és ha pontosan n esemény fordul elő, akkor a létrehozott impulzusok mindegyike befejeződik t időpontig; az utolsó esemény valószínűségének megállapításához tekintetbe kell venni a segédtételben kimondott függetlenséget.

$\gamma(s)$ ismeretében könnyen meghatározható $G(x)$ átlaga, szórásnégyzete és magasabbrendű momentumai is. Speciálisan

(88) $$A=e^{\lambda\alpha}/\lambda$$

és

(89) $$B^2=\frac{2e^{2\lambda\alpha}}{\lambda}\int_0^{\infty}[P(t)-e^{-\lambda\alpha}]dt+\frac{e^{\lambda\alpha}}{\lambda^2}(2-e^{2\lambda\alpha}).$$

$P(t)$ határértéke. A $P(t)$ (86) alatti explicit alakjából könnyen adódik, hogy

(90) $$P=\lim_{t\to\infty}P(t)=e^{-\lambda\alpha}.$$

Mivel $M'(t)=\lambda P(t)$, ezért stacionárius esetben az eseménysűrűség $f'=\lim_{t\to\infty}M'(t)$-vel definiálható és erre fennál

(91) $$f'=\lambda e^{-\lambda\alpha}.$$

PÉLDA: Tegyük fel, hogy $\chi_n\equiv\alpha$ (állandó). Ebben az esetben közvetlenül adódik, hogy

$$P(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t<\alpha,\\ e^{-\lambda\alpha}, & \text{ha } t\geqq\alpha.\end{cases}$$

Ugyanis t időpontban ($t \geqq \alpha$) akkor nincs folyamatban impulzus, ha $(t-\alpha, t)$ időközben a Poison-folyamatban egyetlen esemény sem fordul elő és nyilvánvalóan $P(t)=0$, ha $t<\alpha$. Ekkor (85) szerint

$$(92) \qquad \gamma(s)=\frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}.$$

Ez az egyszerűen nyert képlet magában foglalja C. LEVERT és W. L. SCHEEN [32], L. KOSTEN [30] és W. FELLER [17] hosszadalmasabb úton nyert eredményeit.

(92) megfordításával könnyen adódik, hogy

$$(93) \qquad G(x)=\sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}(-1)^{j-1}\frac{e^{-\lambda\alpha j}}{j!}(x-j\alpha)^j.$$

$G(x)$ ismeretében kiszámíthatjuk a ν_t változó eloszlását. Speciálisan a (17) képlet alkalmazásával azt nyerjük, hogy stacionárius esetben a $\lim\limits_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\nu_{T+t}-\nu_T \leqq n\}=W_1^*(t,n)$ valószínűség

$$W_1^*(t,n)=1-\sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\frac{e^{-\lambda\alpha(j+1)}\lambda^{j+1}}{(j+1)!}(t-j\alpha)^{j+1},$$

megegyezésben L. KOSTEN [30] eredményével. Az (1) képlet alkalmazásával pedig azt kapjuk, hogy a $\mathbf{P}\{\nu_t \leqq n\}=W_1(t,n)$ valószínűség

$$W_1(t,n)=1-\sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]-1}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\frac{e^{-\lambda\alpha(j+1)}\lambda^{j+1}}{(j+1)!}(t-(j+1)\alpha)^{j+1}.$$

b) $\{t_n\}$ *rekurrens folyamat.* A $G(x)$ eloszlásfüggvényt ismét az $M(t)$ átlagfüggvény segítségével határozzuk meg. A $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjára (37) szerint fennáll, hogy

$$\gamma(s)=\frac{\mu(s)}{1+\mu(s)},$$

ahol $\mu(s)$ jelöli $M(t)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját.

$M(t)$ meghatározására a következő tételt bizonyítjuk be:

6. TÉTEL: *$M(t)$ a $\{t_n'\}$ sorozatban $(0,t]$ időközben előforduló események várható száma a következő integrálegyenlet megoldásával határozható meg:*

$$(94) \quad M(t)=\int_0^t H(y)dF(y)+H(t)\int_0^t M(t-y)dF(y)-\int_0^t\left[\int_y^t M(z-y)dH(z)\right]dF(y).$$

Ez a következőképpen látható be: Tekintsük az $M\{\nu_t|\chi_0=z, t_1=y\}$ feltételes várható értéket. Erre könnyen beláthatóan fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\{\nu_t|\chi_0=z, t_1=y\}=\begin{cases} 1+M(t-y), & \text{ha } 0\leqq z\leqq y\leqq t,\\ M(t-y)-M(z-y), & \text{ha } 0\leqq y\leqq z\leqq t,\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Most $M(t)=\mathbf{M}\{\nu_t\}$ a teljes várható érték tétel alapján a következőképpen nyerhető

$$M(t)=\int_0^t[1+M(t-y)]H(y)dF(y)+\int_0^t\left\{\int_y^t[M(t-y)-M(z-y)]dH(z)\right\}dF(y),$$

ami megegyezik (94)-gyel.

$P(t)$ meghatározása. $P(t)$ meghatározására a következő tétel érvényes:

7. TÉTEL: *Annak a valószínűsége, hogy t időpontban nincs folyamatban impulzus, $P(t)$, a következő integrálegyenlet megoldásával határozható meg*

$$P(t)=H(t)[1-F(t)+\int_0^t P(t-x)dF(x)]. \tag{95}$$

Ez a következőképpen indokolható: t időpontban akkor nincs folyamatban impulzus, ha a $t_0'=0$ időpontban kezdődő impulzus befejeződik t időpontig és vagy $t_1>t$, vagy $t_1=x$ (ahol $0<x<t$), de az $(x, t]$ intervallumban kezdődő impulzusok befejeződnek t időpontig.

A (95) integrálegyenlet megoldására sokszor célszerű bevezetni egy új $P^*(t)$ függvényt a következőképpen: $P(t)=P^*(t)H(t)$. Ekkor $P^*(t)$-re a következő integrálegyenlet fog fennállni:

$$P^*(t)=1-F(t)+\int_0^t P^*(t-x)H(t-x)dF(x). \tag{96}$$

A (95) és (96) integrálegyenlet sajnos általános esetben nem oldható meg és így minden egyes speciális eset külön vizsgálatot igényel.

PÉLDA: Tegyük fel, hogy a χ_n változók exponenciális eloszlásúak éspedig legyen $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$, ha $x\geqq 0$. Jelölje továbbá az $F(x)$ eloszlásfüggvény Laplace—Stieltjes transzformáltját $\varphi(s)$. Ekkor (94) Laplace—Stieltjes transzformáltját véve azt nyerjük, hogy

$$\mu(s)=\frac{\varphi(s)-\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}{1-\varphi(s)}-\frac{\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}{1-\varphi(s)}\mu\left(s+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Ez egy függvényegyenlet a $\mu(s)$ ismeretlen számára. Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával $\mu(s)$ kifejezhető sorjában $\mu\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)$ $(n=1,2,3,\dots)$ segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\mu\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)\to 0$ midőn $n\to\infty$, úgy $n\to\infty$ határátmenettel végül $\mu(s)$ a következő konvergens sor alakjában állítható elő:

$$\mu(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)-\varphi\left(s+\frac{n+1}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}=$$

(97)

$$=\frac{1}{\varphi(s)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\prod_{j=0}^{n}\frac{\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)},$$

ahol az első kifejezésben az üres sorozat 1-nek veendő. Ennek segítségével $G(x)$ Laplace-transzformáltja $\gamma(s)$ a

$$\gamma(s)=\frac{\mu(s)}{1+\mu(s)}$$

alakban fejezhető ki. $\gamma(s)$ ismeretében $G(x)$ egyértelműen meghatározható.

$G(x)$ átlaga A a következőképpen nyerhető:

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{1-\gamma(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s\mu(s)}.$$

Így tehát

(98) $$A^{-1}=\lim_{s\to 0}s\mu(s)=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)},$$

ahol tekintetbe vettük, hogy $\mu=\lim_{s\to 0}(1-\varphi(s))/s$.

$\gamma(s)$ segítségével kiszámítható $G(x)$ szórásnégyzete és magasabbrendű momentumai is.

$P(t)$ meghatározására tekintsük a (95) egyenletet. Legyen

$$\pi(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}P(t)\,dt$$

és vegyük (95) Laplace-transzformáltját, úgy

$$\pi(s)=\frac{1}{s\varphi(s)}-\frac{\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}{1-\varphi(s)}\pi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)$$

függvényegyenletet nyerjük $\pi(s)$ meghatározására. Jelenleg célszerűbb azonban

$$\pi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P^*(t)\,dt$$

függvényt tekinteni, amelyre (96) alapján

$$\pi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\pi^*\left(s+\frac{1}{\alpha}\right) \tag{99}$$

függvényegyenlet áll fenn. Ennek megoldása (48)-hoz hasonló okoskodással

$$\pi^*(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \alpha}{n+\alpha s} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}.$$

Mivel $\pi(s) = \pi^*(s) - \pi^*\left(s+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi^*(s)}{\varphi(s)} - \frac{1-\varphi(s)}{s\varphi(s)}$, (99) figyelembevételével, tehát

$$\pi(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\varphi(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \alpha}{n+\alpha s} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}. \tag{100}$$

Ennek megfordításával $P(t)$ egyértelműen meghatározható.

Ha $A < \infty$ és $G(x)$ nem rácsos eloszlás, úgy $P = \lim_{t\to\infty} P(t)$ határérték létezik, éspedig $P = \lim_{s\to 0} s\pi(s)$. Erre (100) alapján az adódik, hogy

$$P = 1 + \frac{\alpha}{\mu} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)}. \tag{101}$$

MEGJEGYZÉS. $G(x)$-re most felírható a következő egyenlet:

$$G(x) = \int_0^x H(y)\,dF(y) + \int_0^x \left\{ \int_0^{y-x} [H(y+z) - H(y)]\,[1-G(x-y-z)]\,dM(z) \right\} dF(y),$$

ahol

$$M(t) = \sum_{n=1}^\infty G_n(t).$$

Ha most speciálisan $H(x) = 1 - e^{-x\alpha}$ $(x \geqq 0)$ és Laplace—Stieltjes transzformációra térünk át, úgy

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dM(t) = \frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)}$$

tekintetbe vételével

$$\gamma(s)=\frac{\varphi(s)\left[1-\gamma\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)\right]-\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left[1-\gamma\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)\right]-\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}$$

függvényegyenletet nyerjük $\gamma(s)$ számára.

Ha ezen egyenletből akarunk eljutni $\gamma(s)$ explicit meghatározásához, úgy ez sokkal nehezebben járható út, mint a korábbi, amely $\mu(s)$ meghatározásán alapult.

4. *A véletlen ritkítás III. modellje*

A III. modell esetén a $G(x)$ eloszlásfüggvény könnyen meghatározható. Fennáll ugyanis, hogy

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nF_n(x). \tag{102}$$

A teljes várható érték tétel alapján könnyen nyerhető $G(x)$ átlaga és szórásnégyzete. Mégpedig

$$A=\mu\mathbf{M}\{\nu_1\}. \tag{103}$$

Ugyanis

$$\mathbf{M}\{t_1'\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\nu_1=n\}\mathbf{M}\{t_n\}$$

és hasonlóan

$$B^2=\mu^2\mathbf{D}^2\{\nu_1\}+\sigma^2\mathbf{M}\{\nu_1\}. \tag{104}$$

Ha speciálisan $p_n=p(1-p)^{n-1}$, úgy $\mathbf{M}\{\nu_1\}=1/p$ és $\mathbf{D}^2\{\nu_1\}=(1-p)/p^2$.

PÉLDA. Legyen $\{t_n\}$ sorozat egy homogén Poisson-folyamat λ eseménysűrűséggel. Legyen $p_r=1$ és különben $p_k=0$ $(k\neq r)$ (vö. L. ALAOGLU és N. M. SMITH [1]). Erre az esetre általános tárgyalásunk alkalmazható, de most célszerűbb közvetlen tárgyalást adni. Annak a valószínűsége, hogy a $\{t_n'\}$ sorozatban $(0, t]$ időközben pontosan n esemény fordul elő

$$V_n(t)=\sum_{j=0}^{r-1}w(t,rn+j), \tag{105}$$

ahol

$$w(t,n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\quad(n=0,1,2,\dots).$$

Ugyanis a $(0, t]$ időközben akkor fog pontosan n esemény előfordulni a $\{t'_n\}$ sorozatban, ha a $\{t_n\}$ sorozatban $(0, t]$ időközben előforduló események száma $rn, rn+1, \ldots, rn+r-1$.

A stacionárius esetben a megfelelő valószínűség

$$(106) \qquad V^*_n(t) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} [w(t, nr+l) + w(t, nr-l)]\,(r-l).$$

Ez úgy értelmezendő, hogy kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy $(T, T+t)$ intervallumban pontosan n számú esemény fordul elő a $\{t'_n\}$ sorozatból és azután $T \to \infty$ határátmenetre térünk át. A (106) képlet a következőképpen látható be. Definiáljuk rendszerünkkel kapcsolatban az $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$ állapotokat a következőképpen. Azt mondjuk, hogy t időpontban A_j állapot van, ha a $\{t'_n\}$ sorozatban $(0, t)$ időközben előforduló események száma $n \equiv j \pmod{r}$. Jelölje $p_j(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban A_j állapot van. Nyilvánvalóan

$$p_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w(t, nr+j)$$

és mint ismeretes (Borel-féle összegezési tétel)

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = \frac{1}{r}$$

Így viszont

$$(107) \qquad V^*_n(t) = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} w(t, nr+k-j).$$

Ugyanis, ha a vizsgált t hosszúságú intervallum kezdőpontjában A_j állapot van, úgy akkor lesz a t hosszúságú intervallumban a ritkított események száma n, ha az alapul vett Poisson-folyamatban $nr-j, nr-j+1, \ldots, nr+r-1-j$ az előforduló események száma. A (107)-ből könnyű átalakítással adódik (106). Ezt az eredményt bonyolultabb okoskodással R. O. DAVIES és J. W. LEECH [7] is megadták.

Megjegyezzük, hogy BÉKÉSSY A. [3] munkájában közölt hibás jelosztókkal történő számlálással kapcsolatos eredménye is visszavezethető a fenti véletlen ritkítás modelljére (vö. szerző [56] megjegyzésével).

II. A KOINCIDENCIÁK KÉRDÉSE

5. §. A feladat kitűzése

Tekintsünk m számlálócsövet, amelyek mindegyike valamilyen $\{t_n\}$ rekurrens eseménysorozatot átvisz egy ritkított $\{t'_n\}$ eseménysorozatba. Tegyük fel, hogy az egyes számlálócsövekhez érkező részecskék $\{t_n\}$ eseménysorozata egymástól független. Tegyük fel, hogy az m számlálócső mindegyike a $\{t_n\}$ sorozat szelektálását a véletlen ritkítás általános törvénye szerint végzi. Megengedjük természetesen, hogy az egyes $\{t_n\}$ sorozatok és az egyes számlálócsövekre jellemző paraméterek egymástól különbözzenek. (Tehát az egyes sorozatokhoz különböző $F(x)$, $H(x)$ és p értékek tartozhatnak.)

Azt mondjuk, hogy az m számlálócsőből álló rendszer egy adott időpontban E_j $(j=0, 1, 2, \ldots, m)$ állapotban van, ha a tekintetbe vett m folyamat közül j számúnál folyamatban van impulzus, míg a többieknél nincs. Ha egy adott időpillanatban $E_{j-1} \to E_j$ átmenet lép fel, úgy j-szeres véletlen koincidenciáról beszélünk $(j=1, 2, \ldots, m)$.

Feladatunk a véletlen koincidenciák folyamatának törvényszerűségét megállapítani. Nevezetesen a véletlen koincidenciák időbeli sűrűségének a megállapítása és adott idő alatt előforduló koincidenciák száma eloszlásának meghatározása bír érdekességgel. Az első feladatot maradék nélkül meg tudjuk oldani, a másik feladatra csak abban a speciális esetben adunk megoldást, ha a koincidenciák folyamata rekurrens eseménysorozat.

A koincidenciák sűrűségének megállapításával alapul vett Poisson-folyamatok és állandó impulzusidők esetén C. ECKART és F. R. SHONKA [14], J. JUILFS [27], L. JÁNOSSY [23], [24], E. SCHRÖDINGER [45] és szerző [46] foglalkoznak. Alapul vett Poisson-folyamat és változó impulzusidő esetével szerző [47] dolgozatában foglalkozik. A koincidenciák számának eloszlásával alapul vett Poisson-folyamat és állandó impulzusidők esetén N. FEATHER [16] és C. DOMB [10], [11] foglalkoznak, az ő tárgyalásaik azonban a mieinktől eltérő modellekre vonatkoznak.

A koincidenciák számának eloszlását alapul vett Poisson-folyamatokra és exponenciális eloszlású impulzusokra szerző [48], [50] határozta meg.

6. §. A koincidenciák várható száma általános esetben

A most következő tárgyalásunk teljesen általános és csak később fogjuk speciális esetekre alkalmazni.

Tekintsük az m számú ritkított eseménysorozatot, amelyet az egyes számlálócsövek szolgáltatnak. Jelölje rendre $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_m(t)$ annak a valószínűségét, hogy az első, második, ..., m-edik folyamatnál nincs folyamatban impulzus (a számlálócső szabad) és jelölje rendre $M_1(t), M_2(t), \ldots, M_m(t)$ az egyes ritkított eseménysorozatoknál a $(0, t]$ időközben előforduló események várható számát.

Meghatározandó $M_{k,k+1}(t)$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ az m folyamatból álló rendszernél $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek ($k+1$-szeres véletlen koincidenciák) várható száma.

Könnyű indokolással felírható, hogy

$$(108) \qquad M_{k,k+1}(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^m \frac{P_1(u)P_2(u)\ldots P_m(u)}{P_j(u)} \prod_{(i_1, i_2, \ldots, i_k \neq j)} \frac{1-P_{i_1}(u)}{P_{i_1}(u)} \frac{1-P_{i_2}(u)}{P_{i_2}(u)} \cdots$$

$$\cdots \frac{1-P_{i_k}(u)}{P_{i_k}(u)} \, dM_j(u),$$

ahol az összeg j-edik tagjában szereplő szorzat kiterjesztendő az $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$ elemekből alkotható k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációkra. (108) úgy nyerhető, hogy tekintjük az m számú ritkított folyamat mindegyikében előforduló eseményeket és ezek közül csak azokat vesszük számba, amelyek olyankor fordulnak elő, amikor éppen k sorozatban folyamatban van impulzus. Ezen események várható száma szolgáltatja az $M_{k,k+1}(t)$ függvényt.

Ha a k-szoros véletlen koincidenciák sűrűségét stacionárius esetben

$$(109) \qquad f_{k,k+1} = \lim_{t\to\infty} M'_{k,k+1}(t)$$

értelmezi, úgy, ha léteznek a $\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j$ és $\lim_{t\to\infty} M'_j(t) = f_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ határértékek, fennáll, hogy

$$(110) \qquad f_{k,k+1} = \sum_{j=1}^m f_j \frac{P_1 P_2 \ldots P_m}{P_j} \prod_{(i_1, i_2, \ldots, i_k \neq j)} \frac{1-P_{i_1}}{P_{i_1}} \frac{1-P_{i_2}}{P_{i_2}} \cdots \frac{1-P_{i_k}}{P_{i_k}}.$$

Ha viszont a véletlen koincidenciák sűrűségét

$$f_{k,k+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{M_{k,k+1}(t+h) - M_{k,k+1}(t)}{h}$$

értelmezi $(h>0)$, úgy, ha létezik $\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j$ és $\lim_{t\to\infty} [M_j(t+h) - M_j(t)]/h = f_j$ $(h>0)$ határérték $j=1, 2, \ldots, m$-re, akkor $f_{k,k+1}$-et ismét (110) szolgáltatja.

Érdekes lenne megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett teljesül

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_{k,k+1}(t)}{t} = f_{k,k+1},$$

ahol $f_{k,k+1}$-et (110) szolgáltatja,

$$P_j = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P_j(u)\,du$$

és

$$f_j = \lim_{t\to\infty} \frac{M_j(t)}{t}$$

értelmezés szerint.

Speciális esetek. Tegyük fel, hogy az egyes számlálócsövek által szolgáltatott eseménysorozatok ekvivalensek, azaz feltehető, hogy $P_j(t) = P(t)$ és $M_j(t) = M(t)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Ekkor (108) és (110) a következő egyszerűbb alakot öltik:

$$M_{k,k+1}(t) = m\binom{m-1}{k}\int_0^t [1-P(u)]^k [P(u)]^{m-k-1} dM(u) \tag{111}$$

és

$$f_{k,k+1} = m\binom{m-1}{k}(1-P)^k P^{m-k-1} f. \tag{112}$$

Az $E_0 \to E_1$ átmenetek sűrűsége az általános esetben

$$f_{0,1} = \left(\frac{f_1}{P_1} + \frac{f_2}{P_2} + \ldots + \frac{f_m}{P_m}\right) P_1 P_2 \ldots P_m$$

és az ekvivalens esetben

$$f_{0,1} = m P^{m-1} f.$$

Az $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek sűrűsége az általános esetben

$$f_{m-1,m} = \left(\frac{f_1}{1-P_1} + \frac{f_2}{1-P_2} + \ldots + \frac{f_m}{1-P_m}\right)(1-P_1)(1-P_2)\ldots(1-P_m)$$

és az ekvivalens esetben

$$f_{m-1,m} = m(1-P)^{m-1} f.$$

7. §. A véletlen koincidenciák sűrűsége az I. és II. modellre Poisson-alapfolyamatok esetében

Tegyük fel, hogy az egyes számlálócsövekhez érkező részecskék időpontjai rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak és a kiváltott impulzusok időtartamának várható értéke az egyes csövekre vonatkozóan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Ebben az esetben, mint már korábban megmutattuk, a $\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j$ és $\lim_{t\to\infty} M'_j(t) = f_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ határértékek mindig léteznek és fennáll

$$f_j = \lambda_j P_j \tag{113}$$

összefüggés (vö. (72), (74), (90), (91)).

Az I. modellre (72) szerint

$$P_j = \frac{1}{1+\lambda_j \alpha_j} \tag{114}$$

és a II. modellre (90) szerint

$$P_j = e^{-\lambda_j \alpha_j}. \tag{115}$$

A $k+1$-szeres véletlen koincidenciák sűrűségét most a (110) képlet szolgáltatja a fenti P_j és f_j értékekkel. Speciálisan az m-szeres véletlen koincidenciák sűrűsége az I. modell esetén

$$f_{m-1,m} = \frac{\lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \ldots + \lambda_m^2\alpha_m}{(1+\lambda_1\alpha_1)(1+\lambda_2\alpha_2)\ldots(1+\lambda_m\alpha_m)} \tag{116}$$

és a II. modell esetén

$$f_{m-1,m} = \tag{117}$$

$$= \left(\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1\alpha_1}}{1-e^{-\lambda_1\alpha_1}} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_2\alpha_2}}{1-e^{-\lambda_2\alpha_2}} + \ldots + \frac{\lambda_m e^{-\lambda_m\alpha_m}}{1-e^{-\lambda_m\alpha_m}}\right)(1-e^{-\lambda_1\alpha_1})(1-e^{-\lambda_2\alpha_2})\ldots(1-e^{-\lambda_m\alpha_m}).$$

A fizikai irodalomban a véletlen koincidenciák sűrűségét rendszerint a könnyen mérhető f_i látszólagos eseménysűrűségekkel fejezik ki. Ezek segítségével (116)

$$f_{m-1,m} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_m}\right) f_1 f_2 \ldots f_m \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \tag{118}$$

alakban és (117)

$$f_{m-1,m} = \left(1-\frac{f_1}{\lambda_1}\right)\left(1-\frac{f_2}{\lambda_2}\right)\ldots\left(1-\frac{f_m}{\lambda_m}\right)\left[\frac{f_1}{1-\frac{f_1}{\lambda_1}} + \frac{f_2}{1-\frac{f_2}{\lambda_2}} + \ldots + \frac{f_m}{1-\frac{f_m}{\lambda_m}}\right] \tag{119}$$

alakban fejezhető ki, ahol λ_j a $\lambda_j e^{-\lambda_j\alpha_j} = f_j$ transzcendens egyenlet kisebbik valós gyöke.

Ha a (118) képletben $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha$, úgy speciálisan

$$f_{m-1,m} = m f_1 f_2 \ldots f_m \alpha^{m-1}. \tag{120}$$

A fenti koincidenciák sűrűségére vonatkozó formulák közül több, így pl. (118) és (120) már régebben jól ismert volt a fizikai irodalomban. Ezeket az eredményeket azonban heurisztikus meggondolásokkal nyerték. Ezzel magyarázható, hogy a fenti képletek közül egyesek sok vitára adtak alkalmat. Pedig, ha elfogadjuk a számlálócsövek működésére az I. vagy II. modellt, úgy azok matematikai tárgyalásához kétség nem férhet. Probléma csupán az lehet, hogy az említett modellek helyett a jelenséget pontosabban leíró modellt választunk. (Ezt a célt szolgálja bizonyos mértékig a jelen dolgozatban tárgyalt általános modell.) Az említett képletek szemléletes meggondolással igen plauzibilissé tehetők. Megjegyezzük azonban, hogy a háttérben mélyebb tételek húzódnak meg. Így az I. modellnél alkalmazott (114) képlet PALEY—WIENER egyik tételén nyugszik és a II. modellnél alkalmazott (115) képlet is a Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatok sajátságain alapszik.

Első pillanatra úgy tűnik, hogy a fenti egyszerű képletek csak közelítőek, valamilyen pontos képlet fő tagjai. Ez azonban nincs így. Mindazonáltal többeket megtévesztett ez a gondolat. Így L. JÁNOSSY [23] munkájában megkísérelte kimutatni, hogy a (120) képlet még maradéktaggal is rendelkezik. A „maradéktag" meghatározásának kérdésével pedig E. SCHRÖDINGER [45] és L. JÁNOSSY [24] munkáikban foglalkoznak.

8. §. A koincidenciák várható számának függése a kezdeti állapottól

A 6. §-ban a koincidenciák várható számának megállapításánál feltettük, hogy mind az m számú számlálócső által szolgáltatott folyamat megegyezik az észlelések kérdésénél tárgyalt folyamattal. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a 6. §-ban feltettük, hogy az m számlálócsőből álló rendszer $t=0$ időpontban E_m állapotban van. Ez a feltevés a stacionárius megoldást nem befolyásolja, ugyanis a stacionárius határeloszlás független a kezdeti állapottól. Így az E_m kezdeti állapot mellett megállapított koincidencia sűrűségek bármilyen kezdeti állapot mellett ugyanazok maradnak. Ha véges $(0, t)$ időszakasz vizsgálatára szorítkozunk, vagy a koincidenciák számának eloszlását kívánjuk tanulmányozni, úgy erre a célra a fenti rendszer mellett olyanokat is tekintetbe kell venni, amelyeknél a kezdeti állapot $E_0, E_1, \ldots, E_m$ bármelyike lehet. Tekintsünk ezért az eredetileg vizsgált ritkított eseményfolyamatok mellett a következőképpen definiált újabb folyamatokat.

Tegyük fel, hogy egy alapul vett $\{t_n\}$ rekurrens eseményfolyamat a ritkítás általános modellje szerint lesz megritkítva, de kikötjük, hogy $\chi_0 \equiv 0$ (a $t_0 = 0$ időpontban bekövetkező esemény nem hoz létre impulzust). Ez a feltevés a ritkított folyamat tárgyalására vonatkozóan csupán nyilvánvaló módosítást kíván (vö. 3. §. 3. megjegyzés). Jelölje ilyen folyamatnál $Q(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban nincs folyamatban impulzus és $N(t)$ a $(0, t]$ időközben előforduló ritkított események várható számát. Az eredeti ritkított folyamatnál a megfelelő mennyiségeket $P(t)$ és $M(t)$ jelölte. $P(t)$ és $M(t)$ ismeretében a fent értelmezett $Q(t)$ és $N(t)$ mennyiségek könnyen meghatározhatók. Nyilvánvalóan fennáll ugyanis, hogy

$$Q(t)=\int_0^t P(t-x)\,dF(x) \tag{121}$$

és

$$N(t)=\int_0^t [1+M(t-x)]\,dF(x). \tag{122}$$

Ezen új folyamat értelmezésével a 6. §-ban adott tárgyalást ki tudjuk terjeszteni arra az esetre is, ha a kezdeti állapot nem szükségképpen E_m, hanem az $E_0, E_1, \ldots, E_m$ bármelyike. Meg kell nézni ugyanis, hogy $t=0$ időpontban az m számlálócső által szolgáltatott folyamatok közül melyeknél van folyamatban impulzus és melyeknél nincs. Az előbbieknél $P_j(t)$ és $M_j(t)$ számára a megfelelő folyamat $P(t)$ és $M(t)$ mennyiségeit, míg az utóbbiaknál a (121) illetve (122) alatt értelmezett $Q(t)$ és $N(t)$ mennyiségeket választjuk.

Megjegyezzük még, hogy lehetne arra gondolni, hogy az egyes folyamatok időben véletlenszerűen el vannak tolódva egymáshoz képest. Ennek tekintetbe vétele a tárgyalás lényegét nem érinti, csupán a tételek alakját teszi kissé bonyolulttá.

9. §. A véletlen koincidenciák számának eloszlása Poisson — alapfolyamatokra egyes speciális esetekben

Az $E_0 \to E_1$ átmenetek számának eloszlása. Tegyük fel, hogy az egyes számlálócsövekhez rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkeznek részecskék. A ritkítás az általános modell szerint történik és az impulzusok időtartamának eloszlásfüggvénye rendre $H_1(x), H_2(x), \ldots, H_m(x)$. Tegyük fel, hogy $t=0$ időpontban a rendszer E_0 állapotban van. (Ez az adat a rendszer sztochasztikus állapotát egyértelműen meghatározza.)

Jelölje $t_1^*, t_2, \ldots, t_n^*, \ldots$ az $E_0 \to E_1$ átmenetek időpontjait. Ekkor érvényes lesz, hogy a $\{t_n^*\}$ sorozatban $\mathbf{P}\{t_1^* \leqq x\} = 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)x}$ (ha $x \geqq 0$) és a $t_{n+1}^*-t_n^*$ $(n=1,2,\ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független, pozitív valószínűségi változók. Közös eloszlásfüggvényük $G(x)$ azonban egyelőre ismeretlen. Ha meghatározzuk a $G(x)$ eloszlásfüggvényt úgy ennek segítségével az $E_0 \to E_1$ átmenetek számának eloszlása is könnyen meghatározható a 3. § képleteinek alkalmazásával. Vezessük be még a $\Lambda = \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m$ jelölést és legyen $\hat{G}(x) = 1-e^{-\Lambda x}$ (ha $x \geqq 0$).

$G(x)$ meghatározására vegyük tekintetbe, hogy most $M_{01}^{(0)}(t)$ a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $E_0 \rightarrow E_1$ átmenetek várható száma

$$M_{01}^{(0)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{G}(t) * G_n(t), \tag{123}$$

ahol $G_n(t)$ jelöli a $G(t)$ eloszlásfüggvény önmagával való n-szeres kompozícióját. Ha ebből az egyenletből Laplace—Stieltjes transzformációira térünk át és tekintetbe vesszük $\hat{G}(t)$ fenti alakját, úgy azt nyerjük, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dG(t) = 1 - \frac{A}{A+s} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} dM_{01}^{(0)}(t) \right]^{-1}. \tag{124}$$

Most, ha tekintetbe vesszük, hogy (71)-hez hasonlóan fennáll $N_j'(t) = \lambda_j Q_j(t)$' úgy (108) szerint felírható, hogy

$$M_{01}^{(0)}(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m) \int_0^t Q_1(u) \, Q_2(u) \ldots Q_m(u) \, du,$$

ugyanis most az egyes folyamatoknál rendre $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_m(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy t időpontban nincs folyamatban impulzus. A $Q_j(t)$ valószínűségek (121) szerint a korábban említett $P_j(t)$ valószínűségekkel a következőképpen függnek össze

$$Q_j(t) = \lambda_j \int_0^t e^{-\lambda_j x} P_j(t-x) \, dx, \tag{125}$$

ahol $P_j(t)$ értékét az általános esetben (51) és az I. modellre (70) és a II. modellre (86) képletek szolgáltatják.

Speciálisan $Q_j(t)$ az I. modell esetén

$$Q_j(t) = 1 - \lambda_j \int_0^t Q_j(t-x) \, [1 - H_j(x)] \, dx \tag{126}$$

integrálegyenlet megoldásával nyerhető, míg a II. modell esetén

$$Q_j(t) = e^{-\lambda_j \int_0^t [1 - H_j(x)] dx}. \tag{127}$$

Így végül

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \, d\, G(t) = 1 - \frac{1}{A+s} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} \, Q_1(t) \, Q_2(t) \ldots Q_m(t) \, dt \right]^{-1}, \tag{128}$$

amelynek megfordításával $G(t)$ egyértelműen meghatározható.

MEGJEGYZÉS: Az $E_0 \to E_1$ átmenetek folyamata a II. modell esetén ekvivalens egy olyan folyamattal, amelyet egy $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$ eseménysűrűségű Poisson-folyamatból a II. modell szerinti ritkítással nyerünk, ha az impulzusok időtartamának eloszlásfüggvénye

$$H(x) = \frac{\lambda_1 H_1(x) + \lambda_2 H_2(x) + \ldots + \lambda_m H_m(x)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m}.$$

Az $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek számának eloszlása. Tegyük fel, hogy minden egyes számlálócsőhöz λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkeznek részecskék. A ritkítás történjék az I. modell szerint és legyen minden egyes folyamatnál az impulzusok időtartamának eloszlásfüggvénye $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$ $(x > 0)$.

Tegyük fel először, hogy $t = 0$ időpontban a kezdeti állapot E_0. Jelölje az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek időpontjait rendre $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*, \ldots$. Könnyen látható, hogy a $t_n^* - t_{n-1}^*$ $(n = 1, 2, \ldots; t_0^* = 0)$ időkülönbségek független pozitív valószínűségi változók, mégpedig $\mathbf{P}\{t_1^* \leqq x\} = \hat{G}(x)$ és

$$\mathbf{P}\{t_{n+1}^* - t_n^* \leqq x\} = G(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ahol azonban $\hat{G}(x)$ és $G(x)$ ismeretlenek. A feladat $\hat{G}(x)$ és $G(x)$ meghatározására redukálható, ugyanis ezek ismeretében a 3. §. eredményei alkalmazhatók.

Jelölje $M_{k,k+1}^{(0)}(t)$ folyamatunknál a $(0, t)$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek várható számát. Erre felírható, hogy

$$M_{k,k+1}^{(0)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{G}(t) * G_n(t). \tag{129}$$

Másrészt (108) miatt felírható, hogy

$$M_{k,k+1}^{(0)}(t) = m \binom{m-1}{k} \lambda \int_0^t [1 - Q(u)]^k [Q(u)]^{m-k} du, \tag{130}$$

ahol most $Q(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott folyamatban t időpontban nincs folyamatban impulzus. Most

$$Q(t) = \frac{1}{1 + \lambda\alpha} \left(1 + \lambda \alpha e^{-\frac{1+\lambda\alpha}{\alpha} t}\right), \tag{131}$$

ami a (126) szerint fennálló

$$Q(t) = 1 - \lambda \int_0^t Q(t-x) e^{-x/\alpha} dx$$

integrálegyenlet megoldásával vagy egyszerűbben

$$\alpha Q'(t) + (1 + \lambda\alpha) Q(t) = 1$$

differenciálegyenlet $Q(0)=1$ kezdeti feltétellel vett megoldásával nyerhető. Ezen utóbbi egyenlet könnyen nyerhető

$$Q(t+\Delta t)=(1-Q(t))\frac{\Delta t}{\alpha}+Q(t)(1-\lambda\Delta t)+o(\Delta t)$$

fennállásából.

Ha bevezetjük $\hat{G}(x)$ és $G(x)$ Laplace-transzformáltjait, $\hat{\gamma}(s)$-et és $\gamma(s)$-et, úgy (129)-ből azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dM_{k,k+1}^{(0)}(t)=\frac{\hat{\gamma}(s)}{1-\gamma(s)},$$

azaz (130) figyelembevételével,

$$m\binom{m-1}{k}\lambda\int_0^\infty[1-Q(t)]^k[Q(t)]^{m-k}e^{-st}\,dt=\frac{\hat{\gamma}(s)}{1-\gamma(s)} \tag{132}$$

összefüggésre jutunk, ahol $Q(t)$-t a (131) képlet értelmezi.

A (132) egyenlet nem elegendő a két ismeretlen $\hat{\gamma}(s)$ és $\gamma(s)$ meghatározására. Tekintsünk ezért egyidejűleg egy újabb folyamatot, amelyik $t=0$ időpontban E_{k+1} állapotban van. Ha ennél a folyamatnál $t_1^{**}, t_2^{**}, \ldots, t_n^{**}, \ldots$ jelöli az $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek időpontjait, úgy érvényes lesz, hogy a $t_n^{**}-t_{n-1}^{**}$ ($n=1,2,\ldots;\ t_0^{**}=0$) időkülönbségek független valószínűségi változók, mégpedig $\mathsf{P}\{t_n^{**}-t_{n-1}^{**}\le x\}=G(x)$, ($n=1,2,\ldots$). Jelölje ennél a folyamatnál $M_{k,k+1}^{(k+1)}(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek várható számát. Erre fennáll

$$M_{k,k+1}^{(k+1)}(t)=\sum_{n=1}^\infty G_n(t), \tag{133}$$

ahonnan

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dM_{k,k+1}^{(k+1)}(t)=\frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)}. \tag{134}$$

Most azonban (108) szerint

$$M_{k,k+1}^{(k+1)}(t)= \tag{135}$$

$$=\lambda(m-k+1)\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\binom{m-k-1}{k-j}\int_0^t[1-P(u)]^j[1-Q(u)]^{k-j}[P(u)]^{k+1-j}$$
$$[Q(u)]^{m-2k+j-1}\,du,$$

ahol $Q(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy egy olyan folyamatnál nincs folyamatban impulzus t időpontban, amelynél $t=0$ időpontban sem volt, míg $P(t)$ ugyanezt a valószínűséget egy olyan folyamatra adja meg, amelyiknél $t=0$ időpontban folyamatban van impulzus. $Q(t)$ értékét a (131) képlet adja, míg 4. §. 2., 2. példa szerint

$$P(t)=\frac{1}{1+\lambda\alpha}\left(1-e^{-\frac{1+\lambda\alpha}{\alpha}t}\right). \tag{136}$$

Így tehát

$$\lambda(m-k+1)\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\binom{m-k-1}{k-j}\int_0^\infty[1-P(t)]^j[1-Q(t)]^{k-j}\cdot \tag{137}$$

$$\cdot[P(t)]^{k+1-j}[Q(t)]^{m-2k+j-1}e^{-st}\,dt=\frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)},$$

ahonnan $\gamma(s)$ meghatározható. Ha $\gamma(s)$ ismeretes, úgy (132)-ből $\hat{\gamma}(s)$ is meghatározható. $\gamma(s)$ és $\hat{\gamma}(s)$ megfordításával pedig a keresett $G(x)$ és $\hat{G}(x)$ eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók. Ezek ismeretében a 3. §. módszereinek segítségével a véletlen koincidenciák számának eloszlása is meghatározható. Az aszimptotikus eloszlás meghatározásához azonban elegendő $G(x)$ átlagának és szórásának ismerete.

Tekintsük most egyszerűség kedvéért az $E_{m-1}\to E_m$ átmenetek folyamatát. Az m-szeres véletlen koincidenciák sűrűségét már meghatároztuk. Ez (116) szerint

$$f_{m-1,m}=\frac{m\lambda^m\alpha^{m-1}}{(1+\lambda\alpha)^m}.$$

(137) szerint $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\gamma(s)=1-\left\{1+m\lambda\int_0^\infty[1-P(t)]^{m-1}P(t)\,e^{-st}\,dt\right\}^{-1},$$

azaz

$$\gamma(s) = \tag{138}$$

$$1-\left\{1+\frac{m\lambda\alpha}{(1+\lambda\alpha)^m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\left[\frac{(\lambda\alpha)^{m-1-j}}{\alpha s+j(1+\lambda\alpha)}-\frac{(\lambda\alpha)^{m-1-j}}{\alpha s+(j+1)(1+\lambda\alpha)}\right]\right\}^{-1},$$

ahonnan $G(x)$ átlaga

$$A_m=\frac{(1+\lambda\alpha)^m}{m\lambda^m\alpha^{m-1}} \tag{139}$$

és szórásnégyzete

$$(140) \qquad B_m^2 = \frac{(1+\lambda\alpha)^m \left\{ (1+\lambda\alpha)^{m-1} + 2\left[\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \binom{m}{j+1} (\lambda\alpha)^{m-j} - m(\lambda\alpha)^m \right] \right\}}{m^2 \lambda^{2m} \alpha^{2m-2}}.$$

A t idő alatt észlelt m-szeres véletlen koincidenciák száma aszimptotikusan normális eloszlást követ t/A_m átlaggal és $B_m^2 t/2A_m^3$ szórásnégyzettel.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.

IRODALOM

[1] L. Alaoglu and N. M. Smith: Statistical theory of scaling circuit, *Physical Review*, **53** (1938), 832—836.

[2] G. E. Albert and L. Nelson: Contributions to the statistical theory of counter data, *Annals of Mathematical Statistics*, **24** (1953) 9—22.

[3] Békéssy A.: Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűség-eloszlásáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*, **3** (1954), 171—181.

[4] D. Blackwell: A renewal theorem, *Duke Mathematical Journal*, **15** (1948), 145—151.

[5] L. v. Bortkiewitz: Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, *Berlin*, 1913.

[6] D. R. Cox and W. L. Smith: A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory, *Skand. Aktuarietidskr*, **53** (1953), 139—150.

[7] R. O. Davies and J. W. Leech: The statistics of scaled random events, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **50** (1954), 575—580.

[8] W. Doeblin: Sur l'ensemble de pussances d'une loi de probabilité, *Studia Mathematica*, **9** (1941), 71—96.

[9] C. Domb: The problem of random interval on a line, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **43** (1947), 329—431.

[10] C. Domb: Some probability distributions connected with apparatus, *Proceedings of the Cambridge Phil. Soc.*, **44** (1948), 335—341.

[11] C. Domb: Some probability distributions connected with recording apparatus II., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **46** (1950), 429—435.

[12] J. L. Doob: Renewal theory from the point of view of the theory of probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 422—438.

[13] Е. Б. Дынкин: Некоторые Пределные Теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, [Известия Академии Наук СССР, 19 (1955), 247—266].

[14] C. Eckart and F. R. Shonka: Accidental coincidences in counter circuits, *Physical Review*, **53** (1938), 752—756.

[15] N. Feather: On the statistics of random distributions of paired events, with applications to the result obtained in the use of the interval selector with particle counters, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **39** (1943) 84—99.

[16] N. Feather: The theory of counting experiments using pulsed sources: chance coincidences and countin-grate losses, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45** (1949), 648—659.

[17] W. Feller: On probability problems in the theory of counters, *Courant Anniversary Volume*, New-York (1948), 105—115.

[18] W. Feller: On the integral equation of renewal theory, *Annals of Mathematical Statistics*, **12** (1941), 243—267.

[19] W. Feller: Fluctuation theory of recurrent events, *Transactions of American Math. Soc.*, **67** (1949), 98—119.

[20] J. Giltay: A counter arrangement with constant resolving time, *Physica*, **10** (1943), 725—734.

[21] Г. В. Гнеденко: К теории счётчиков Гейгер—Мюллера [Жур. Экспер. и Теорет. Физ., **11** (1941), 101—106].

[22] J. M. Hammersley: On counters with random dead time I., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **49** (1953), 623—637.

[23] L. Jánossy: Rate of n-fold accidental coincidences, *Nature*, **153** (1944), 165.

[24] L. Jánossy: Rate of n-fold accidental coincidences, *Nature*, **153** (1944), 592—593.

[25] Ch. Jordan: Calculus of finite differences, *Budapest*, 1939.

[26] Res Jost: Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler, *Helvetica Physica Acta*, **20** (1947), 173—182.

[27] J. Juilfs: Zur Berechnung der zufälligen Mehrfachkoinzidenzen, *Physikalische Zeitschrift*, **40** (1939). 697—701.

[28] P. G. Klemens: Resolution of devices actuated by random events, *Philosophical Magazine*, **39** (1948), 656—660.

[29] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых [Успехи Математических Наук, т. IV. вып., 4 (1949), 168—172].

[30] L. Kosten: On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger—Müller counter in a constant interval, *Physica*, **10** (1943), 749—756.

[31] J. D. Kurbatov and H. B. Mann: Correction of *G—M* counter data, *Physical Review*, **68** (1945), 40—43.

[32] C. Levert and W. L. Scheen: Probability fluctuations of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation, *Physica*, **10** (1943), 225—238.

[33] H. Maier—Leibnitz: Die Koinzidenzenmethode und ihre Anwendung auf kernphysikalische Probleme, *Physikalische Zeitschrift*, **43** (1942), 333—362.

[34] S. Malmquist: A statistical problem connected with the counting of radioactive particles, *Annals of Mathematical Statistics*, **18** (1947), 255—264.

[35] H. B. Mann: A note on the correction of Geiger—Müller counter data, *Quarterly Applied Mathematics*, **4** (1946), 307—309.

[36] R. E. A. C. Paley—N. Wiener: Fourier tansforms in the complex domain, *New-York*, 1934.

[37] F. Pollaczek: Sur la théorie stochastique de compteurs électroniques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **238** (1954), 766—768.

[38] A. Ramakrishnan: Some simple stochastic processes, *Journal Royal Statistical Society B.*, **13** (1951), 131—140.

[39] A. Ramakrishnan and P. M. Mathews: A stochastic problem relating to counters, *Phil. Magazine*, **44** (1953), 1122—1128.

[40] A. Ramakrishnan: Counters with random dead time, *Phil. Magazine*, **45** (1954), 1050—1052.

[41] A. E. Ruark and F. E. Brammer: The efficiency of counters and counter circuits, *Physical Review*, **52** (1937), 322—324.

[42] Rutherford—Chadwick and Ellis: Radiations from radioactiv substances, *Cambridge*, 1920.

[43] W. F. Sedgwick: On the theory of successive radioactive transformations, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **38** (1942), 280—287.

[44] L. I. Schiff: Statistical analysis of counter data, *Physical Review*, **50** (1936), 88—96.

[45] E. Schrödinger: Rate of *n*-fold accidental coincidences, *Nature*, **153** (1944), 592—593.

[46] Takács L.: Koincidencia jelenségek valószínűségszámítási tárgyalása állandó időtartamú események esetén, *Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, (1950), 731—740.

[47] Takács L.: Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén, *Az MTA III. O. Közleményei*, 1 (1951), 371—386.

[48] Takács L.: Poisson-folyamat által származtatott történésfolyamatokról, *Az MTA III. O. Közleményei*, 4 (1954), 525—541.

[49] Takács L.: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalására, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*, 2 (1953), 135—151.

[50] Takács L.: Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*, 3 (1954), 115—128.

[51] Takács L.: Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól, *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, 4 (1954), 473—504.

[52] Takács L.: Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról, *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, 4 (1954), 571—587.

[53] Takács L.: Részecskeszámlálóknál fellépő koincidencia problémákról, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*, 2 (1953), 153—163.

[54] L. Takács: On a probability problem arising in the theory of counters, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **52** (1956) 488—498.

[55] L. Takács: On the sequence of events, selected by a counter from a recurrent process of events (Теория Вероятностей и её Применения), **1** (1956), 90—102.

[56] Takács L.: Egy részecskeszámlálással kapcsolatos valószínűségszámítási problémáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, 1 (1956), 93—98.

[57] Takács L.: Az általános valószínűségi tételről, *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, 5 (1955), 467—476.

[58] S. Täcklind: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, (1944), 1—15.

[59] S. Täcklind: Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, (1945), 68—105.

[60] H. Volz: Über die Trennschärfe von Zählanordnungen, *Zeitschrift für Physik*, **93** (1953), 531—542.

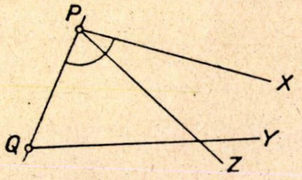
A HIPERBOLIKUS SÍK ANALITIKUS GEOMETRIÁJÁNAK INDEPENDENS ELEMI FELÉPÍTÉSE A HILBERT-FÉLE „VÉGKALKULUS" ALAPJÁN

SZÁSZ PÁL*

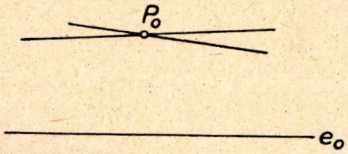
1. §.
Bevezetés

Ha a sík hiperbolikus geometriáját kizárólag síkbeli axiómák alapján és folytonossági axiómák használata nélkül akarjuk felépíteni, amit először D. HILBERT [1] tett meg, akkor az illeszkedés vagy összetartozás, az elrendezés és a kongruencia síkbeli I., II., III. HILBERT-féle axióma-csoportjai [2] mellett elegendő az a feltevés, amely az alábbi két axiómában nyer kifejezést.

IV$_1$. *Legyen P és Q két különböző pont a síkon s QY valamely félegyenes a PQ egyenes egyik oldalán. Akkor mindig van PQ ugyanezen oldalán olyan PX félegyenes, amely QY-t nem metszi, míg a $QPX\sphericalangle$ minden közbülső PZ félegyenese metszi e QY félegyenest* (1. ábra).



1. ábra



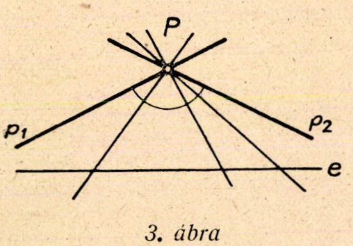
2. ábra

IV$_2$. *Van olyan e_0 egyenes és azon kívüli P_0 pont a síkban, hogy P_0-on át nem csak egy olyan egyenes fektethető, amely e_0-t nem metszi* (2. ábra).

Valóban, amint egy előbbi dolgozatomban [3] megjegyeztem és más helyen [4] be is bizonyítottam, ezekből már következik az a *hiperbolikus paralelaxióma*, amelyre D. HILBERT [5] a hiperbolikus síkgeometriát az I., II., III. axióma-csoportok mellett felépítette. Vagyis a fenti axiómák alapján bebizonyítható a következő

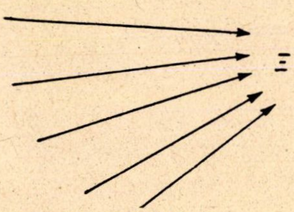
* *Előadta az Eötvös Loránd Tudományegyetem tudományos ülésszakán a matematikai szekció 1956. április 17-i ülésén.*

TÉTEL. *Ha e tetszőleges egyenes és P valamely rajta kívül fekvő pont, akkor a P ponton átmenő és az e egyenest metsző egyenesek bizonyos $(p_1, p_2)\sphericalangle$ közbülső egyeneseit alkotják* (3. ábra). E szög p_1, p_2 szárai, amelyek tehát már nem metszik az e egyenest, a P pontból az e egyeneshez húzott *elpattanó egyenesek* vagy *hiperbolikus paraleláк.*

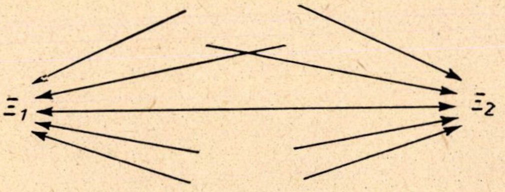


3. ábra

D. HILBERT [6] *„végeknek"* nevezte *a végtelen távoli pontokat,* amelyeket egy-egy *elpattanó egyenessereg* definiál (4. ábra). Mindegyikről azt mondjuk, hogy a definiáló egyenessereg egyenesei és csak ezek *rajta átmennek,* és más effélét. Minden egyenesnek két vége van, mert a fenti tételből folyólag két elpattanó egyenessereghez tartozik (5. ábra). Miután D. HILBERT [7] bebizonyította azt az alapvető tételt, hogy *ha két egyenes nem metszi egymást és*

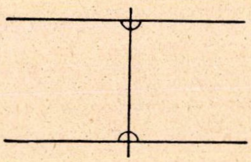


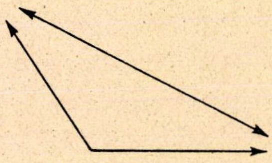
4. ábra

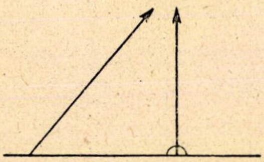


5. ábra

nem is elpattanók, akkor van közös merőlegesük (6. ábra), ennek alapján sikerült azt is bebizonyítania [8], hogy *két vég mindig összeköthető egyenessel* (7. ábra), amely természetesen egyetlen. Ebből már következik, hogy *valamely egyenesre rajta kívül fekvő végből egy és csak egy merőleges bocsátható*

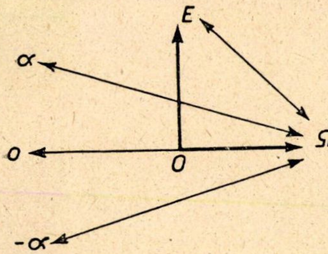

6. ábra


7. ábra

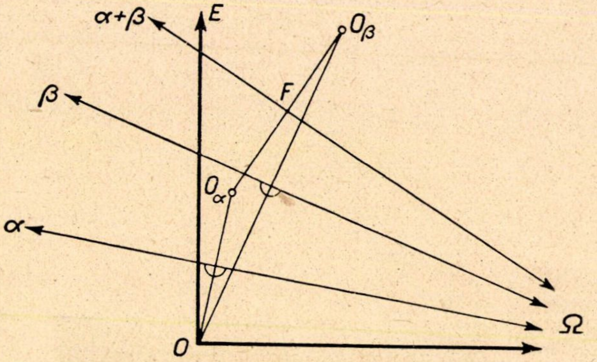

8. ábra

(8. ábra). Előkészítő tételei közül csak ezeket emelem itt ki. Mármost a HILBERT-féle *„végkalkulus"* célomnak megfelelő fogalmazásban röviden a következő.

Vegyünk fel valamely derékszöget, amelynek csúcsa O, szárainak mint félegyeneseknek végei Ω és E (9. ábra). Az Ω véget (ez HILBERT jelölésében a ∞) kitüntetjük és a kalkulust az ettől különböző végekre értelmezzük. Egy ilyen α véget *pozitív végnek* mondunk, ha az $\alpha\Omega$ egyenes az $O\Omega$ egyenesnek az $E\Omega$ egyenest tartalmazó oldalán van, viszont *negatív végnek*, ha a másik oldalon van [9]. Az $\alpha\Omega$ egyenes $O\Omega$-ra vonatkozó tükörképének másik végét $-\alpha$-val, az $O\Omega$ másik végét 0-val jelöljük. A végek összeadását D. HILBERT [10] az alábbi módon definiálja.



9. *ábra*



10. *ábra*

Legyenek α és β az Ω-tól különböző végek. Vegyük az O pontnak az $\alpha\Omega$ egyenesre vonatkozó O_α, valamint az $\beta\Omega$-ra vonatkozó O_β tükörképét. Az $\overline{O_\alpha O_\beta}$ egyenesdarab felezőpontját (ha O_α és O_β összeesik vagyis $\alpha = \beta$, akkor ez összeeső pontokat) F-fel jelölve, *az „$\alpha + \beta$ összeg" alatt az $F\Omega$ egyenes másik végét értjük* (10. ábra).

A szorzat definícióját egyszerűbben fejezhetjük ki, ha HILBERTtől eltérően bevezetjük a következő *távolságfüggvényt*, amely egész tárgyalásunkban alapvető szerepet fog játszani.

Az $O\Omega$ egyenest Ω felé irányítván, az előjellel vett $\overline{OA} = t$ egyenesdarab (távolság) A végpontjában állítsunk $O\Omega$-ra merőlegest. Jelöljük $E(t)$-vel e merőleges pozitív σ végét:

(1) $$\sigma = E(t)$$

(11. ábra). Nyilván *bármely σ pozitív vég egy és csak egy előjeles t egyenesdarabhoz tartozik.*

Ez (1) alatti jelölés mellett *a $\sigma_1 = E(t_1)$ és $\sigma_2 = E(t_2)$ pozitív végek „$\sigma_1\sigma_2$ szorzata" alatt az $E(t_1 + t_2)$ végét értjük, képletben*

(2) $$E(t_1)\,E(t_2) = E(t_1 + t_2)$$

(12. ábra). Megállapodunk azután abban, hogy *pozitív α, β végekre*

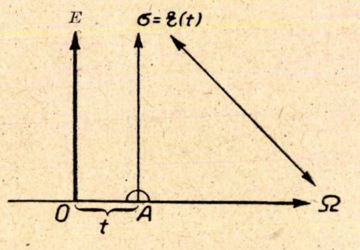
(3) $$\alpha(-\beta) = (-\alpha)\beta = -\alpha\beta, \qquad (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$$

és az Ω-tól különböző bármely ξ végre

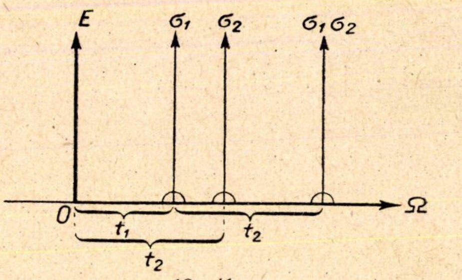
(4) $$\xi \cdot 0 = 0 \cdot \xi = 0$$

legyen.

Ezzel az Ω-tól különböző végek szorzását minden esetben definiáltuk s ez csak a fogalmazásban különbözik D. HILBERT [11] definíciójától.



11. ábra



12. ábra

Az E pozitív vég az (1) alatti jelölésben $E(0)$ s ez a szorzásnál a *pozitív egység* szerepét játssza, minthogy (2) szerint $E(t)\,E(0) = E(0)\,E(t) = E(t)$. Azért is erre az

(5) $$E(0) = 1$$

jelölést vezetjük be, ami (2) alapján még az

(5*) $$E(t)\,E(-t) = 1$$

alakban is írható.

A 0-val jelölt vég, amely a szorzásnál (4) szerint a *zérus* szerepét játssza, az összeadásnál is mint ilyen viselkedik, mert nyilván az Ω-tól különböző bármely ξ végre

(6) $$\xi + 0 = 0 + \xi = \xi$$

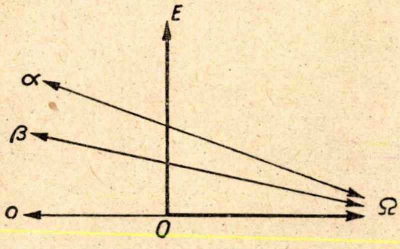
és

(7) $$\xi + (-\xi) = 0.$$

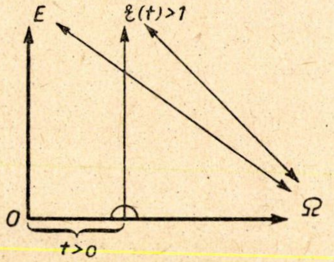
D. HILBERT idézett munkájában megmutatta, hogy *az így definiált végkalkulusban a négy alapműveletet illetően a közönséges törvények érvényesek.* Érvényes azonban az a fontos tétel is, hogy *pozitív végnek mindig van pozitív négyzetgyöke* [12]. Valóban (2) értelmében $E(t) = E\left(\frac{t}{2}\right)^2$. Ezekhez még hozzátehetem, miszerint *megállapodva abban, hogy $\alpha > \beta$ (vagy $\beta < \alpha$), ha $\alpha - \beta$ pozitív, az egyenlőtlenség is a közönséges törvényeket követi.* Különben könnyen belátható, miszerint *pozitív α és β végek esetén $\alpha > \beta$ azt jelenti,* *hogy a $\beta\Omega$ egyenes az $O\Omega$ és $\alpha\Omega$ egyenesek közé esik* (13. ábra). Ennek folyománya, hogy $E(t) > 1$, ha $t > 0$ (14. ábra) s ebből tüstént következik, hogy *általában*

$$(8) \qquad E(t_2) > E(t_1), \quad ha \quad t_2 > t_1.$$

Az itt bemutatásra kerülő dolgozatban a végkalkulus birtokában a hiperbolikus sík analitikus geometriája alapjainak *közvetlen* felépítését adom, amely a hiperbolikus trigonometriára nem támaszkodik, hanem éppen ellenkezőleg, ez utóbbit mint következményt magában foglalja. E felépítés *independens*, vagyis az euklideszi geometriát nem használja fel. És HILBERT munkájától eltérően a projektív geometriát is elkerüli, ennyiben teljesen *elemi* módszert követ.



13. ábra



14. ábra

Rövidség kedvéért az $E(t)$ távolságfüggvény mellett célszerű bevezetni még a

$$(9) \quad C(t) = \frac{E(t)+E(-t)}{2}, \; S(t) = \frac{E(t)-E(-t)}{2}, \; T(t) = \frac{S(t)}{C(t)} = \frac{E(t)-E(-t)}{E(t)+E(-t)}$$

távolságfüggvényeket. Amíg $E(t)$ az exponenciális függvény analogonja, a (9) alattiak a hiperbolás függvények analogonjai, hasonló formális tulajdonságokkal rendelkeznek. Így pl. az első kettő között fennáll a

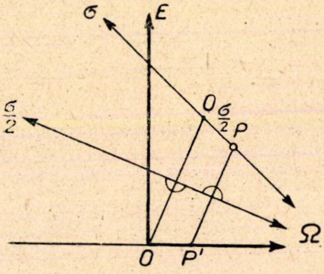
$$(10) \qquad C(t)^2 - S(t)^2 = 1$$

alapreláció. És változásukat tekintve is a hiperbolás függvényekre emlékeztetnek, mint ahogy $E(t)$ az exponenciális függvényre emlékeztet.

2. §.

Valóságos pont Weierstrass-féle homogén koordinátái

A sík valamely P pontját jellemezhetjük az alábbi két adattal. Az egyik a $P\Omega$ egyenes másik vége, amely legyen σ (15. ábra). A másik adatot előállítandó vegyük a P pontnak a $\frac{\sigma}{2}$ véget Ω-val összekötő egyenesre vonatkozó P' tükörképét. Ez $O\Omega$-ra esik, minthogy az $O_{\frac{\sigma}{2}}$ pontot Ω-val összekötő egyenes másik vége az összeg definíciója értelmében (1. §) $\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}=\sigma$, vagyis a $\sigma\Omega$ egyenes az $O\Omega$ tükörképe a $\frac{\sigma}{2}$ végű előbbi egyenesre vonatkozólag. Mármost az Ω felé irányított $O\Omega$ egyenesen előjellel vett $\overline{OP'}=t$ egyenesdarab a másik adat, amely az előbbi σ véggel együtt nyilván meghatározza a P pontot. Nevezzük e t, σ adatokat a P pont *vegyeskoordinátáinak*. Ezek segélyével meg lehet mutatni, hogy fennáll a következő



15. ábra

TÉTEL. *A hiperbolikus sík pontjai kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban vannak az Ω-tól különböző végekből képezett azon* (x_1, x_2, x_3) *értékrendszerekkel, amelyekre*

(1) $$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1$$

és

(2) $$x_3 > 0.$$

E vonatkozás úgy létesíthető, hogy a vegyeskoordinátákban adott (t, σ) *ponthoz az*

(3) $$\begin{cases} x_1 = S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t) \\ x_2 = \sigma E(-t) \\ x_3 = C(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t) \end{cases}$$

értékrendszert rendeljük. A bizonyításban felhasználtatik az egyenlőtlenség fogalma (1. §.).

Nevezzük e (3) alatti x_1, x_2, x_3 végeket a t, σ vegyeskoordinátákkal bíró pont WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátáinak.** (3)-ból a $t=0$, $\sigma=0$ esetre adódik, hogy *az O pont* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátái*

(4) $$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1.$$

Később, a koordináták transzformációjánál (4. §.) fontos szerepet játszik, hogy *bármely két* (x_1, x_2, x_3) *és* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ *pontra*

(5) $$x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 > 0.$$

* Amint a további tárgyalásból kiderül (5. § (4)), ezek a folytonossági axiómák elfogadása esetén átmennek az ismert WEIERSTRASS-féle koordinátákba.

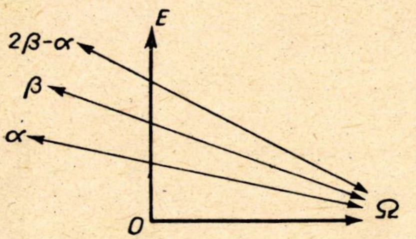
3. §.

Az egyenes egyenlete. Weierstrass-féle homogén vonalkoordináták

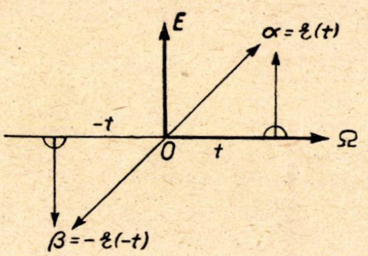
Az egyenes egyenletének előállítását D. HILBERT [13] alábbi két segédtételére lehet alapítani.

1° *segédtétel. Valamely α végű $\alpha\Omega$ egyenesnek a β-végű $\beta\Omega$ egyenesre vonatkozó tükörképe a $2\beta-\alpha$ véget Ω-val összekötő egyenes* (16. ábra).

2° *segédtétel. Az O ponton átmenő és $O\Omega$-tól különböző egyenes α, β végeinek szorzata $\alpha\beta=-1$* (17. ábra).



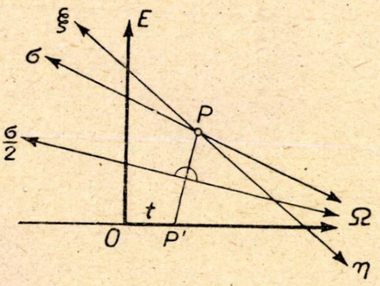
16. ábra



17. ábra

Ez utóbbi abból következik, hogy ha e végek közül a pozitív $\alpha=E(t)$, akkor a másik nyilván $\beta=-E(-t)$. Ezek szorzata valóban $-E(-t)E(t)=$ $=-E(0)=-1$.

Tekintsünk először egy az Ω-tól különböző ξ, η végekkel bíró egyenest (18. ábra). Legyen ez egyenes valamely tetszőleges pontja vegyeskoordinátákban $P(t, \sigma)$. Akkor a síkot a $\frac{\sigma}{2}$ véget Ω-val összekötő egyenesre vonatkozólag tükrözve, azután $O\Omega$ mentén $-t$ darabbal eltolva, P az O pontba kerül. Ennélfogva az eredeti $\xi\eta$ egyenes e tükrözés és eltolás útján egy, az O ponton átmenő egyenessé lesz. A ξ, η végek a tükrözésnél az 1° segédtétel értelmében rendre a $\sigma-\xi, \sigma-\eta$ végekbe mennek át, ezek pedig az eltolásnál a szorzat definíciója szerint (1. §. (2), (3), (4)) rendre az $E(-t)(\sigma-\xi)$, $E(-t)(\sigma-\eta)$ végekbe jutnak. Minthogy az egyenes most már átmegy az O ponton, e két vég szorzata a 2° segédtétel értelmében (1. §. (2))



18. ábra

$$E(-2t)(\sigma-\xi)(\sigma-\eta)=-1. \tag{1}$$

Tüstént belátható, hogy viszont, ha valamely (t, σ) pontra (1) fennáll, akkor e pont rajta van a $\xi\eta$ egyenesen. Vagyis (1) *a ξ, η végeket összekötő egyenes egyenlete vegyeskoordinátákban.*

Az (1) egyenletet $E(t)$-vel végigszorozva és a megelőző § (3) alatti képletei alapján az x_1, x_2, x_3 koordinátákra átírva, nyerjük, hogy *a ξ, η végeket összekötő egyenes egyenlete* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátákban*

(2) $$(\xi\eta-1)x_1+(\xi+\eta)x_2-(\xi\eta+1)x_3=0.$$

Az η végű, $\eta\Omega$ egyenes egyenlete a t, σ vegyeskoordinátákban nyilván $\sigma-\eta=0$. Ezt $E(-t)$-vel végigszorozva és az x_1, x_2, x_3 koordinátákra átírva, adódik, hogy *az η véget Ω-val összekötő egyenes egyenlete* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátákban*

(3) $$\eta x_1+x_2-\eta x_3=0.$$

A (2) alatti egyenlet az

(4) $$u=\frac{\xi\eta-1}{\xi-\eta}, \quad v=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \quad w=\frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta}$$

jelölés mellett $(\xi-\eta)$-val való végigosztással az

(2*) $$ux_1+vx_2-wx_3=0$$

alakot ölti, amelyben

(5) $$u^2+v^2-w^2=1.$$

Nevezzük a (4) alatti u, v, w végeket *a ξ vég felé irányított $\xi\eta$ egyenes* WEIERSTRASS-*féle homogén vonalkoordinátáinak,* (2*)-ot pedig ez egyenes egyenlete *normálalakjának.*

Per definitionem *az η véget Ω-val összekötő és Ω felé irányított egyenes* WEIERSTRASS-*féle homogén vonalkoordinátái*

(4*) $$u=\eta, \quad v=1, \quad w=\eta$$

és (3) ez egyenes egyenletének *normálalakja.* Ellenkező irányításnál a vonalkoordináták (-1)-gyel szorzódjanak s a (-1)-gyel végigszorzott egyenlet neveztessék normálalaknak.

Könnyen meg lehet mutatni, hogy *minden* (2*) *alatti egyenlet, amelyben az u, v, w együtthatókra* (5) *fennáll, valamely irányított egyenes egyenletének normálalakja.*

4. §.

A Weierstrass-féle koordináták transzformációja

Vegyünk fel a végkalkulus értelmezésére szolgáló ΩOE derékszög mellett még valamely $\Omega' O' E'$ derékszöget (19. ábra). Tekintsük a síknak azt a mozgását vagy átfordítását, amely ez $\Omega' O' E'$ derékszöget az ΩOE-ba viszi.

Valamely irányított e egyenesnek az $\Omega' O' E'$ „koordinátarendszerre" vonatkozó WEIERSTRASS-*féle homogén vonalkoordinátái alatt annak az e' irányított egyenesnek az $\Omega O E$ derékszöghöz tartozó végkalkulusban definiált u', v', w' vonalkoordinátáit értjük, amelybe a mondott mozgás vagy átfordítás ez e egyenest irányításával átviszi.*

Hasonlóképp definiáljuk valamely P pontnak az $\Omega' O' E'$ koordinátarendszerre vonatkozó WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátáit.*

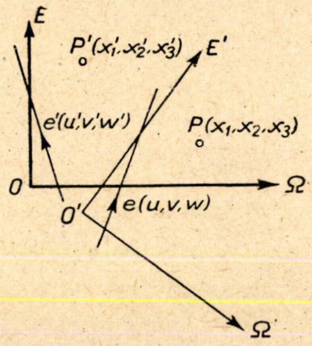
A régi és az új koordináták közötti összefüggés megállapítását először a vonalkoordinátákra intézem el. Mégpedig annak felhasználásával, hogy *a síknak mozgása vagy átfordítása az Ω-tól különböző minden ξ véget*

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$$

végbe visz át ($\gamma \neq 0$ *esetén a* $-\frac{\delta}{\gamma}$ *véget Ω-ba, ezt pedig az* $\frac{\alpha}{\gamma}$ *végbe*), *ahol az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ együtthatók csak az új $\Omega' O' E'$ rendszertől függnek és*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

aszerint, amint mozgásról vagy átfordításról van szó [14].



19. ábra

Az eredmény az, hogy *az új vonalkoordináták az eredetiekkel kifejezve*

$$(1)\qquad \begin{cases} u' = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ v' = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ w' = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

ahol az a_{jk} együtthatók csak az új rendszertől függnek, közöttük az

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1 \\ -a_{13}^2 - a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

és

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0 \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} - a_{33}a_{31} = 0 \end{cases}$$

egyenletek állanak fenn, továbbá ez transzformáció determinánsa

$$(4)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = 1.$$

Ebből azután a 2. § (5) alatti egyenlőtlenségének felhasználásával következik, hogy *valamely pontnak új koordinátái az eredetiekkel kifejezve*

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1' = \pm (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ x_2' = \pm (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ x_3' = \pm (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases}$$

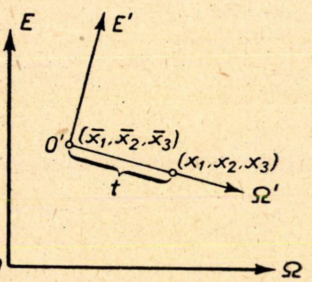
ahol az a_{jk} együtthatók ugyanazok, mint (1) *alatt és a* $+$ *vagy a* $-$ *jel érvényes aszerint, amint a két koordinátarendszer megegyező vagy ellenkező értelmű.*

5. §.

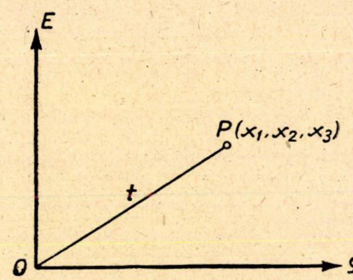
Két pont távolsága. Az $u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2$ kifejezés jelentése. Pontnak egyenestől való távolsága

Az új koordinátarendszer megfelelő választásával (20. ábra) a koordinátatranszformáció képleteiből (4. § (5)) az együtthatók közötti egyenletek alapján (4. § (2), (3)) következik, hogy az eredeti rendszerben *az* (x_1, x_2, x_3) és $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ *pontok t távolságára*

$$(1)\qquad C(t) = x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1.$$



20. *ábra*



21. *ábra*

Ez (1) távolságképlet felderíti az x_3 koordináta egyszerű geometriai jelentését. Nevezetesen második pontnak az O pontot véve (21. ábra), amelynek koordinátái 0, 0, 1 (2. § (4)), az (1) képlet, azt mondja, hogy *a P pont harmadik koordinátája a* $t = \overline{OP}$ *egyenesdarabbal kifejezve*

$$(2)\qquad x_3 = C(t).$$

Hasonlóképp, a vonalkoordináták transzformációjának képleteiből (4. § (1), (2), (3)) az új koordinátarendszer alkalmas választásával rendre kiadódik, hogy

1° *egymást metsző irányított egyenesekre*

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = T(a),$$

ahol a az e_2 egyenes pozitív irányba eső vége e_1-en levő vetületének a két egyenes metszéspontjától számitott távolsága előjellel (22. ábra).

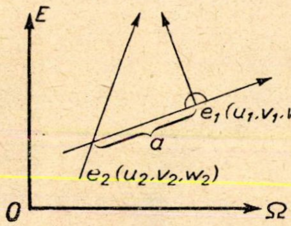
2° *közös merőlegessel biró és egyenlőképp irányított egyenesekre*

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = C(a),$$

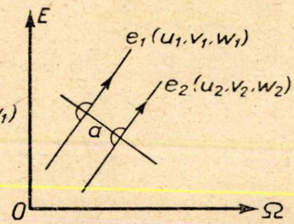
ahol a jelenti a közös merőlegesnek az egyenesek közé eső darabját (23. ábra).

3° *elpattanó és egyenlőképp irányított egyenesekre* (24. ábra)

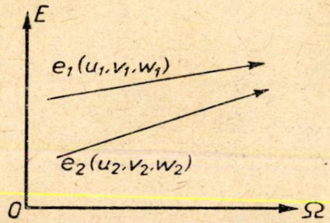
$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 1.$$



22. *ábra*



23. *ábra*



24. *ábra*

E tételekből a $C(t)$ és $T(t)$ függvények változására tekintettel (1. §) következik, hogy *az egymástól különböző* (u_1, v_1, w_1) *és* (u_2, v_2, w_2) *egyenesek*

1) *akkor és csak akkor metszik egymást, ha*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| < 1,$$

jelesen akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, midőn

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 0;$$

2) *akkor és csak akkor bírnak közös merőlegessel, ha*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| > 1;$$

3) *akkor és csak akkor elpattanók, ha*

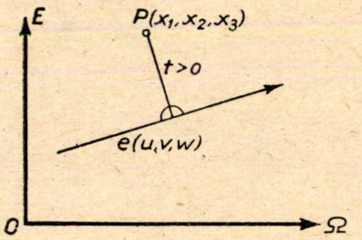
$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = \pm 1.$$

Végül a vonal- és pontkoordinátákra vonatkozó képletekből együttesen, ugyanolyan értelmű új koordinátarendszer alkalmas választásával adódik, hogy *az* (x_1, x_2, x_3) *pontnak az* (u, v, w) *irányított egyenestől való t távolságára*

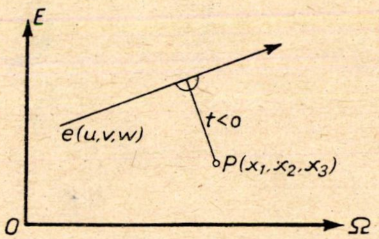
(3) $$u x_1 + v x_2 - w x_3 = S(t),$$

amennyiben t pozitívnak vagy negatívnak vétetik aszerint, amint a pont az egyenesnek a pozitív vagy negatív oldalán van (25. ábra).

E tétel felderíti az x_1 és x_2 koordináták egyszerű geometriai jelentését. Minthogy ugyanis az E vég a végkalkulusban $\xi = 1$ és az OE egyenes másik

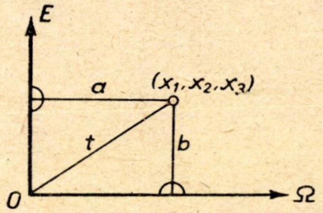


25a. ábra



25b. ábra

vége $\eta = -1$, azért ez egyenes vonalkoordinátái (3. §. (4)) $-1, 0, 0$, tehát az (x_1, x_2, x_3) pontnak (26. ábra) az OE egyenestől való előjeles $-a$ távolságára a fenti tétel szerint $-x_1 = S(-a)$, vagyis $x_1 = S(a)$. Mivel pedig az Ω felé irányított $O\Omega$ egyenes vonalkoordinátái (3. §. (4*)) $0, 1, 0$, az előbbi pontnak ettől való előjeles b távolságára a tétel értelmében $x_2 = S(b)$. Ez eredményt a (2) alattival egyesítve, kimondhatjuk, hogy *ha valamely pont az OE egyenestől a, az $O\Omega$-tól b, az O ponttól pedig t távolságra van és az a távolságot az OE jobboldalán, a b távolságot az $O\Omega$ fölött pozitívnak vesszük s a másik oldalon negatívnak, akkor e pont* Weierstrass-*féle homogén koordinátái az ΩOE derékszöghöz tartozó végkalkulusban*



26. ábra

$$x_1 = S(a), \quad x_2 = S(b), \quad x_3 = C(t). \tag{4}$$

6. §.

A távolságtrigonometria alapképletei

Alkalmazásképp előállítom a derékszögű háromszög *távolságtrigonometriájának* két alapképletét, amelyekből a többi következik.

Helyezzük el a derékszögű háromszöget a 27. ábrán látható módon. A b oldalt tartalmazó egyenes végei $\xi = E(a)$ és $\eta = -E(a)$ s mivel a P pont harmadik koordinátája $x_3 = C(c)$ (5. §. (2)), az egyenes egyenlete szerint (3. §. (2))

$$[-E(2a) - 1]\, x_1 + 0 \cdot x_2 - [-E(2a) + 1]\, C(c) = 0,$$

honnan (1. §. (2), (9))

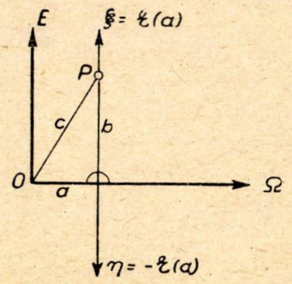
$$(1) \qquad x_1 = \frac{E(2a)-1}{E(2a)+1} C(c) = T(a)\, C(c).$$

De mivel $x_1, x_2 = S(b)$ (5. §. (4)) és $x_3 = C(c)$ WEIERSTRASS-féle homogén koordináták, azért (2. §. (1))

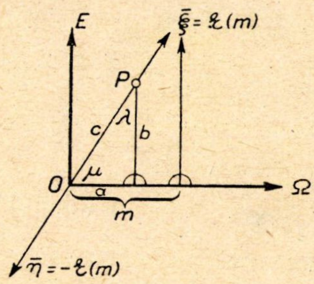
$$C(c)^2 - S(b)^2 - x_1^2 = 1,$$

tehát (1. §. (10))

$$x_1^2 = C(c)^2 - [1 + S(b)^2] = C(c)^2 - C(b)^2.$$



27. ábra



28. ábra

Ezt az előbbivel összevetve, adódik

$$C(c)^2 [1 - T(a)^2] = C(b)^2.$$

Mivel pedig

$$1 - T(a)^2 = \frac{C(a)^2 - S(a)^2}{C(a)^2} = \frac{1}{C(a)^2},$$

nyerjük, hogy *a derékszögű háromszög oldalai között fennáll a*

$$(\mathrm{I}) \qquad C(c) = C(a)\, C(b)$$

egyenlet (27. ábra).

Ha most a c oldalt tartalmazó egyenes pozitív végéből $O\Omega$-ra merőlegest bocsátunk s a talppont O-tól való távolsága vagyis a b oldallal szemközti μ szöghöz tartozó *elpattanási távolság* az m egyenesdarab (28. ábra), akkor ez egyenes végei $\bar{\xi} = E(m)$ és (4. §. 2° segédtétel) $\bar{\eta} = -E(-m)$. S mivel a P pont második koordinátája $x_2 = S(b)$ (5. §. (4)), az egyenes egyenlete szerint

$$-2x_1 + [E(m) - E(-m)]\, S(b) - 0 \cdot x_3 = 0,$$

honnan

$$(2) \qquad x_1 = \frac{E(m) - E(-m)}{2} S(b) = S(m)\, S(b).$$

Minthogy (I) felhasználásával

$$T(a)^2 = 1 - \frac{1}{C(a)^2} = 1 - \frac{C(b)^2}{C(c)^2},$$

(1) és (2) összevetéséből

$$C(c)^2 - C(b)^2 = S(m)^2 S(b)^2.$$

Ez más alakban (1. §. (10))

$$S(c)^2 = S(b)^2 + S(m)^2 S(b)^2,$$

tehát *a derékszögű háromszög átfogója, az egyik befogó és a szemközti szöghöz tartozó elpattanási távolság között, fennáll az*

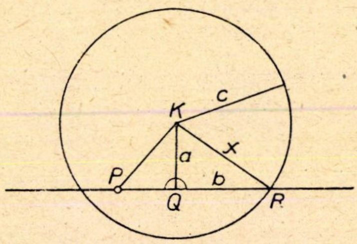
(II) $$\frac{S(b)}{S(c)} = \frac{1}{C(m)}$$

egyenlet (28. ábra).

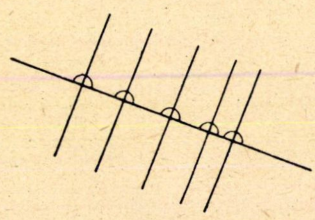
7. §.

A köraxióma bebizonyítása

F. SCHUR [15] jegyezte meg, hogy HILBERT hiperbolikus paralelaxiómájából (1. §. Tét.) következik a *köraxióma,* amely szerint *a kör valamely belső pontján átmenő egyenes metszi a kört.* Míg F. SCHUR bizonyítása a projektív geometriát használja fel, addig itt e tételt a derékszögű háromszög oldalai között fennálló egyenletből dedukálhatom.



29. ábra



30. ábra

Valóban (29. ábra), az egyenesnek a c sugarú kör K középpontjától való távolsága $a = \overline{KQ} \leqq \overline{KP} < c$ a feltevés szerint, tehát (1. §.)

$$\frac{C(c)}{C(a)} > 1.$$

Mivel pedig a $C(t)$ függvény minden 1-nél nagyobb véggel egyenlő lehet (1. §), van olyan b egyenesdarab, amelyre

$$C(b) = \frac{C(c)}{C(a)}.$$

Ez egyenesdarabot Q-ból az egyenesre felrakva, legyen $b = QR$. Akkor a KQR derékszögű háromszög x átfogójára (6. §. (I))

$$C(x) = C(a)\,C(b),$$

tehát az előbbire tekintettel

$$C(x) = C(c).$$

Ebből pedig következik (1. §.), hogy $x = c$, vagyis az egyenes R pontja a körön van.

*

Eddig csak valóságos pont WEIERSTRASS-féle homogén koordinátáiról volt szó. Ha még bevezetjük a végtelen távoli pontoknak, valamint az *ideális pontoknak*, amely utóbbiakat egy-egy közös merőlegessel bíró egyenessereg definiál (30. ábra), a homogén koordinátáit, amint ez a dolgozat második részében megtörténik, akkor ez analitikus előállításból végül leolvasható a hiperbolikus síkgeometriának az ismert KLEIN—HILBERT-féle körmodellel való azonossága, függetlenül a folytonosságtól. Vagyis a dolgozat végén alkalmazásképp megmutatom, miszerint *a fenti axiómákkal jellemzett hiperbolikus síkon euklideszi síkgeometriát értelmezhetünk úgy, hogy a hiperbolikus síkgeometria azonos ebben az euklideszi geometriában konstruált* KLEIN—HILBERT-*féle körmodelljével.* E mesterséges euklideszi síkgeometriáról itt csak annyit, hogy ennek pontjai, az euklideszi sík végtelen távoli pontjait is beleértve, a hiperbolikus síkon vett egyenesseregek, más szóval a hiperbolikus sík valóságos, végtelen távoli és ideális pontjai együttvéve.

A hiperbolikus síkgeometriának a POINCARÉ-féle félsíkkal való azonosságát a folytonosságtól függetlenül KERÉKJÁRTÓ BÉLA [16] bizonyította be. Ez sokkal bonyodalmasabb, mert ekkor a hiperbolikus síkot duplán kell számítanunk, hogy rajta értelmezhessük azt az euklideszi síkgeometriát, amelynek a hiperbolikus sík POINCARÉ-féle félsíkja. Viszont a POINCARÉ-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria puszta ekvivalenciája, ami azonban teljesen elegendő ahhoz, hogy a hiperbolikus síkot a POINCARÉ-féle félsíkon joggal tanulmányozhassuk, már nyilván következik a hiperbolikus síkgeometriának a KLEIN—HILBERT-féle körmodellel való éppen említett azonosságából, a körlapnak a félsíkra való leképezése útján. E puszta ekvivalencia kimutatására más, közvetlen módszert követtem egyik idézett dolgozatomban [17], ugyancsak a HILBERT-féle végkalkulus felhasználásával.

IRODALOM

[1] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **57** (1903), 137—150, vagy *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III. 159—177, vagy pedig BOLYAI JÁNOS, *Appendix*, KÁRTESZI FERENC bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel (Budapest, 1952), 219—232, ahol is függelékképp az idézett dolgozat magyar fordítása található.

[2] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), 160—162.

[3] SZERZŐTŐL, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Hung.*, **4** (1953), 243—250, speciálisan 243, [2] jegyzet

[4] SZERZŐTŐL, A Poincaré-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria kapcsolatáról, *A MTA III. Osztályának Közleményei*, **6** (1956), 163—184, speciálisan 165.

[5] D. HILBERT, loc. cit. [1], 139—140, resp. 162, resp. 221.

[6] D. HILBERT, loc. cit. [1], 140, resp. 163, resp. 222.

[7] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 1, Satz 2., ill. 1. §. 2. tétel.

[8] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 1, Satz 3., ill. 1. §. 3. tétel.

[9] Vö. D. HILBERT, loc. cit. [1], 147, resp. 173, resp. 228.

[10] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 2, 145—146, resp. 170—171. resp. 2. §. 227.

[11] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 3, 147—148, resp. 173, resp. 3. §. 228—229.

[12] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 3, 148, resp. 174, resp. 3. §. 229.

[13] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 2, 147, resp. 172, resp. 2. §. 228, továbbá § 3, 148, resp. 174, resp. 3. §. 229.

[14] Vö. H. LIEBMANN, Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **59** (1904), 110—128, speciálisan 118. A bizonyítást illetően lásd SZERZŐTŐL loc. cit. [3], 246—247.

[15] F. SCHUR, Zur Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **59** (1904) 314—320, speciálisan 319—320.

[16] KERÉKJÁRTÓ BÉLA, A hiperbolikus síkgeometria felépítése, *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **59** (1940), 19—59, vagy UGYANATTÓL, Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **13** (1940), 11—48.

[17] SZERZŐTŐL, loc. cit. [4].

NÉHÁNY TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLET ÁLTALÁNOSÍTÁSA[1]

HOSSZÚ MIKLÓS

Bevezetés

Az (a, b) intervallumon értelmezett $F(x, y)$ $[\in(a, b)]$ ismeretlen (szigorúan monoton) függvényre vonatkozó

(1a) $F[x, F(y, z)] = F[F(x, y), z]$ (asszociativitás),

(2a) $F(x, y) = F[F(x, z), F(y, z)]$ (tranzitivitás),

(3a) $F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)]$ (biszimmetria),

(4a) $F[F(x, y), z] = F[F(x, z), F(y, z)]$ (autodisztributivitás),

függvényegyenletekben [5, 18, 19, 2] több ismeretlen függvényt szerepeltetve az illető függvényegyenletek alábbi általánosításait kapjuk:

(1) $F[x, G(y, z)] = H[K(x, y), z]$,

(2) $K(x, y) = F[G(x, z), H(y, z)]$,

(3) $F[G(x, y), H(u, v)] = K[L(x, u), M(y, v)]$,

(4) $F[G(x, y), z] = G[F(x, z), F(y, z)]$ (disztributivitás).

(1) egyszersmind általánosítása az

(1α) $F(x, u+v) = F[F(x, u), v]$ (tranzláció),

(1β) $F[x, G(u, v)] = F[F(x, u), v]$ (transzformáció)

függvényegyenleteknek is [1, 6, 8], és speciális esetként tartalmazza az összes asszociatív jellegű törvényeket, így (1a)-t, továbbá

(1b) $F[x, F(y, z)] = F[z, F(y, x)]$ (Graszmann-féle asszociatív törvény),

(1c) $F[x, F(y, z)] = F[y, F(x, z)]$,

(1d) $F[x, F(y, z)] = F[F(z, x), y]$,

stb-t. A többi asszociatív jellegű törvény egyébként már visszavezethető (1a)—(1d) valamelyikére. Pl.

$$F[F(y, z), x] = F[F(y, x), z]$$

[1] A dolgozat a szerző [10—14] illetve Aczél Jánossal közös [7] idegen nyelvű cikkeiről ad összefoglaló ismertetést. A szögletes zárójelben levő számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak.

egyenértékű
$$G[x, G(z, y)] = G[z, G(x, y)]$$
-nal, azaz (1c)-vel, ha bevezetjük a $G(x, y) = F(y, x)$ függvényt; vagy az
$$F[x, F(z, y)] = F[F(x, y), z] \text{ (Tarski-féle asszociatív törvény)}$$
egyenletből $z = x$ esetén a $t = F(x, y)$ jelölés mellett látjuk, hogy $F(x, t)$ szimmetrikus: $F(x, t) = F(t, x)$, tehát egyenletünkből következik az (1a)—(1d) egyenletek bármelyike, feltéve, hogy $t = F(x, y)$ az (a, b) intervallum minden értékét felveszi.

Jelen dolgozat 1. §-ában az (1)—(4) függvényegyenletek megoldását adjuk meg az (1)—(3) esetben a szereplő függvényekről feltételezve, hogy létezik elnemtűnő elsőrendű folytonos parciális deriváltjuk [10, 13, 14], illetve a (4) esetben kétszer differenciálhatók [12], és mindegyik esetben szigorúan monotonok. A 2. §-ban néhány speciális esetet vizsgálunk, ahol a differenciálhatóság helyett elég csak folytonosságot feltételezni [14, 13, 9]. A 3. §-ban az (1α) és (1a) függvényegyenletek kiterjesztésével foglalkozunk arra az esetre, midőn a változók és maga az ismeretlen függvény nem skaláris mennyiségek, hanem többdimenziós vektorok [7]. Íly módon az (1α) függvényegyenlet megoldása az n-dimenziós $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ térvektorok $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ additív paraméter-rendszertől függő $F(x, U) \equiv y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ transzformációinak
$$F(x, U) = f^{-1}[f(x) + C \cdot U]$$
előállítását fogja szolgáltatni, ahol $f(x)$ tetszőleges n-dimenziós vektor-vektor függvény, melynek inverzét -1 kitevővel jelöltük, és C n-soros, m-oszlopos mátrix; az (1a) függvényegyenlet bizonyos megszorító feltevések melletti megoldása pedig feleletet ad arra a kérdésre, mikor lehet additív paramétereket bevezetni.

1. §.

Vizsgáljuk először az

$$F[x, G(y, z)] = H[K(x, y), z] \tag{1}$$

függvényegyenletet. (1)-et x, illetve y szerint parciálisan differenciálva és képezve a két kapott egyenlet hányadosát, majd $y = y_0$ rögzítése után $G(y_0, z)$ helyett új y változót írva, az
$$\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = \frac{f'(x)}{g'(y)}$$
differenciálegyenletet nyerjük, ahol a megfelelő index az illető függvény első,

illetve második változó szerinti parciális deriváltját jelöli, és

$$f'(x)=\frac{K_1(x,y_0)}{K_2(x,y_0)},\quad g'[G(y_0,z)]=\frac{1}{G_1(y_0,z)}.$$

Kapott differenciálegyenletünk

$$\begin{vmatrix} F_1(x,y) & F_2(x,y) \\ f'(x) & g'(y) \end{vmatrix}=0$$

alakban felírva az $F(x,y)$ és $f(x)+g(y)$ függvények függőségét mutatja:

$$F(x,y)=h[f(x)+g(y)].$$

Helyettesítsük ezt (1)-be:

$$h\{f(x)+g[G(y,z)]\}=H[K(x,y),z].$$

Rögzítsük $y=y_0$ értékét és írjunk új változókat, akkor megkapjuk $H(x,y)$-t; majd ismét visszahelyettesítve rögzítsük $z=z_0$-at, akkor megkapjuk $K(x,y)$-t, s végül F, H, K visszahelyettesítése és egyszerűsítés után megkapjuk $G(x,y)$-t is:

$$H(x,y)=h[k(x)+\psi(y)],$$
$$K(x,y)=k^{-1}[f(x)+\varphi(y)],$$
$$G(x,y)=g^{-1}[\varphi(x)+\psi(y)].$$

Egyszerű behelyettesítéssel meg lehet győződni arról, hogy ilyen alakú megoldások tetszőleges $f(t), g(t), h(t), k(t), \varphi(t), \psi(t)$ függvény mellett kielégítik (1)-et.

Hasonló módszerrel a (2) és (3) megoldását is könnyen megkaphatjuk. A részletekre vonatkozóan csak [10, 13, 22]-re utalunk, és itt csupán annyit jegyzünk meg, hogy a megoldások ott is mindannyian

$$h[f(x)+g(y)]$$

típusúak. Az ilyen függvények pontsoros nomogramja három egyenes tartóval ábrázolható. Analitikailag igen egyszerűen jellemezhetők azáltal, hogy $F(x,u), F(x,v), F(y,u), F(y,v)$ mint négyváltozós függvényrendszer nem független [10].

Térjünk rá ezután a

$$F[G(x,y),z]=G[F(x,z),F(y,z)] \tag{4}$$

függvényegyenlet tárgyalására. Ezt sem vesszük részletesen, a részletekre vonatkozólag [12]-re utalunk, módszer tekintetében pedig hívatkozhatunk Aczél Jánosnak [2] a (4a) függvényegyenletre adott megoldási módszerére, amely itt is abból áll, hogy (4)-ből levezetünk egy $F(x,y)$-ra vonatkozó funkcionáldifferenciálegyenletet, melyből a többi változó rögzítése mellett x szerint kétszer integrálva

$$F(x,y)=f^{-1}[f(x)g(y)+h(y)]$$

adódik; itt $g(y)$ és $h(y)$ az x szerinti integrálás során kerülnek a megoldásba, míg $f(t)$-t az

$$f(t)=\int_{v_0}^{t} e^{-1/a\int_{u_0}^{v} H_{12}(u,u)\,du}\,dv$$

képlet adja meg, ahol $H(x,y)$ a $G(H,H)=G(x,y)$ egyenlettel van értelmezve és $H_1(t,t)\cdot H_2(t,t)=a$ állandó. $F(x,y)$ ismeretében $G(x,y)$ már aránylag könnyen meghatározható (4)-be való visszahelyettesítés útján:

$$G(x,y)=f^{-1}\{\varphi[f(x)-f(y)]+f(y)\},$$

ahol

$\varphi(t)$ tetszőleges kétszer differenciálható, szigorúan monoton függvény, ha $g(t)\equiv 1$;

$\varphi(-t)=-\varphi(t)$, ha $g(t)\equiv -1$;

$\varphi(t)=\lambda t\,(\lambda\neq 0, \lambda\neq 1)$, ha $|g(t)|\not\equiv 1$.

(4) további általánosításaként az

$$F[G(x,y),z]=K[F(x,z),F(y,z)]$$

függvényegyenletre is alkalmazható a funkcionál-differenciálegyenletre való visszavezetés módszere, s megoldásul azt kapjuk, hogy

$$F(x,y)=k[f(x)g(y)+h(y)]$$

(nomográfiailag a két egyenes és egy görbe tartóval ábrázolható függvények típusa).

2. §.

Az 1. §-ban megfigyelhettük az (1) függvényegyenlet megoldásánál, hogy a differenciálhatóságra csak addig volt szükség, míg $F(x,y)$-t meghatároztuk; általánosabban, ha (1)-ben már ismerjük az egyik függvényt, és tudjuk, hogy $h[f(x)+g(y)]$ típusú, akkor a többi függvény meghatározható differenciálhatóság felhasználása nélkül. Ha pl. $G(x,y)=x+y$, akkor a tranzláció (1α) függvényegyenletének következő általánosítását kapjuk:

(1 A) $$F(x,y+z)=H[K(x,y),z].$$

(1 A) megoldható csupán annyi feltevés mellett, hogy van oly x_0 érték, hogy $K(x_0,y)=t$-ből $y=k(t)$ kifejezhető, továbbá, hogy az $F(x_0,u)=F(x_0,v)$ egyenletből következik $u=v$; valóban ekkor $x=x_0$ esetén (1 A)-ból rögtön kapjuk, hogy

$$H(t,z)=F[x_0,k(t)+z]=h[k(t)+z],$$

továbbá ezt visszahelyettesítve (1 A)-ba, $y=0$ esetén látható, hogy

$$F(x,z)=h\{k[K(x,0)]+z\}=h[f(x)+z],$$

és végül ismét visszahelyettesítve, $z=0$-sal

$$K(x,y)=h^{-1}[f(x)+y].$$

Az (1) függvényegyenlet

$$\text{(1b)} \qquad F[x,F(y,z)]=F[z,F(y,x)],$$

$$\text{(1c)} \qquad F[x,F(y,z)]=F[y,F(x,z)],$$

$$\text{(1d)} \qquad F[x,F(y,z)]=F[F(z,x),y]$$

speciális esetei is tárgyalhatók elemi úton. Pl. (1*b*)-ből rögtön következik, hogy $F(x,y)$ biszimmetrikus:

$$F[F(x,y),F(u,v)]=F\{v,F[u,F(x,y)]\}=$$
$$=F\{v,F[y,F(x,u)]\}=F[F(x,u),F(y,v)],$$

tehát a biszimmetria függvényegyenletének folytonos, szigorúan monoton

$$F(x,y)=f^{-1}(\lambda f(x)+\mu f(y)+\nu]$$

(kvázilineáris függvény) megoldása ismeretében [3, 5] rögtön megkapjuk (1b) megoldását, ha ezt visszahelyettesítjük (1b)-be, és az együtthatókat összehasonlítva megállapítjuk, hogy $\lambda=\mu^2$, tehát

$$\text{(1b')} \qquad F(x,y)=f^{-1}[\mu^2 f(x)+\mu f(y)+\nu].$$

(1c) folytonos, szigorúan monoton megoldása is könnyen meghatározható csupán azon feltevés mellett, hogy van oly z_0 érték, amely mellett az $F(x,z_0)=s$ egyenlet x-re egyértelműen megoldható. Ekkor ugyanis a

$$G(s,t)=F(x,t), \quad s=F(x,z_0)$$

egyenlettel értelmezett $G(s,t)$ függvény szimmetrikus:

$$G(s,t)=F(x,t)=F[x,F(y,z_0)]=F[y,F(x,z_0)]=$$
$$=F(y,s)=G(t,s)$$

$[t=F(y,z_0)]$, továbbá kielégíti (1*c*)-t is:

$$G[s,G(t,z)]=G[t,G(s,z)],$$

tehát asszociatív. Itt pedig már hivatkozhatunk arra, hogy az asszociativitás (1*a*) függvényegyenletének legáltalánosabb folytonos, szigorúan monoton megoldása [4, 5]

$$\text{)1a')} \qquad G(x,y)=f^{-1}[f(x)+f(y)] \qquad \text{(kváziösszeadás);}$$

így máris megkaptuk (1c) megoldását:

$$\text{(1c')} \qquad F(x,y)=G(s,y)=f^{-1}\{f[F(x,y_0)]+f(y)\}=$$
$$=f^{-1}[g(x)+f(y)].$$

Az (1b'), (1c') megoldást a $\mu=-1$, illetve $g(x)=f(x)$ speciális esetben A. R. SCHWEITZER [20] adta meg bizonyos megszorító feltevések felhasználásával, differenciálegyenletre való visszavezetéssel.

(1d)-re közvetlenül alkalmazható az asszociativitás (1a) függvényegyenletének megoldási módszere [4, 5], ezért ezt nem is tárgyaljuk itt; a megoldás ekkor is az (1a') kváziösszeadás (lásd [14]).

Térjünk rá ezután a többi függvényegyenlet differenciálhatóság nélkül való megoldásának kérdésére.

(2a) megoldását differenciálegyenletre való visszavezetéssel A. R. SCHWEITZER [18, 19] adta meg. P. LORENZEN [16] bebizonyította, hogy (2a)-ból következik, hogy a

$$G(z,y)=x,\quad z=F(x,y)$$

egyenlettel definiált $G(x,y)$ függvény asszociatív, sőt „csoportművelet", feltéve, hogy van legalább egy oly x_0, amely mellett az $F(x_0,y)=z$ egyenlet megoldható. Ugyanez bebizonyítható baloldali leoszthatóság feltételezésével is [13], ami a szigorú monotonitás mellett nem jelent külön feltevést; így (1a)-ra való visszavezetés útján megkaptuk (2a) folytonos megoldását:

$$\text{(2a')}\qquad F(x,y)=f^{-1}[f(x)-f(y)]\qquad \text{(kvázikivonás)}$$

(ugyanaz, mint a differenciálható megoldás).

A $G(x,y)=H(x,y)=L(x,y)=M(x,y)$ speciális esetben (3), tehát az

$$F[G(x,y),G(u,v)]=K[G(x,u),G(y,v)]$$

függvényegyenlet megoldását is meg lehet adni differenciálhatóság helyett csupán folytonossági feltétel mellett, (3a)-ra való visszavezetéssel [9].

Szimmetrikus $F(x,y)$ függvény esetén az

$$\text{(4a)}\qquad F[F(x,y),z]=F[F(x,z),F(y,z)]$$

egyenletet csupán folytonosság felhasználásával C. RYLL-NARDZEWSKI [17] oldotta meg, illetve később B. KNASTER [15] visszavezette (3a)-ra. Nemszimmetrikus esetben ACZÉL JÁNOS [2] kétszeres differenciálhatóság felhasználásával bebizonyította, hogy (4a) megoldása:

$$\text{(4a')}\qquad F(x,y)=f^{-1}[\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)]\qquad \text{(kvázilineáris közép).}$$

Ő vetette fel a problémát, hogy kevesebb feltétel mellett is ez-e a megoldás. Itt még ez ideig nem sikerült a differenciálhatósági feltételt elhagyni, de annyit már sikerült kimutatni [11], hogy ha kétoldali autodisztributivitásból indulunk ki, azaz (4a) mellett még

$$\text{(4b)}\qquad F[z,F(x,y)]=F[F(z,x),F(z,y)]$$

fennállását is feltesszük, akkor az egyszer differenciálható megoldás is a (4a') kvázilineáris közép. Újabban pedig sikerült az utóbbit csupán folytonosság felhasználásával is bizonyítani; erről a bizonyítás terjedelme miatt külön dolgozatban fogok beszámolni.

3. §.

E §-ban az n-dimenziós térben értelmezett transzformációkkal kapcsolatos két függvényegyenlet problémájával foglalkozunk. Az $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektorok $F(x, U) = y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ transzformációiról, melyek függenek az $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ paraméter-rendszertől, akkor mondjuk, hogy sereget alkotnak, ha

$$F[F(x, U), V] = F(x, U \circ V).$$

Ha speciálisan $U \circ V = U + V = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_m + v_m\}$, azaz

$$(\mathrm{I}\alpha) \qquad F[F(x, U), V] = F(x, U + V),$$

akkor azt mondjuk, hogy a paraméterek additívek.

Abból a feltevésből, hogy $F(x, U) \neq F(x, V)$, ha $U \neq V$, az $U \circ V$ műveletről általában látható, hogy asszociatív:

$$(\mathrm{Ia}) \qquad (U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W),$$

hiszen minden x-re érvényes

$$F[x, U \circ (V \circ W)] = F[F(x, U), V \circ W] =$$
$$= F\{F[F(x, U), V], W\} = F[x, (U \circ V) \circ W],$$

tehát az additív paraméter bevezethetőségének problémája másszóval azt jelenti, hogy milyen feltételek mellett lesz (Ia) megoldása

$$(\mathrm{Ia}') \qquad U \circ V = g^{-1}[g(U) + g(V)]$$

alakú, ugyanis ekkor az új $S = g(U)$, $T = g(V)$ paraméterekkel a $G(x, S) = F[x, g^{-1}(S)]$ transzformáció-sereg additív paraméterű.

1. A § első felében (Iα) megoldását adjuk meg. Csak az $n \leq m$ esetet tárgyaljuk részletesebben. Az $n > m$ eset aránylag könnyebben kezelhető és a megoldás ugyanaz. Először is bevezetjük az

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}$$

jelölést, ahol $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mu = \{u_{n+1}, \ldots, u_m\}$, és v, ν ehhez hasonlóan van értelmezve; ezzel

$$(\mathrm{I}\alpha) \qquad F\left\{F\left[x, \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}\right\} = F\left[x, \begin{pmatrix} u + v \\ \mu + \nu \end{pmatrix}\right].$$

Feltesszük, hogy van oly x_0, hogy az $F\left[x_0, \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix}\right] = y$ egyenletből $u = k\begin{pmatrix} y \\ \mu \end{pmatrix}$ kifejezhető, továbbá $k\begin{pmatrix} x_0 \\ \mu \end{pmatrix}$ mint μ függvénye mérhető, vagy korlátos, vagy folytonos stb. Legyen most (Iα)-ban $\mu = -\nu$ és $y = F\left[x_0, \begin{pmatrix} u \\ -\nu \end{pmatrix}\right]$, akkor

$$F\left[y, \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}\right] = F\left[x_0, \begin{pmatrix} k\begin{pmatrix} y \\ -\nu \end{pmatrix} + v \\ 0 \end{pmatrix}\right] = h\left[k\begin{pmatrix} y \\ -\nu \end{pmatrix} + v\right].$$

Helyettesítsük ezt vissza (Iα)-ba, és legyen ott $x = x_0$, $\mu = 0$, akkor az

$$y = h\left[k\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\right], \quad k\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + u = h^{-1}(y) = f(y)$$

jelöléssel egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$k\begin{pmatrix} y \\ -\nu \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_0 \\ -\nu \end{pmatrix} + f(y) - k\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(y) + \varphi(\nu),$$

ahol $\varphi(\nu)$ még ki kell elégítse a Cauchy-féle

$$\varphi(\mu) + \varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu)$$

függvényegyenletet, tehát

$$\varphi(\nu) = A \cdot \nu,$$

(itt A tetszőleges n-soros, $m-n$-oszlopos mátrix).

Végeredményben

$$F(y, V) = F\left[y, \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}\right] = h[f(y) + v + A \cdot \nu] =$$

$$= f^{-1}\left[f(y) + (I_n A) \cdot \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}\right] = f^{-1}[f(y) + C \cdot V].$$

Egyszerű behelyettesítéssel meg lehet győződni arról, hogy

$$\text{(I}\alpha'\text{)} \qquad F(x, U) = f^{-1}[f(x) + C \cdot U]$$

tetszőleges n-soros, m-oszlopos c mátrixszal kielégíti (Iα)-t.[2]

[2] Az a mellékfeltétel, hogy az

$$y = F\left[x_0, \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix}\right] = f^{-1}[f(x) + C \cdot U] = f^{-1}\left[f(x) + (C_\square\, A) \cdot \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix}\right]$$

egyenlet megoldható, teljesül, hacsak az n-edrendű $C_\square$ négyzetes mátrix reguláris:

$$u = C_\square^{-1}\left[f(y) - f(x_0) - A \cdot \mu\right] = k\begin{pmatrix} y \\ \mu \end{pmatrix}.$$

A másik mellékfeltétel, a

$$k\begin{pmatrix} x_0 \\ \mu \end{pmatrix} = C_\square^{-1}\left[A \cdot (-\mu)\right]$$

függvény mérhetősége nem okoz további megszorítást az (Iα') megoldásban. Észrevehetjük, hogy (Iα) fennállását elég volt csak $x = x_0$-nál megkövetelni, ebből már következik minden x-re.

Az $n > m$ esetben ($I\alpha$) megoldásához arra a mellékfeltételre van szükség, hogy a $h(x_U) = F(x_A, U) = y$ egyenletből $\binom{\xi}{U} = x_U = f(y)$ kifejezhető,[3] ahol $x_A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\} = \binom{a}{\xi}$.

2. Térjünk rá ezután az m-dimenziós paramétertérben értelmezett

(Ia) $$U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$$

függvényegyenlet megoldására. A megoldáshoz elég erős megszorító mellékfeltételeket használunk, amelyek biztosítják, hogy

(Ia′) $$U \circ V = g^{-1}[g(U) + g(V)]$$

legyen,[4] ahol $g(U)$ az m-dimenziós teret topológikusan képezi le önmagára azzal a megszorítással, hogy $g(E) = 0$, (E jelöli az $U \circ V$ művelet egységelemét). Mindenek előtt feltesszük, hogy

(i) $U \circ V$ olyan művelet, amely folytonos Abel-féle csoportot alkot, és amelyre az $U \circ U = V$ egyenletnek van $U = V^{1/2}$ megoldása.

(i) már lehetővé teszi, hogy értelmezzük a „hatványozást" diadikus törtkitevőkre:

$$V^{\frac{1}{2^k}} = \left(V^{\frac{1}{2^{k-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad V^{\frac{r+1}{2^k}} = V^{\frac{r}{2^k}} \circ V^{\frac{1}{2^k}}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

A hatványozást tetszőleges valós kitevőre a következő perfektségi feltétel segítségével tudjuk kiterjeszteni: (ii) $\lim\limits_{a_n \to a} V^{a_n}$ létezik, és bármely a-hoz konvergáló a_n diadikus sorozat esetén ugyanaz.

Az így értelmezett V^a „hatvány" az a kitevőnek folytonos függvénye, és egyszerű számolással igazolható, hogy kielégíti a közönséges hatványozásnál megszokott

$$V^{a+b} = V^a \circ V^b$$

törvényszerűséget.

Eddigi feltételeink nem biztosítják, hogy $U \circ V$ nem csupán egy hiperfelületet tölt ki; ezt egy további feltétel biztosítja:

(iii) Létezik olyan az $U \circ V$ műveletre vonatkozólag „független" $V_1, V_2, \ldots, V_m$ bázis, hogy a

$$V_1^{a_1} \circ V_2^{a_2} \circ \ldots \circ V_m^{a_m} = \boxed{\circ}\prod_{i=1}^{m} V_i^{a_i}$$

hatványszorzatok egyszeresen kitöltik az m-dimenziós teret.

[3] Ez az ($I\alpha'$)-ben szereplő C-re vonatkozólag csak annyi megszorítást jelent, hogy kiegészíthető kell legyen egy n-edrendű reguláris, négyzetes mátrixszá.

[4] Ugyanis (Ia)-nak van nemkommutatív megoldása is: pl. $U \circ V = \{u_1 v_1, u_1 v_2 + v_1\}$.

Az (i), (ii), (iii) mellékfeltételek nyilván szükségesek is ahhoz, hogy $U \circ V$ (Ia') alakú legyen.[5]

A feltételek elégségességét úgy bizonyítjuk, hogy megkonstruáljuk $g(U)$ inverz függvényét, a

$$g^{-1}(S) = \psi(S) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{s_i}$$

függvényt, ahol V_i az (iii) alatti bázis, és s_i jelöli S skaláris komponenseit. E $\psi(S)$ függvényre rögtön igazolhatjuk, hogy

$$\psi(S) \circ \psi(T) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{s_i} \circ \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{t_i} = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{s_i} \circ V_i^{t_i} = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{s_i+t_i} = \psi(S+T),$$

ami az $U = \psi(S)$, $V = \psi(T)$ jelölés mellett egyenértékű (Ia')-vel.

A $g(E) = 0$ megszorítás közvetlenül világos annak alapján, hogy

$$\psi(0) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{0} = E.$$

Abban az esetben, midőn (iii) csak annyit biztosít, hogy

$$\psi(S) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, V_i^{s_i}$$

az m-dimenziós térnek egy E-t tartalmazó D részét tölti ki, miközben S egy D' tartományon változik, amely a 0 pontot tartalmazza, és arra vonatkozólag konvex (lásd [21]), és a többi mellékfeltételek is ennek megfelelően módosulnak, akkor is érvényes lesz az (Ia') megoldás, csak akkor $g(U)$ a D tartományt fogja topologikusan leképezni D'-re.[6]

Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem
Matematikai Tanszéke

[5] Pl. (iii) teljesül is, ha V_i-t úgy választjuk, hogy $g(V_1), g(V_2), \ldots, g(V_m)$ lineárisan függetlenek legyenek, mert ekkor

$$\prod_{i=1}^{m}{}^{\circ}\, v_i^{a_i} = g^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i g(V_i)\right]$$

tényleg egyszeresen kitölti az m-dimenziós teret.

[6] Azt, hogy D' az 0 pontra vonatkozólag konvex, azért kell feltenni, hogy az $U \circ U = V$ egyenlet $U = g^{-1}\left[\frac{1}{2} g(V)\right]$ megoldása benne legyen D-ben, mert ez csak úgy teljesül, ha $g(V) \in D'$-vel együtt $\frac{1}{2} g(V) \in D'$, azaz D' konvex 0-ra vonatkozólag.

IRODALOM

[1] ACZÉL J. A folytonos csoportok elméletével kapcsolatos néhány függvényegyenletről, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Budapest* (1952), 565—569.

[2] J. ACZÉL, K tyeorii szrednyih vélicsin, *Annales Polonici Mathem.*,...; magyarul: A középértékek elméletéhez, *Acta Universitatis Debreceniensis*, 1 (1954), 117—135.

[3] J. ACZÉL, On mean values, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **54** (1948), 392—400.

[4] J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, **76** (1949), 59—64.

[5] ACZÉL J., Többváltozós függvényegyenletek, *Matematikai Lapok*, **2** (1951), 99—117.

[6] J. ACZÉL, Über einparametrige Transformationen, *Publicationes Mathematicae*, **1** (1950), 243—247.

[7] J. ACZÉL and M. HOSSZÚ, On transformations with several parameters in n-dimensional spaces, *Acta Mathematica*, **7** (1956).

[8] J. ACZÉL,—L. KALMÁR and J. G., MIKUSINSKI, Sur l'équation de translation, *Studia Mathematica*, **12** (1951) 112—116.

[9] HOSSZÚ M., A biszimmetria függvényegyenletéhez, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*, **1** (1952), 335—342.

[10] M. HOSSZÚ, A generalization of the functional equation of bisymmetry, *Studia Mathematica*, **14** (1953), 100—106.

[11] M. HOSSZÚ, On the functional equation of autodistributivity, *Publicationes Mathematicae*, **3** (1953), 83—86.

[12] M. HOSSZÚ, On the functional equation of distributivity, *Acta Mathematica* **4** (1953 159—167.

[13] M. HOSSZÚ, On the functional equation of transitivity, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **15** (1954), 203—208.

[14] M. HOSSZÚ, Some functional equations related with the associative law, *Publicationes Mathematicae*, **3** (1954), 205—214.

[15] B. KNASTER, Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Mathematicum*, **2** (1949), 1—4.

[16] P. LORENZEN, Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen, *J. reine angew. Math.*, **182** (1940), 50.

[17] C. RYLL-NARDZEWSKI, Sur les moyennes, *Studia Mathematica*, **11** (1949), 31—37.

[18] A. R. SCHWEITZER, On a functional equation, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **18** (1912), 160—161, 299—302.

[19] A. R. SCHWEITZER, On the iterative properties of an abstract group, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **24** (1918), 371.

[20] A. R. SCHWEITZER, Theorems on functional equations, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **18** (1912), 492; **19**, 66—70.

[21] SÓS V. Pontra és irányra nézve konvex görbe és felület, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Budapest* (1952), 643—652.

[22] O. SUDÔ, On some classes of functional equations, *Tôhoku Math. Journal*, **3** (1913), 47—61.

TRANSZCENDENS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK MAXIMUM MODULUSÁRÓL*

VINCZE ISTVÁN

Bemutatta Rényi Alfréd r. tag az 1956. szeptember 28-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen $M(r) = \max\limits_{|z|=1} |F(z)|$ az

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad a_0 \neq 0,$$

transzcendens egész függvény maximum modulusa. Alábbi vizsgálatainkban az ismert

$$(1) \qquad |a_n| < \frac{M(r)}{r^n}$$

Cauchy-féle egyenlőtlenségből indulunk ki. Közelfekvő kérdés ugyanis ezen — r minden értékére érvényes — becslést „legjobbá" tenni, vagyis keresni r azon értékeit, melyekre (1) jobb oldala a lehető legkisebb. Erre nézve az alábbi 1. §-ban bizonyításra kerül a következő

1. TÉTEL. *Legyen $n > 0$ valós, $M(r)$ az $F(z)$ transzcendens egész függvény maximum modulusa, melyre $F(0) \neq 0$. Akkor az*

$$\frac{M(r)}{r^n}$$

függvény az $r > 0$ félegyenesen egy és csakis egy $r = r_n$ helyen veszi fel minimumát.

Ha most $n \geqq 1$ egész, akkor a Cauchy-féle egyenlőtlenséget az

$$|a_n| < \frac{M(r_n)}{r_n^n} \leqq \frac{M(r)}{r^n}.$$

egyenlőtlenséggel pótolhatjuk.

Legyen n ismét pozitív, valós. Az r_n érték, mint n függvénye folytonos és monoton tart végtelen felé, de mint látni fogjuk, egy-egy szakaszon állandó, ha az $M(r)$ függvénynek töréspontja van. Ennélfogva az $n(r)$ inverz függvény — esetleg ugráspontokkal bíró — monoton függvény. Az 1. §-ban az $F(z)$ függvény növekedési rendjének és $n(r)$ viselkedésének összefüggésére bebizonyítjuk a következő

* Szerző először előadta Szegeden a Bolyai János Matematikai Társulat 1955. november hó 7-én tartott ülésén.

2. TÉTELT.*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sup}{\inf} \frac{\log n(r)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\sup}{\inf} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

A 2. §-ban — n-et egész számokon át futtatva — az $r_1, r_2, \ldots$ sorozat néhány tulajdonságával foglalkozunk. Így rájuk nézve a Stirling-formulával analog — annál gyengébb — egyenlőtlenséget mutatunk ki. A 3. §-ban az

$$\int_0^\infty \frac{r^n}{M(r)} dr$$

momentumokra vonatkozólag mutatunk ki néhány egyszerű egyenlőtlenséget mind az együtthatók, mind az $\frac{M(r_k)}{r_k^k}$ értékek segítségével. Ez utóbbi egyenlőtlenségek k és n nem csupán egész, hanem valós értékeire vonatkoznak.

Az itt előjövő fogalmak és eredmények analogiát mutatnak a „Maximalglied" és „Zentralindex" kérdéskörével. Dolgozatunk általános, a transzcendens egész függvény növekedési rendjére való tekintet nélkül érvényes állításokat tartalmaz. Ennek megfelelően az itt kapott tételek némelyike klaszszikus összefüggések gyengébb formáit adják. Véges rendű egész függvényekre vonatkozólag szerző még vissza kíván térni.

A bizonyítások elemiek, lényeges szerepet az $M(r)$ függvény logaritmikus konvexitása játszik; így egyes tételek érvényesek attól függetlenül, hogy ilyen $M(r)$ függvény maximum modulusa-e valamely $F(z)$ transzcendens egész függvénynek.

1. §. Az 1. és 2. tételek bizonyítása

Az 1. tétel egyszerű következménye annak, hogy a

$$H(t) = \log M(e^t)$$

függvény monoton és határozottan konvex — egyenes szakaszt nem tartalmazó — függvénye t-nek, amelyre $\lim_{t\to-\infty} H(t) = \log M(0)$ és $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$.

Amint BLUMENTHAL bebizonyította, $M(r)$ és így $H(t)$ is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok analitikus ívből áll. Két ilyen ív találkozásánál $M(r)$-nek, ill. $H(t)$-nek töréspontja van, ami sem a monotonitást, sem a konvexitást nem bontja meg. Ennélfogva a $(t, H(t))$ koordinátarendszerben ábrázolva $H(t)$

* E tétel lim—sup-ra vonatkozó részének pozitív együtthatós hatványsorokra vonatkozó bizonyítását lásd pl. PÓLYA—SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. II. S. 8. Aufg. 53. Lösung S. 178. (Springer Vlg. Berlin, 1925).

érintőjének iránytangense ugyancsak monoton növekszik és legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok t helyen ugráspontja van. Nyilván $H'(-\infty)=0$, továbbá transzcendens egészfüggvényekről lévén szó,

$$H'(t)=e^t\frac{M'(e^t)}{M(e^t)}$$

nem lehet korlátos, ha $t\to\infty$, mert ellenkező esetben elég nagy t-re $M(e^t)<e^{ct}$ állna, ami csak racionális egész függvényekre következhet be.

Ekkor azonban egyetlen olyan $t=t_n$ hely létezik, ahol $H(t)$ érintőjének, ill. töréspont esetén támaszegyenesének iránytangense éppen $n(>0)$.

E t_n hely azonban nyilván a

$$G(t)=H(t)-nt,$$

az egész t tengelyen egyenesszakaszt nem tartalmazó konvex függvénynek egyetlen minimumhelye, hiszen $G(-\infty)=G(\infty)=\infty$, míg t véges értékeire $G(t)$ is véges.

A mondottakból következik, hogy a

$$G(\log r)=\log\frac{M(r)}{r^n}$$

és így maga a $\frac{M(r)}{r^n}$ függvény is az $r\geqq 0$ félegyenesen egy és csakis egy $r=r_n$ helyen éri el minimumát, amit bizonyítanunk kellett.

A továbbiak kedvéért a bizonyítást a

$$S_n(r)=\frac{M(r)}{r^n}$$

függvény minimum helyének vizsgálatával is vázoljuk, ami lényegében azonos az előbbivel. Itt

$$S_n'(r)=\frac{M(r)}{r^{n+1}}\left(r\frac{M'(r\pm 0)}{M(r)}-n\right)$$

és HADAMARD tétele értelmében a szakaszonként analitikus $r\frac{M'(r)}{M(r)}$ függvényre

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{M'(r)}{M(r)}\right)=\frac{d^2\log M(r)}{d(\log r)^2}>0.$$

Az $r\frac{M'(r)}{M(r)}$ függvény tehát $r\geqq 0$-ra a 0 értékből kiindulva monoton, határozottan növekvő, végtelen felé tart, ha $r\to\infty$, ugráshelyektől eltekintve analitikus és így egyetlen $r=r_n$ helyen veszi fel, ill. ugorja át az $n(>0)$ értéket. Ekkor azonban

$$S_n'(r)\begin{cases}<0, & \text{ha } 0<r\leqq r_n\\ >0, & \text{ha } r_n\leqq r.\end{cases}$$

Vagyis $S_n(r)$ a $0 \leqq r \leqq r_n$-re monoton csökkenő, $r \geqq r_n$-re növekvő, mindenütt folytonos, tehát $r = r_n$ helyen minimuma van.

Az így értelmezett $r_n = r(n)$ értékekre az

$$r(n') > r(n), \quad \text{ha} \quad n' > n > 0$$

érvényes. Ez mindkét bizonyításból kitűnik. Egyenlőségi jel áll, ha az

$$n(r) = r\frac{M'(r)}{M(r)}$$

monoton függvénynek valamely $\bar{r}$ helyen ugrása van és akkor az $n(\bar{r}-0) \leqq \leqq n \leqq n(\bar{r}+0)$ értékek mindegyikéhez ugyanez az r_n hely tartozik. Az $r_n = r(n)$ és $n(r)$ függvények egymás inverzei, az előbbi egy-egy szakaszon állandó lehet, az utóbbi ugráshelyeinek megfelelően.

Most rátérünk a bevezetésben mondott 2. tétel bizonyítására. Az $n(r)$ értelmezése szerint $r > 0$ és $\varrho > 0$ minden értékére felírhatjuk az

$$\frac{M(r)}{r^{n(r)}} \leqq \frac{M(\varrho)}{\varrho^{n(r)}}$$

egyenlőtlenséget. Ha most r olyan nagy, hogy rögzített ϱ mellett

$$M(\varrho) < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n(r)},$$

akkor

$$M(r) \leqq \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n(r)} M(\varrho) < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n(r)}.$$

Ebből

$$\log M(r) < 2\, n(r) \log \frac{r}{\varrho}$$

és

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} < \frac{\log n(r)}{\log r} + \frac{\log\log\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}{\log r}.$$

Minthogy az utolsó tag 0 felé tart, ha $r \to \infty$, ennélfogva

$$\text{(2)} \qquad \lim_{r\to\infty} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \lim_{r\to\infty} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

Másrészt

$$\frac{n(r)}{r} = \frac{M'(r)}{M(r)}$$

és

$$\int_{r/e}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt = \log M(r) - \log M(r/e).$$

Ha már $M(r/e) > 1$, akkor $n(r)$ monotonitása miatt

$$n\left(\frac{r}{e}\right) < \log M(r)$$

és

$$\frac{\log n\left(\frac{r}{e}\right)}{\log \frac{r}{e}} < \frac{\log\log M(r)}{\log r} \frac{1}{1-\frac{1}{\log r}}.$$

Innen azonban a (2) egyenlőtlenség fordítottja, és így 2. tételünk bizonyítása adódik.

2. §. Az $r_1, r_2, \ldots$ sorozatról

Jelöljük a $S_n(r)$ függvény minimumát M_n-el:

$$\frac{M(r_n)}{r_n^n} = M_n,$$

ekkor, mint mondottuk

$$|a_n| < M_n.$$

Bár minden rögzített n-re

$$\frac{M(r)}{r^n} \to \infty, \quad \text{ha} \quad r \to \infty,$$

azonban

$$M_n = \frac{M(r_n)}{r_n^n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Sőt egyrészt

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

másrészt

(4) $$M_n^{1/n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A (3) állítás egyszerű következménye annak, hogy $r > 1$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(r_n)}{r_n^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(r)}{r^n} = \frac{M(r)}{r-1}.$$

Könnyű belátni, hogy ez utóbbi függvény egy és csakis egy $r = r^*$ helyen veszi fel minimumát, s így a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \frac{M(r^*)}{r^*-1}$$

egyenlőtlenséget írhatjuk fel.

A (4) reláció a

$$0 \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{[M(r_n)]^{1/n}}{r_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{[M(r)]^{1/n}}{r} = \frac{1}{r}$$

egyenlőtlenségnek következménye, hiszen ez utóbbi r akármilyen nagy értékére fennáll.

Könnyű belátni, hogy az M_n-ek sorozata monoton nem csökkenő mindaddig, míg $r_n < 1$ és monoton nem növekvő, ha $r_n > 1$. Sőt a $\log M_n$ sorozat konkávitását is tartalmazza a következő elválasztási

3. TÉTEL. *Ha $n \geqq 2$ egész, akkor*

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} \leqq r_n \leqq \frac{M_n}{M_{n+1}},$$

vagy más jelölésmóddal

$$\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-1} \leqq \frac{M(r_n)}{M(r_{n-1})} \leqq \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^n.$$

Ha speciálisan $F(z) = e^z$, akkor ebből az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ismert egyenlőtlenséget nyerjük.

Bizonyítás: A minimum-tulajdonság miatt egyrészt

$$M_{n-1} = \frac{M(r_{n-1})}{r_{n-1}^{n-1}} \leqq \frac{M(r_n)}{r_n^{n-1}} = r_n M_n,$$

másrészt

$$M_{n+1} = \frac{M(r_{n+1})}{r_{n+1}^{n+1}} \leqq \frac{M(r_n)}{r_n^{n+1}} = \frac{M_n}{r_{n+1}}.$$

E két egyenlőtlenségből az M_n sorozat előbb említett monotonitási sajátsága is leolvasható.

A 3. tételben álló egyenlőtlenségek $n = 2$-től vett szorzatából adódik a következő

4. TÉTEL. *Ha $n \geqq 1$ egész, akkor*

$$\frac{M_1}{M_n} r_1 \leqq r_1 r_2 \ldots r_n \leqq \frac{M_1}{M_n} r_n,$$

vagy más jelölésmóddal

$$\frac{M(r_n)}{M(r_1)} \frac{r_1}{r_n} \leqq \frac{r_n^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \leqq \frac{M(r_n)}{M(r_1)}.$$

Ez az egyenlőtlenség az $F(z)=e^z$ függvény esetén a klasszikus Stirling-formulának az

$$\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$$

gyengébb alakját adja.

Végül kimondjuk a következő

5. TÉTELT. *Az $r_1, r_2 \ldots$ sorozat konvergenciaexponense az $F(z)$ függvény növekedésének rendje.*

Az $[n(r)]$ egész rész az r_n sorozat tagjainak számát adja r-ig. Ismeretes azonban, hogy valamely r_n sorozat konvergenciaexponense

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\log r_n},$$

és így tételünk a 2. tétel egyszerű következménye.

3. §. Egyenlőtlenségek bizonyos momentumokra

A

$$\mu_n=\int_0^\infty\frac{r^n}{M(r)}dr$$

momentumokat egyrészt az M_n sorozat bizonyos tagjainak segítségével, másrészt az együtthatók abszolút értékével fogjuk — igen egyszerű módon — felülről becsülni. Az előző becslések természetesen az élesebbek.

6. TÉTEL. *Legyenek $\alpha>1$, $n>\beta\geqq 0$ valósak, akkor*

$$\mu_n<\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-1)(\beta+1)}\left(\frac{1}{M_{n+\alpha}^{\beta+1}\,M_{n-\beta}^{\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Bizonyítás: Egyrészt

(5) $$M_{n+\alpha}\leqq\frac{M(r)}{r^{n+\alpha}},\quad\text{honnan}\quad\frac{r^n}{M(r)}\leqq\frac{1}{M_{n+\alpha}}\cdot\frac{1}{r^\alpha},$$

másrészt

(6) $$M_{n-\beta}\leqq\frac{M(r)}{r^{n-\beta}},\quad\text{honnan}\quad\frac{r^n}{M(r)}\leqq\frac{1}{M_{n-\beta}}r^\beta.$$

Az (5) és (6) egyenlőtlenségek geometriai jelentése az, hogy az $\frac{r^n}{M(r)}$

függvény alatta marad mind az $r=0$-ban 0-tól emelkedő $\frac{1}{M_{n-\beta}} r^\beta$ parabolá-nak, mind pedig az $r=0$-ban ∞-től csökkenő $\frac{1}{M_{n+\alpha}} \frac{1}{r^\alpha}$ parabolának.

Alatta marad tehát e kettő alsó burkolójának.

Legyen $\bar{r}$ az a hely, ahol a két parabola egymást metszi:

$$\frac{1}{M_{n+\alpha}} \frac{1}{r^\alpha} = \frac{1}{M_{n-\beta}} r^\beta.$$

Ekkor

$$\int_0^\infty \frac{r^n}{M(r)} dr < \frac{1}{M_{n-\beta}} \int_0^{\bar{r}} r^\beta dr + \frac{1}{M_{n-\alpha}} \int_{\bar{r}}^\infty \frac{1}{r^\alpha} dr.$$

A számítás elvégzése a 6. tételhez vezet.

Konkrét esetben α és β megfelelő választásával nyerhetünk ebből elérhető legjobb becslést. A 6. tételnél élesebb, ugyanakkor α és β-t két egymástól független tagban tartalmazza a következő

7. TÉTEL. *Legyenek ismét $\alpha > 1$, $n > \beta \geqq 0$ valósak, akkor*

$$\mu_n < \frac{1}{M_n}\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{M_n}{M_{n+\alpha}}\right)^{1/\alpha} - \frac{\beta}{\beta+1}\left(\frac{M_{n-\beta}}{M_n}\right)^{1/\beta}\right].$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyításához ugyancsak az (5) és (6) egyenlőtlenségekből indulunk ki. Most azonban az (5)-öt olyan $(0, \bar{r})$ intervallumban alkalmazzuk, amelynek $\bar{r}$ végpontjára

$$\frac{1}{M_{n-\beta}} \bar{r}^\beta = \frac{1}{M_n},$$

a (6)-ot arra az (r, ∞) intervallumra, melynek $\bar{\bar{r}}$ kezdőpontjára

$$\frac{1}{M_{n+\alpha}} \cdot \frac{1}{\bar{\bar{r}}^\alpha} = \frac{1}{M_n},$$

míg az $(\bar{r}, \bar{\bar{r}})$ intervallumban az

$$\frac{r^n}{M(r)} \leqq \frac{1}{M_n}$$

egyenlőtlenséggel becslünk. Az integrálások elvégzése a 7. tételben adott egyenlőtlenséghez vezet.

Hasonló egyenlőtlenségek adódnak a megfelelő együtthatók felhasználásával. A 6. tételnek az

$$|a_n| < M_n$$

következtében egyszerű folyománya a

8. TÉTEL. *Ha* $\alpha \geqq 2$, $n > \beta \geqq 1$ *egészek és* $a_{n+\alpha} \neq 0$, $a_{n-\beta} \neq 0$, *akkor*

$$\mu_n < \frac{\alpha+\beta}{(\alpha-1)(\beta+1)} \frac{1}{\left[|a_{n+\alpha}|^{\beta+1} |a_{n-\beta}|^{\alpha-1}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}.$$

A 7. tételhez hasonlóan bizonyítható a

9. TÉTEL. *Ha* $\alpha \geqq 2$, $n > \beta \geqq 1$ *egészek, továbbá* $a_{n+\alpha} \neq 0$, $a_{n-\beta} \neq 0$ *és*

$$\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+\alpha}|}\right)^{1/\alpha} \geqq \left(\frac{|a_{n-\beta}|}{|a_n|}\right)^{1/\beta},$$

akkor

$$\mu_n < \frac{1}{|a_n|}\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{|a_n|}{|a_{n-\alpha}|}\right)^{1/\alpha} - \frac{\beta}{\beta+1}\left(\frac{|a_{n-\beta}|}{|a_n|}\right)^{1/\beta}\right].$$

Megemlítjük a 8. tétel egy érdekes következményét. Ha egy transzcendens egész függvény hatványsorában pl. $|a_1| = |a_N| = 1$, akkor $n = 2, 3, \ldots N-2$-re

$$\mu_n < \frac{N-1}{n(N-1-n)}.$$

Noha $\mu_n \to \infty$, ha $n \to \infty$, de μ_{N-2} még kicsi. Így ha $F(z) = e^z$, akkor $\mu_{n-2} = (N-2)!$, ellenben ha képezzük azt a hatványsort, amelynek együtthatóira $a_k = \frac{1}{k!}$, ha $k \neq N$ és $a_N = 1$, akkor erre nézve még $\mu^*_{N-2} < 1$, hacsak $N \geqq 5$.

Megjegyzés: A korrektúra kézhezvétele után jutott szerző tudomására, hogy W. K. HAYMAN: "A generalisation of Stirling's Formula". (Journal für die reine und angewandte Mathematik. 196. kötet. 1/2 füzet. Berlin 1956.) c. dolgozatának tárgya érintkezik e dolgozatban foglaltakkal.

A SORELMÉLET EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

SZÜSZ PÉTER

Bemutatta Rényi Alfréd r. tag az 1956. szeptember 28-án tartott felolvasó ülésen

A Cantor-sorfejtés* egy kérdésének vizsgálata során a következő kérdés merült fel: Legyen

$$a_1 + a_2 + \cdots \tag{1}$$

pozitív tagokból álló divergens sor. Igaz-e, hogy minden ilyen sorból kiválasztható egy olyan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ részsor $(1 \leqq \varphi(1) < \varphi(2) < \cdots)$, melyre fennáll

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min (a_{\varphi(k)}, a_{\varphi(k+1)}) = \infty. \tag{2}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ilyen általában nem létezik. Így tehát felmerül a kérdés, milyen további feltételek szükségesek az (1) sor a_k tagjaira ahhoz, hogy ennek egy részsora kielégítse (2)-t. Ha az $\{a_k\}$ számsorozat nem tart 0-hoz, vagy tartalmaz egy monoton csökkenő divergens összegű részsorozatot, akkor nyilván lehetséges ilyen részsor kiválasztása. Azonban mindkét feltevés túl erős megszorítás az a_k-kra nézve. Vannak olyan sorok, amelyekből kiválasztható egy a (2) feltevésnek eleget tevő részsor, de a sort megfelelően átrendezve ez már nem lehetséges. Ezért a problémát kissé módosítva a következő kérdést vizsgáljuk:

Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív számok monoton 0-hoz tartó sorozata, amelyre teljesül a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \tag{3}$$

reláció is. Milyen további feltételek szükségesek az a_k-kra, hogy az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat *minden* $a'_1, a'_2, \ldots$ átrendezésénél megadható legyen egy olyan $a'_{\varphi(1)}, a'_{\varphi(2)}, \ldots$ kiválasztás, melyre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min (a'_{\varphi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}) = \infty \tag{4}$$

teljesül? Erre a kérdésre a választ a következő tétel adja meg:

* Szüsz P.: Megjegyzések számjegyek eloszlásáról valós számok Cantor-sorában. Mat. Lapok (sajtó alatt).

TÉTEL: *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a monoton 0-hoz tartó pozitív $a_1, a_2, \ldots$ sorozat minden $a'_1, a'_2, \ldots$ átrendezéséhez kiválasztható legyen egy, a (4)-et kielégítő $a'_{\varphi(1)}, a'_{\varphi(2)}, \ldots$ részsorozat, az, hogy fennálljon a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n a_n > 0 \tag{5}$$

reláció.

BIZONYÍTÁS:

a) A feltétel elegendő. Legyen ugyanis $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n a_n = c > 0$; akkor létezik természetes számok olyan $n_1, n_2, \ldots$ végtelen sorozata, melyre

$$n_k a_{n_k} > \frac{c}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Legyen $\psi(n)$ a legkisebb szám, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy az $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\psi(n)}$ számok között az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok valamennyien előfordulnak. Válasszunk ki egy n_{k_1}-et, amely kielégíti (6)-ot. Az

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\psi(n_{k_1})}$$

számok közül töröljük azokat, amelyek kisebbek, mint $a_{n_{k_1}}$. Ha $\varphi(1), \varphi(2), \ldots$ jelölik azon indexeket, amelyeket nem töröltünk, akkor nyilván fennáll

$$\sum_{1 \leqq \varphi(k) \leqq n k_1} \min\left(a'_{\varphi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}\right) \geqq n_{k_1} a_{n_{k_1}}.$$

Ugyanis a baloldalon álló összeg legalább n_{k_1} tagból áll, amelyek mind nem kisebbek $a_{n_{k_1}}$-nél. Innen következik

$$\sum_{1 \leqq \varphi(k) \leqq n_{k_1}} \min\left(a'_{\varphi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}\right) > \frac{c}{2}. \tag{7}$$

Most válasszunk ki a (6)-nak eleget tevő számokból egy második n_{k_2} számot, melyre fennáll $n_{k_2} > 2\psi(n_{k_1})$ és a

$$a'_{\psi(n_{k_1})+1}, a'_{\psi(n_{k_1})+2}, \ldots, a'_{\psi(n_{k_2})}$$

számok közül töröljük azokat, amelyek kisebbek $a_{n_{k_2}}$-nél. (7)-hez analóg módon adódik

$$\sum_{\psi(n_{k_1}) < \varphi(k) \leqq \psi(n_{k_2})} \min\left(a'_{\psi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}\right) > \frac{c}{4}$$

és ezen eljárás folytatásával általában

$$\sum_{\psi(n_{k_m}) < \varphi(k) \leqq \psi(n_{k_{m+1}})} \min\left(a'_{\varphi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}\right) > \frac{c}{4}, \tag{8}$$

amivel (5) elegendőségét igazoltuk.

b) A feltétel szükséges. Ennek bizonyítására elegendő megmutatni, hogy *minden* monoton zérushoz tartó $a_1, a_2, \ldots$ számsorozathoz, amelyre teljesül

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0, \tag{9}$$

megadható oly $a_1', a_2', \ldots$ átrendezés, amelynek *minden* részsorára

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\,(a'_{\varphi(k)}, a'_{\varphi(k+1)}) < \infty. \tag{10}$$

Ha (9) fennáll, akkor megadható a természetes számsornak egy olyan $n_1, n_2, \ldots$ részsorozata, hogy érvényes legyen

$$\max_{n \geqq n_k} n a_n < 2^{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Feltesszük továbbá, hogy $n_{k+1} - n_k$ 2-nek hatványa:

$$n_{k+1} - n_k = 2^{m_k} \qquad (m_k \geqq 2) \tag{12}$$

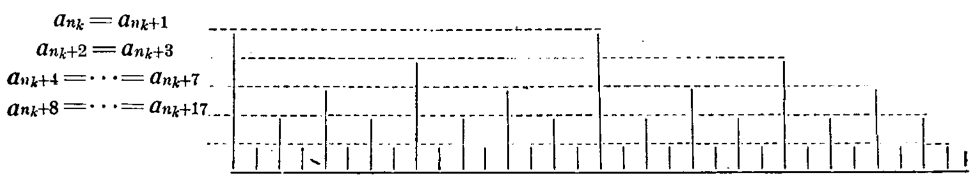
Ezt (9) miatt az általánosság megszorítása nélkül tehetjük.

Az a_k-kra még a (13) kikötést tesszük (melytől azonban a bizonyítás végén meg fogunk szabadulni).

$$a_{n_k} = a_{n_k+1},\; a_{n_k+2^l} = a_{n_k+2^l+1} = \cdots = a_{n_k+2^{l+1}-1} \qquad (0 \leqq l < m_k), \tag{13}$$

ahol m_k-t (12)-vel definiáltuk. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatnak az az átrendezése, amelyre teljesül (10), a következőképpen nyerhető: Az $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ számok ($n_1, n_2, \ldots$ a (11) és (12)-nek eleget tevő számokat jelentik) az átrendezés után is eredeti helyükön maradnak, továbbá minden $a_n (n_k < n < n_{k+2})$ szám indexe az átrendezés után is az $n_k < n < n_{k+1}$ intervallumban marad. Egy $n_k < n < n_{k+1}$ szakasz átrendezését most már úgy hajtjuk végre, hogy bármely két szám, a_n és a_m közé, ahol a_n értéke $a_{n_k+2^r}$ és a_m értéke $a_{n_k+2^s}$, legalább egy szám essék, amelynek értéke $a_{n_k+2^{t+1}}$, legalább egy, amelynek értéke $a_{n_k+2^{t+2}}$, legalább egy, amelynek értéke $a_{n_k+2^{t+3}}, \ldots$, legalább egy, amelynek értéke $a_{n_k+2^{m_k-1}}$, ahol t $\max\,(r, s)$-et jelenti.

Ha a_n és $a_{n_{k+1}}$ között nem fekszik oly szám, amelynek értéke nem kisebb, mint a_n, akkor a_n és $a_{n_{k+1}}$ között valamennyi különböző, a_n-nél kisebb és $a_{n_{k+1}}$-nél nagyobb szám legalább egyszer előfordul. Ez a konstrukció nyilván egyértelműen elvégezhető (l. az ábrát).



Az így átrendezett $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot $a'_1, a'_2, \ldots$-val jelölöm. Az

$$a'_{n_k}, a'_{n_k+1}, a'_{n_k+2}, \ldots, a'_{n_{k+1}}$$

sorozatban azon a'_n számok n indexei, amelyekre $a'_n > a_{n_k+2^l}$ $(0 \leq l < m_k)$, (véges) számtani sort alkotnak; ez az átrendezés konstrukciójából nyilvánvaló. Ez a megállapítás később hasznos lesz számunkra.

Most megmutatom, hogy az $a'_{n_k}, a'_{n_k+1}, \ldots, a'_{n_{k+1}}$ számok tetszőleges részhalmazára, tehát a $\varphi(n)$ „kiválasztási függvény" bármely választása esetén fennáll a

$$(14) \qquad \sum_{n_k \leq \varphi(n) < n_{k+1}} \min(a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}) \leq 2 \max_{0 \leq l < \infty} 2^l a_{n_k+2^l}$$

reláció. Ha (14)-et bebizonyítottuk, azzal (11) miatt tételünket (természetesen csak a (13) megszorítással) is bebizonyítottuk. (14) bizonyításának befejezése után meg fogunk szabadulni a (13) megkötéstől.

Valamely L hosszúságú szakasz alatt a továbbiakban L konzekutív a'_r számot fogok érteni, tehát az $a'_r (r = n, n+1, \ldots, n+L-1)$ számsorozatot. Természetesen lehetséges, hogy valamely L hosszúságú szakasz kevesebb $a'_{\varphi(n)}$ számot tartalmaz, mint L; tudniillik akkor, ha a kiválasztásnál az illető szakaszban fekvő számok közül bizonyosakat töröltünk.

Tegyük fel, hogy $\varphi(n)$-t már úgy választottuk, hogy (14) baloldala maximális; több ilyen lehetséges kiválasztás esetén válasszunk ezek közül egy tetszőlegeset.

Legyen $n_k + 2^l$ a legkisebb index, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy egy $a_{n_k+2^l}$-nel egyenlő szám (14) baloldalának tagjai között előfordul. Könnyen belátható, hogy az $a_{n_k}, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_k+2^{l+1}-1}$ számok az $a'_{\varphi(n)}$-ek között mind előfordulnak; ugyanis ha ezek valamelyike nem fordulna elő, akkor azt a kiválasztott részsorozathoz csatolva az két olyan tag közé kerülne, amelyek közül a kisebbnél nem kisebb és ezáltal (14) baloldala megnőne, tehát nem lett volna a kiegészítés előtt maximális. Nem csökken (14) baloldala akkor, ha az $a_{n_k}, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_k+2^l-1}$ számokat, melyekről mint láttuk, feltehetjük, hogy az $a'_{\varphi(n)}$-ek között előfordulnak, mind $a_{n_k+2^l}$-nel helyettesítjük. Ez azonnal adódik az $n_k + 2^l$ index definíciójából. Tekintsük most azokat a tagokat, melyek értéke $a_{n_k+2^l}$. Ezek indexei egy korábbi megjegyzés szerint a teljes sorban számtani sort alkotnak, továbbá ezek ténylegesen előfordulnak a módosított részsorban, amelynek tagjait továbbra is $a'_{\varphi(n)}$-nel jelöljük. Mármost fennáll

$$(15) \qquad \sum_{n_k \leq \varphi(n) < n_{k+1}} \min(a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}) = a_{n_k+2^l} R,$$

ahol R a fent definiált $a_{n_k+2^l}$-nel egyenlő tagok számát jelenti. Ezt a következőképpen bizonyítjuk. Mivel $a_{n_k+2^l}$ a (14) baloldalán levő összeg tagjai közt valóban előfordul, a módosított sorban két szomszédos $a_{n_k+2^l}$-nel egyenlő szám van. Azonban

$$\sum_{n_k \leqq \varphi(n) < n_{k+1}} \min (a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}) = \sum_r \sum_{\varphi(n) \in A_r} \min (a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}),$$

ahol A_r a két $a_{n_k+2^l}$ értékű a'_n közti szakaszokat jelenti, melyekről tudjuk, hogy egyforma hosszúságúak. Jelölje A_{r_1} azt a szakaszt, mely csak egy $a_{n_k+2^l}$ értékű számot tartalmaz; ha valamely A_r-re fennállna

$$\sum_{\varphi(n) \in A_r} \min (a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}) \neq a_{n_k+2^l},$$

akkor A_r helyébe A_{r_1}-t helyettesítve, vagy fordítva, lehetséges volna egy másik $\varphi_1(n)$ kiválasztás, melyre

$$\sum_{n_k \leqq \varphi(n) < n_{k+1}} \min (a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}) < \sum_{n_k \leqq \varphi_1(n) < n_{k+1}} \min (a'_{\varphi_1(n)}, a'_{\varphi_1(n+1)}),$$

ami ellentmond $\varphi(n)$ definíciójának. Ezzel (15)-öt bebizonyítottuk. Nyilván

$$R = 2^{l+1}$$

ahonnan (15) miatt (14) következik.

Most megszabadulunk (13)-tól. Ez úgy történhetik, hogy az eredeti $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot 2^m hosszúságú szakaszokra bontjuk és minden szakasz kezdetétől számítva az

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}, \ldots, a_{n+2^m}$$

számokat

$$a_n, a_n, a_{n+2}, a_{n+2}, a_{n+4}, a_{n+4}, a_{n+4}, a_{n+4}, a_{n+8}, \ldots$$

-val helyettesítjük. Ezzel az eredeti sorozat egyetlen tagját sem csökkentjük. Ha (9) fennáll az eredeti sorozatra, akkor ugyanez fennáll a módosított sorozatra is, amivel tételünk bizonyítását befejeztük.

Befejezésül megjegyzem a következőt: A fent közölt bizonyítás lényeges változtatás nélkül kiadja a következő tételt, amely a dolgozatban bizonyított tétel élesítése: Legyen $a_1, a_2, \ldots$ monoton zérushoz tartozó, pozitív tagú sorozat, legyen továbbá $n_1, n_2, n_3, \ldots$ a természetes számsor egy tetszőleges részsorozata. Annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $a_1, a_2, \ldots$ minden $a'_1, a'_2, \ldots$ átrendezéséhez megadható legyen egy olyan $a'_{\varphi(1)}, a'_{\varphi(2)}, \ldots$ kiválasztás, amelyre teljesül

$$\sum_{k=1}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) \min_{n_k \leqq n < n_{k+1}} a'_{\varphi(n)} = \infty,$$

az (5) reláció teljesülése.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

AZ ITERATÍV KÖZELÍTŐMÓDSZEREKRŐL. I. RÉSZ

ZAJTA AURÉL

A számológépes technika rohamos elterjedése folytán az utolsó 10 év alatt mind nagyobb tért hódítanak az iteratív közelítőmódszerek, melyeknek klasszikus példája az általánosan ismert Newton—Raphson-eljárás, továbbá ennek EULERtől származó általánosítása. E közelítőmódszerek elterjedése szükségessé tette elméleti megalapozásukat, azon viszonyok megállapítását, amelyek esetén a módszerek eredményesek, a különböző módszerek kritikai összehasonlítását tekintettel a praktikus használhatóságra, és végül az egyes módszerek formai tanulmányozását.

Az elméleti munka során az első lépést E. BODEWIG és vele egyidőben, de tőle függetlenül D. R. HARTREE tette: csak a BODEWIG munkájában [1] először definiált konvergenciafok, ill. a HARTREE-tól származó konvergenciarendűség fogalmával lehetett a különféle közelítőeljárásokat egzakt módon összehasonlítani. Ezt követték az orosz GORNSTEINnek [2], majd a magyar KISS IGNÁCnak [3] szisztematikus tanulmányai, majd R. LUDWIG dolgozata [4], mely utóbbi eléggé részletes és összefoglaló, de a tárgyalt képleteket rendszertelenül és elszórtan hozza. Ugyanezen témakörrel foglalkozik a szerzőnek az Acta Technica-ban német nyelven megjelent, két részből álló dolgozata is: *Vizsgálatok a Newton—Raphson-gyökközelítőeljárás általánosításairól.* Jelen dolgozat nem egyszerű fordítása az Acta Technica-ban megjelentnek, de lényegében ugyanazokat az eredményeket tartalmazza. Megváltozott az anyag tárgyalási sorrendje, elmaradtak egyes kézenfekvő mellékszámítások, viszont tüzetesebben megmagyaráztunk olyan részeket, melyeknek fogalmazása az eredetiben homályosnak tünhetett. S végül éppen e nagyfokú átdolgozás miatt a dolgozat címe sem maradhatott a régi.

1. Direkt és iteratív közelítőképletek

Feladatunk az

$$f(x)=0 \tag{1}$$

egyenlet közelítő megoldása. Jelölje ξ az (1) egyenlet egyik gyökét. Amennyiben $f(x)$ racionális egész függvény:

(2) $$f(x) \equiv x^{\nu} - c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} - \cdots + (-1)^{\nu-1} c_{\nu-1} \cdot x + (-1)^{\nu} \cdot c_{\nu},$$

számos képlet megadható, amely a ξ-t jó közelítéssel szolgáltatja:

(3) $$\xi \approx W(c_1, c_2, \ldots c_{\nu}).$$

A (3) típusú képleteket direkt vagy ismétlés nélküli közelítőképleteknek nevezzük. A Bernoulli- és a Gräffe-féle közelitőmódszerek végső elemzésben ilyen közelítőképletek alkalmazásán alapszanak.

A (3) típusú képletektől megkövetelhetünk egy bizonyos „kovariancia"-tulajdonságot: ha a (2) függvény együtthatói (c_k) helyett a

$$\lambda^{\nu} \cdot f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

függvény eggyütthatóival ($\lambda^k \cdot c_k$) végezzük a számításokat, az eredeti érték helyett annak λ-szorosát kell kapnunk:

(4) $$W(\lambda c_1, \lambda^2 c_2, \ldots \lambda^{\nu} c_{\nu}) = \lambda \cdot W(c_1, c_2, \ldots c_{\nu}).$$

A következőkben megadunk egy módszert, amelynek segítségével tetszőleges direkt közelítőképletet iteratív közelítőképletté alakíthatunk. Jelöljön a egy olyan egyébként tetszőleges konstansot, melyre $f(a) \neq 0$. A jelölések tekintetében egyszer s mindenkorra állapodjunk meg abban, hogy minden függvény argumentuma nélkül írt betűjelén az $x = a$ helyen vett értéke értendő. Tehát pl.:

$$f = f(a), \qquad f^{(n)} = f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)_{x=a}.$$

Ezek után képezzük az

(5) $$\frac{x^{\nu}}{f(a)} \cdot f\left(a - \frac{1}{x}\right) = x^{\nu} - \frac{f'}{f} \cdot x^{\nu-1} + \frac{1}{2!}\frac{f''}{f} \cdot x^{\nu-2} - \cdots + \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{f^{(\nu)}}{f}$$

polinomot, melynek egyik zérushelye nyilván

(6) $$\eta = \frac{1}{a - \xi}.$$

A (3) képletet most az η közelítésére használjuk fel

$$\eta \approx W\left(\frac{f'}{f}, \frac{1}{2!}\frac{f''}{f}, \ldots, \frac{1}{\nu!}\frac{f^{(\nu)}}{f}\right),$$

s innét a ξ-t a (6) alapján nyerhetjük:

$$\xi = a - \frac{1}{\eta} \approx a - \frac{1}{W\left(\frac{f'}{f}, \frac{1}{2!}\frac{f''}{f}, \ldots \frac{1}{\nu!}\frac{f^{(\nu)}}{f}\right)},$$

vagy a (4) figyelembevételével

$$(7) \qquad \xi \approx a - \frac{f}{W\left(f', \frac{1}{2!}ff'', \cdots \frac{1}{\nu!}f^{\nu-1}f^{(\nu)}\right)} = a - \frac{f(a)}{W(a)}.$$

A nyert (7) képlet iteratív jellege azonnal kitűnik a következő írásmódból:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{W(x_n)}.$$

Az iteratív képleteknek számos előnyük van a direktekkel szemben, amelyek közül itt csak egyre mutatunk rá. Amíg a (3)-ban az $f(x)$ polinom együtthatói szerepeltek, a (7)-nél az $f(x)$-nek és deriváltjainak bizonyos $x=a$ helyen vett értékei fordulnak elő, tehát míg a (3) csak racionális egész függvények zérushelyeinek közelítésére volt alkalmas, a (7)-t felhasználhatjuk nem algebrai egyenletek megoldására is, feltéve természetesen, hogy az eljárás konvergens.

2. A Bernoulli- és Gräffe-féle képletek átalakítása iteratív közelítőképletekké

Mint ismeretes, ezek a közelítőképletek az

$$s_n = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k^n$$

gyökhatványösszegeket használják fel, melyek kifejezhetők a c_k együtthatók függvényeiként:

$$(8) \qquad \begin{cases} s_1 = c_1, \\ s_2 = c_1^2 - 2c_2, \\ s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3, \text{ stb.}, \end{cases}$$

másrészt tagjai egy rekurziós sorozatnak, ahol a képzési szabály:

$$(9a) \qquad s_n = c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} c_{n-1} s_1 + (-1)^{n-1} \cdot n c_n, \qquad (n \leqq \nu)$$

ill.

$$(9b) \qquad s_n = c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{\nu-2} c_{\nu-1} s_{n-\nu+1} + (-1)^{\nu-1} c_\nu s_{n-\nu}, \qquad (n > \nu).$$

A (8) alatti formulák még NEWTONtól származnak és Newton-féle formulák néven ismeretesek. Determinánsalakjuk a (9)-es képletekből egyszerű módon képezhető. Amennyiben végrehajtjuk bennük a

$$(10) \qquad c_k \to \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}}{f}$$

helyettesítést, az $\frac{1}{f^n}$ kiemelése után az f-nek és deriváltjainak egész polinomjait nyerjük:

$$s_n \to \frac{1}{f^n} \cdot N_n(f), \tag{11}$$

melyeket Newton-féle polinomoknak nevezünk el és melyeket a rövidség kedvéért $N_n(f)$-fel vagy N_n-nel jelölünk.

A Newton-polinomok a (9) alapján a következő rekurziós képletet elégítik ki:

$$N_n = f' . N_{n-1} - \frac{1}{2!} f f'' \cdot N_{n-2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} f^{n-2} f^{(n-1)} \cdot N_1 + \tag{12}$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1} f^{(n)}$$

(Az $n \leqq \nu$ megszorítás itt felesleges, mivel ν-ed fokú polinomok esetében a deriváltak amúgy is zérussá válnak, ha $n > \nu$). Explicit alakjuk néhány alacsonyabb indexre (vö. (8)):

$$N_1 = f',$$
$$N_2 = f'^2 - f f'',$$
$$N_3 = f'^3 - \frac{3}{2} f f' f'' + \frac{1}{2} f^2 f'''.$$

Mindezek után nézzük magukat a közelítőképleteket. A Bernoulli-módszer alapja a

$$\xi \approx \frac{s_{n+1}}{s_n}, \tag{13}$$

a Gräffe-módszeré pedig a

$$\xi \approx \sqrt[n]{s_n} \tag{14}$$

képlet alkalmazása, lehetőleg nagy n értékekre, ami a Gräffe-módszerrel könnyen elérhető $n = 2^k$ esetben. Az 1. fejezetben vázolt módszerrel a (13) képlet a

$$\xi \approx a - \frac{N_n}{N_{n+1}} \cdot f = \beta_{n+1}(a), \tag{15}$$

a (14) képlet pedig a

$$\xi \approx a - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n}} = \gamma_{n+1}(a) \tag{16}$$

közelítőképletté alakul át. A (15)-öt „iteratív Bernoulli-képlet"-nek, a (16)-ot pedig „iteratív Gräffe-képlet"-nek nevezzük el.

Ismeretes a Bernoulli-módszernek egy olyan módositása is, melynél az s_n gyökhatványösszegek helyett más — alkalmasan választott — $s'_1, s'_2, \ldots s'_\nu$

kiindulási értékekkel képezzük a rekurziós sorozat további tagjait a (9b) képlet szerint. Ilyen alkalmas választásként kínálkozik például az a módszer, melynél az első ν darab s'_n értéket a (9a) helyett a következő rekurziós képlettel határozzuk meg:

$$s'_n = c_1 s'_{n-1} - c_2 s'_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} c_{n-1} s'_1 + (-1)^{n-1} \cdot c_n. \tag{17}$$

A (17) képlet a c_k együtthatóknak újabb kifejezéseit definiálja, melyek közül néhány alacsonyabb indexűt ide írunk:

$$\begin{aligned} s'_1 &= c_1, \\ s'_2 &= c_1^2 - c_2, \\ s'_3 &= c_1^3 - 2c_1c_2 + c_3, \text{ stb.} \end{aligned} \tag{18}$$

A (10) helyettesítéssel ezek is az f és deriváltjainak polinomjaivá alakulnak:

$$s'_n \to \frac{1}{f^n} \cdot K_n(f).$$

Az ily módon definiált és $K_n(f)$-fel, vagy röviden K_n-nel jelölt polinomok explicit alakja a kezdeti indexekre:

$$\begin{aligned} K_1 &= f', \\ K_2 &= f'^2 - \frac{1}{2} ff'', \\ K_3 &= f'^3 - ff'f'' + \frac{1}{6} f^2 f'''. \end{aligned}$$

A K_n polinomok másik definícióját a (17) rekurziós képletből közvetlenül is megkaphatjuk:

$$K_n = f' \cdot K_{n-1} - \frac{1}{2!} ff'' \cdot K_{n-2} + \frac{1}{3!} f^2 f''' \cdot K_{n-3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} f^{n-1} f^{(n)}}{n}. \tag{20}$$

A (17) definícióval nyert s'_n értékek a következő Bernoulli-közelítést szolgáltatják:

$$\xi \approx \frac{s'_{n+1}}{s'_n}, \tag{21}$$

melynek iteratív átírása, a (19)-re való tekintettel:

$$\xi \approx a - \frac{K_n}{K_{n+1}} \cdot f.$$

Az n indexet egységnyivel csökkentve, a nyert képletet $\varkappa_{n+1}$-gyel fogjuk jelölni:

$$\varkappa_{n+1}(a) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f, \tag{22}$$

és a későbbiek során megmutatjuk, hogy azonos egyrészt a Gornstein módszerével [2] *nyerhető képletekkel, másrészt a Kiss-féle módszerrel kiszámított és Kiss által közölt képletekkel* [3]. Ezzel szemben sem a (15), sem a (16) képletsorozat az irodalomban — a szerző tudomása szerint — még nem bukkant fel, így tehát ezek újaknak tekinthetők.

Mindezen képletsorozatok tulajdonságainak megállapításához szükségünk van a bennük szereplő polinomok (N_n és K_n) tanulmányozására; a soron következő fejezetek ezzel a feladattal foglalkoznak.

3. Az $N_n(f)$ és $K_n(f)$ polinomok tulajdonságai

A (10) és (11) következtében racionális egész $f(x)$-ek esetében az

$$\frac{1}{f^n}\cdot N_n(f)$$

törtek úgy tekinthetők, mint az

$$f\left(a-\frac{1}{x}\right)=0$$

egyenlet gyökeiből képezett n-ik hatványösszegek:

$$\frac{1}{f^n}\cdot N_n(f)=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(a-\xi_k)^n}.$$

A jobboldal azonban nem egyéb, mint

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)};$$

és így

$$N_n(f)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}f^n\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}. \tag{23}$$

Tekintsük a (12)-t az $N_n(f)$ polinomok definíciójának abban az esetben, ha $f(x)$ nem racionális egész függvény. Nem nehéz belátni, hogy (23) pusztán (12)-ből is közvetlenül levezethető, tehát akkor is érvényes marad, ha $f(x)$ nem racionális egész függvény. *Fordítva* is (23)-ból mint értelmezésből kiindulva, azonnal előttünk áll a (12) rekurziós formula, ha az

$$\frac{f'}{f}\cdot f=f'$$

identitás mindkét oldalát, a baloldalt a Leibniz-szabály alkalmazásával, $(n-1)$-szer differenciáljuk.

Minthogy (23) így is írható:

$$(23') \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{f^n} \cdot \frac{N_n(f)}{n} = \frac{1}{n!} \cdot (\log f)^{(n)},$$

analitikus függvények esetében érvényes az alábbi sorfejtés:

$$(24) \qquad \log \frac{f(a)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot N_n(f) \cdot \alpha^n;$$

ahol

$$(25) \qquad \alpha = \frac{a-x}{f(a)}.$$

A Newton-polinomok a (12)-n kívül még egy más típusú rekurziós formulát is kielégítenek:

$$(26) \qquad N_n(f) = f' \cdot N_{n-1}(f) - \frac{f}{n-1} \cdot N'_{n-1}(f),$$

mely úgy vezethető le, hogy a (23) képletet egy egységgel kisebb indexre írjuk fel, differenciáljuk, majd összevetjük a (23)-mal.

Mivel (24) szerint az $N_n(f)$ polinomok a $\log \frac{f(a)}{f(x)}$ függvény $x=a$ körüli hatványsorának együtthatóival szoros összefüggésben állnak, várható, hogy az — általában a (20) rekurzív formulával értelmezett — $K_n(f)$ polinomok is valami hasonló összefüggésben állanak az $f(x)$ függvénnyel. Megalkotjuk az

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(f) \cdot \alpha^n$$

sort és kísérletet teszünk összegének megállapítására, feltételezve ismét, hogy $f(x)$ analitikus. Szorozzuk meg próbaképpen az $f(x)$ Taylor-sorával:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \cdot (x-a)^n = f(a) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{n-1} \cdot f^{(n)} \cdot \alpha^n.$$

A (20) következtében valamennyi α-hatványegyüttható eltűnik, az $\alpha^0 = 1$ együtthatójának kivételével, s innét nyilvánvaló, hogy

$$(27) \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(f) \cdot \alpha^n = \frac{f(a)}{f(x)}.$$

A (27) sorfejtésből azonnal leolvasható, hogy

$$(28) \qquad K_n(f) = \frac{(-1)^n}{n!} f^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{f}\right)^{(n)},$$

mely megfelel a (23)-nak. Felhasználva a Leibniz-szabályt az

$$\frac{1}{f}\cdot f=1$$

identitás n-szeres differenciálására, a (28)-ból, mint definícióból kiindulva, visszanyerhetjük a (20) rekurziós formulát. A (26)-hoz hasonlóan azonban itt is levezethetünk egy más típusú rekurziós összefüggést:

$$K_n(f)=f'\cdot K_{n-1}(f)-\frac{f}{n}\cdot K'_{n-1}(f), \tag{29}$$

amely, mint látható, a (26)-tól csak csekély mértékben különbözik. Végül a (23) és (28) összehasonlításából származik az alábbi érdekes és a későbbiekben fontos formula:

$$N_n(f)=(f')^n\cdot K_{n-1}\left(\frac{f}{f'}\right). \tag{30}$$

Az N_n és K_n polinomok között már eddig is megmutatkozó analógia arra enged következtetni, hogy létezik egy sokkal általánosabb polinomsorozat, melynek az N_n és K_n polinomok speciális eseteit képezik. Mindezzel a 4. fejezetben foglalkozunk.

4. A $C_{nm}(f)$ polinomok

A $C_{nm}(f)$ polinomokat a következőképp definiáljuk:

$$C_{nm}(f)=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n)}\cdot f^{n+m}, \tag{31}$$

ahol n tetszőleges nem negatív egész, m tetszőleges valós szám. E definícióból következik, hogy amennyiben $f(x)$ analitikus, érvényes a következő sorfejtés:

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}C_{nm}\cdot\alpha^n,\qquad \left(\alpha=\frac{a-x}{f(a)}\right). \tag{32}$$

A (28)-ból és (31)-ből közvetlenül adódik, hogy

$$C_{n1}(f)=K_n, \tag{33}$$

másrészt a (24)-ből és (32)-ből következik, ha tekintetbe vesszük az ismert

$$\lim_{m\to 0}\frac{\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^m-1}{m}=\log\frac{f(a)}{f(x)}$$

összefüggést, hogy

$$\lim_{m\to 0}\frac{C_{nm}(f)}{m}=\frac{1}{n}\cdot N_n(f). \tag{34}$$

A C_{nm} polinomok két rekurziós összefüggése:

$$C_{nm}=\frac{n-1+m}{n}f'\cdot C_{(n-1)m}-\frac{f}{n}\cdot C'_{(n-1)m}, \tag{35}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot(n-k+km)\cdot C_{(n-k)m}\cdot\frac{f^{(k)}}{k!}f^{k-1}=0. \tag{36}$$

Az első a (31)-ből adódik a (26) levezetésével azonos módon, a másodikat pedig úgy kapjuk, hogy az

$$\left(\frac{1}{f^m}\right)'\cdot f+m\cdot\frac{1}{f^m}\cdot f'=0$$

azonosság mindkét tagját a Leibniz-szabállyal $(n-1)$-szer differenciáljuk és az egyszerűsítések és összevonások után alkalmazzuk a (31) definíciót.

Helyettesítsünk a (32)-ben mindenütt f helyébe f^{ν}-t és az így kapott

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^{m\nu}$$

függvényre alkalmazzuk ismét a (32) sorfejtést; a két sor összehasonlításából nyerjük az alábbi összefüggést:

$$C_{nm}(f^{\nu})=f^{(\nu-1)n}\cdot C_{n(m\nu)}(f). \tag{37}$$

Ennek fontos alesetét képezi a (33) figyelembevételével nyerhető szabály:

$$K_n(f^m)=f^{(m-1)n}\cdot C_{nm}(f). \tag{38}$$

A C_{nm}-polinomok numerikus kiszámítására bármelyik összefüggésük felhasználható. Értékük néhány alacsonyabb index esetében:

$$\left\{\begin{aligned}
C_{0m}&=1,\\
C_{1m}&=mf',\\
C_{2m}&=\frac{1}{2}m(m+1)f'^2-\frac{1}{2}mff'',\\
C_{3m}&=\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)f'^3-\frac{1}{2}m(m+1)ff'f''+\frac{1}{6}mf^2f''',\\
C_{4m}&=\frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3)f'^4-\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)ff'^2f''+\\
&\quad+\frac{1}{6}m(m+1)f^2f'f'''+\frac{1}{8}m(m+1)f^2f''^2-\frac{1}{24}mf^3f''''.
\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Tetszőleges n indexre kiszámított általános alakjukat a következő fejezetben fogjuk levezetni.

5. A $C_{nm}(f)$ polinomok explicit alakja

Mielőtt a levezetéshez hozzákezdenénk, két megjegyzést kell tennünk:

1. A Newton-polinomokhoz hasonlóan a K_n- és a C_{nm}-polinomok is megadhatók determináns alakban, s ezek könnyen előállíthatók a (12), (20), ill. (36) rekurziós képletekből. A C_{nm} és a rokon polinomok determinánselméletével azonban külön dolgozat keretében kívánunk foglalkozni, egyrészt, mert ez az elmélet önmagában is zárt és terjedelmes, másrészt, mert nem illeszkedik szorosan a közelítőformulák elméletéhez.

2. A levezetendő explicit alakot egyszerűség kedvéért azzal a feltételezéssel vezetjük le, hogy $f(x)$ analitikus.

Az

$$\frac{f(x)}{f(a)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{f^{(k)}}{k!}f^{k-1}\cdot\alpha^k$$

végtelen sort emeljük m-ik hatványra a polinomiális tétel szerint:

$$\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}ki_k}\cdot\frac{m!}{\left(m-\sum\limits_{1}^{n}i_k\right)!\prod\limits_{k=1}^{n}i_k!}\cdot f^{\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)i_k}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right)^{i_k}\right]\cdot\alpha^n.$$

A szögletes zárójelen belül az összegezést az összes olyan nem negatív i_k egész számokra kell elvégezni, melyek a

$$\sum_{k=1}^{n}ki_k=n \tag{40}$$

feltételt kielégítik. Ha alkalmazzuk az

$$i_0=\sum_{k=2}^{n}(k-1)i_k \tag{41}$$

rövidítést, akkor ebből és a (40)-ből

$$\sum_{k=0}^{n}i_k=n \tag{42}$$

következik. A (40) és (41) figyelembevételével számításunk így alakul tovább:

$$\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum(-1)^n\cdot\frac{m!}{(m-n+i_0)!\prod\limits_{k=1}^{n}i_k!\prod\limits_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k}\right]\cdot\alpha^n.$$

Ha most m helyébe $(-m)$-et helyettesítünk és az így nyert sort összevetjük a (32)-vel, eredményünk:

$$C_{nm}(f) = \sum (-1)^{n} \cdot \frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)! \prod_{k=1}^{n} i_k! \prod_{k=1}^{n} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^{n} (f^{(k)})^{i_k}, \tag{43}$$

ahol az összegezést az összes nem negatív i_k egész számokra kell kiterjeszteni, a (40) és (42) megszorítások tekintetbe vételével.

A (43) alatti előállításban szereplő

$$\frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)!} \tag{44}$$

tényező a $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakot veszi fel, ha $(-m)$ negatív egész, mivel a faktoriális függvénynek negatív egész számú helyeken elsőrendű pólusa van. Ilyen esetekben a faktoriálisokkal való (44) jelölés célszerűtlen, mivel a (44) semmi egyebet nem akar kifejezni, mint rövidített írásmódját a

$$\prod_{k=0}^{n-i_0-1} (-m-k)$$

szorzatnak. Ez a szorzat azonban másképp is kifejezhető faktoriálisokkal:

$$\prod_{k=0}^{n-i_0-1} (-m-k) = (-1)^{n-i_0} \cdot \prod_{k=0}^{n-i_0-1} (m+k) = (-1)^{n-i_0} \cdot \frac{(m+n-i_0-1)!}{(m-1)!},$$

s ennek megfelelően a C_{nm}-polinomok második explicit alakja:

$$C_{nm}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(n+m-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^{n} i_k! \prod_{k=1}^{n} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^{n} (f^{(k)})^{i_k} \tag{45}$$

A (45)-ből most már könnyen kapjuk a (33), ill. (34) alapján a K_n és az N_n polinomok explicit alakját is:

$$K_n(f) = \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(n-i_0)!}{\prod_{k=1}^{n} i_k! \prod_{k=1}^{n} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^{n} (f^{(k)})^{i_k},$$

$$N_n(f) = n \cdot \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(n-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^{n} i_k! \prod_{k=1}^{n} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^{n} (f^{(k)})^{i_k}.$$

6. A közelítőformulák hibái

Jelen fejezet célja az iteratív Bernoulli- (15) és Gräffe- (16) képletek, továbbá a Kiss—Gornstein-közelítések (22) hibaképleteinek felállítása. Mindezekre a konvergenciafok megállapítása végett van szükségünk. Ha ugyanis adott

$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

közelítőformulával definiált $\ldots x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots$ értéksorozat meghatározott véges ξ felé konvergál, a Bodewig-féle definíció [1] értelmében akkor nevezzük a $\Phi(x)$ közelítőformulát k-ad fokban konvergensnek, ha a

$$d_{n+1} = x_{n+1} - \xi$$

különbség

$$d_n = x_n - \xi$$

hatványai szerint sorba fejtve, a sor a k-ad fokú taggal kezdődik:

(46) $$d_{n+1} = \Phi(x_n) - \xi = c_0 \cdot d_n^k + c_1 \cdot d_n^{k+1} + \cdots$$

A (46)-ot a $\Phi(x)$ hibaképletének nevezzük. A következőkben x_n helyett a-t írunk, s ennek megfelelően d_n helyett d-t. Tehát

$$d = a - \xi,$$

és

(46′) $$\Phi(a) - \xi = \Phi - \xi = c_0 \cdot d^k + c_1 \cdot d^{k+1} + \cdots$$

A d hatványai szerinti sorfejtések céljából szükségünk van a (15), (16), (22) képletekben szereplő polinomok d hatványai szerinti kifejtésére, tehát előbb ezeket kell levezetnünk.

Általános esetben a ξ tetszőleges multiplicitású zérushelye az $f(x)$-nek; mivel azonban a többszörös gyökök esetével külön foglalkozunk a 7. fejezetben, most feltesszük, hogy ξ csak egyszeres gyök, azaz

(47) $$f(x) = (x - \xi) \cdot g(x),$$

ahol

$$g(\xi) \neq 0.$$

Ha a (47) logaritmusát n-szer differenciáljuk, a (23′) tekintetbevételével eredményünk az egyszerűsítések elvégzése után:

(48) $$N_n(f) = \bar{N}_n(g) \cdot d^n + g^n, \qquad (n > 0);$$

ha pedig a (47)-ből következő

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x - \xi} \cdot \frac{1}{g(x)}$$

egyenlőséget differenciáljuk n-szer a Leibniz-szabály szerint:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{(-1)^k \cdot k!}{(a-\xi)^{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{g}\right)^{(n-k)},$$

és a nyert összefüggésnél a (28) alapján helyettesítünk és egyszerűsítünk, eredményünk:

$$K_n(f) = \sum_{k=0}^{n} K_{n-k}(g) \cdot g^k \cdot d^{n-k}, \tag{49}$$

ahonnét egyszerűen következik a későbbiekben felhasználandó

$$K_n(f) - g \cdot K_{n-1}(f) = K_n(g) \cdot d^n \tag{50}$$

összefüggés.

A három ismertetett képletsorozat hibaképletei ezek után már kevés számítással adódnak:

$$\beta_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)} \cdot f = \frac{d}{N_{n+1}(f)} [N_{n+1}(f) - g \cdot N_n(f)] =$$

$$= \frac{N_{n+1}(g) \cdot d - g \cdot N_n(g)}{N_{n+1}(f)} \cdot d^{n+1}, \qquad (n > 0), \tag{51}$$

$$\gamma_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}} = d - gd \cdot [g^n + N_n(g) \cdot d^n]^{-\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{N_n(g) \cdot d^{n+1}}{g_n} - \binom{-\frac{1}{n}}{2} \cdot \frac{N_n(g)^2 \cdot d^{2n+1}}{g^{2n}} - \dots, \tag{52}$$

$$\varkappa_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{K_{n-1}(f)}{K_n(f)} \cdot f = \frac{d}{K_n(f)} \cdot [K_n(f) - g \cdot K_{n-1}(f)] =$$

$$= \frac{K_n(g)}{K_n(f)} \cdot d^{n+1}. \tag{53}$$

Az (51) és (52) levezetésénél a (48), az (53) levezetésénél az (50) felbontást használtuk fel. Minthogy a (48) csak $n > 0$ esetben érvényes, az (51) is ekkor érvényes. A Bernoulli-közelítésnek 1-es indexű esetétől eltekintve megállapíthatjuk tehát, hogy az ismertetett közelítőképletek konvergenciafoka megegyezik indexükkel. (Az indexek megválasztása éppen akképp történt, hogy az indexek egyszersmind a konvergenciafokot is kifejezzék.)

Az 1-es indexű Bernoulli-képlet

$$\beta_1(a) = a - \frac{f}{f'}$$

konvergenciafoka 2; ez a képlet azonos a Newton—Raphson-formulával, és közös tagja mindhárom képletsorozatnak:

$$\beta_1(a) = \gamma_2(a) = \varkappa_2(a).$$

7. A többszörös gyökök esete

Az előbbi fejezetben azzal a feltételezéssel vezettük le a hibaképleteket hogy a közelítendő gyök egyszeres. Többszörös gyökök esetén, vagyis amikor az

$$f(x) = (x-\xi)^p \cdot g(x), \qquad (p > 1) \tag{54}$$

ill.

$$f = d^p \cdot g$$

felbontások érvényesek, a (48) helyébe az

$$N_n(f) = [N_n(g)\cdot d^n + pg^n]\cdot d^{n(p-1)} \qquad (n > 0) \tag{55}$$

összefüggés, az (50) helyébe pedig a

$$K_n(f) - K_{n-1}(f)\cdot g d^{p-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k-2}{k} \cdot K_{n-k}(g)\cdot g^k \cdot d^{np-k} \tag{56}$$

összefüggés lép. Ha ezekből kiindulva vezetjük le a hibaképleteket, azokból azonnal leolvashatjuk, hogy a három képletsorozat közül egyedül az iteratív Bernoulli-eljárás szolgáltat az indexszel megegyező konvergenciafokú közelítést:

$$\beta_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)}\cdot f = \frac{d}{N_{n+1}(f)}\cdot [N_{n+1}(f) - g\cdot d^{p-1}\cdot N_n(f)] =$$

$$= \frac{d\cdot d^{(n+1)(p-1)}}{N_{n+1}(f)}\cdot [N_{n+1}(g)\cdot d^{n+1} - g\cdot d^n \cdot N_n(g)],$$

azaz

$$\beta_{n+1} - \xi = \frac{N_{n+1}(g)\cdot d - g\cdot N_n(g)}{N_{n+1}(g)\cdot d^{n+1} + p\cdot g^{n+1}}\cdot d^{n+1}, \qquad (n > 0), \tag{57}$$

míg az iteratív Gräffe-, továbbá a Kiss—Gornstein-képletek csupán elsőfokú konvergenciára vezetnek.

A Bernoulli-képletnek ez a különleges sajátsága világossá válik, ha észrevesszük, hogy a Bernoulli-képlet a Kiss—Gornstein-féléből (22) úgy származtatható, hogy benne az f helyébe mindenütt $\frac{f}{f'}$-t helyettesítünk. A (30) felhasználásával ugyanis

$$a - \frac{K_{n-1}\left(\frac{f}{f'}\right)}{K_n\left(\frac{f}{f'}\right)}\,\frac{f}{f'} = a - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)}\cdot f = \beta_{n+1}(a),$$

és $\frac{f(x)}{f'(x)}$ éppen az a függvény, mely az $f(x)$ valamennyi gyökét csupán első hatványon tartalmazza.

Bár az iteratív Gräffe- és a Kiss—Gornstein-eljárások többszörös gyökök esetében csak egyszeres konvergenciafokot eredményeznek, a képleteknek megfelelő átalakításával elérhetjük, hogy a konvergenciafokok az indexekkel kifejezett érték maradjon. Ez az átalakítás abban áll, hogy a képletekben az f helyébe mindenütt a

$$\sqrt[p]{f}=f^{m} \quad \left(m=\frac{1}{p}\right)$$

függvényt helyettesítjük, hiszen ha ξ az $f(x)$-nek p-szeres zérushelye, a $\sqrt[p]{f(x)}$-nek már csak egyszeres zérushelyét képezi. Az

$$(58) \qquad f \to f^{m}$$

helyettesítés a Kiss—Gornstein-képleteknél a következő átalakításhoz vezet (vö. (38)):

$$(59) \qquad \varkappa_{n+1,p}=a-\frac{K_{n-1}(f^{m})}{K_n(f^{m})}\cdot f^{m}=a-\frac{C_{(n-1)m}(f)}{C_{nm}(f)}\cdot f.$$

Ennek speciális esetei néhány alacsonyabb indexre, a (39) felhasználásával:

$$\varkappa_{2,p}=a-\frac{pf}{f'},$$

$$\varkappa_{3,p}=a-\frac{2pff'}{(p+1)f'^2-pff''},$$

$$\varkappa_{4,p}=a-\frac{3p(p+1)f'^2-3p^2ff''}{(2p+1)(p+1)f'^3-3p(p+1)ff'f''+p^2f^2f'''}\cdot f.$$

Az iteratív Gräffe-képletek megfelelő átalakításához szükségünk van a következő összefüggésre:

$$(60) \qquad N_n(f^{m})=m\cdot f^{(m-1)n}\cdot N_n(f).$$

Ezt a (34) és (37) együttes alkalmazásával vezethetjük le a legegyszerűbben. A (60)-at felhasználva most már:

$$(61) \qquad \gamma_{n+1,p}=a-\frac{f^{m}}{\sqrt[n]{N_n(f^{m})}}=a-\frac{f}{\sqrt[n]{mN_n(f)}}=a-\frac{\sqrt[n]{p}f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}.$$

Ugyancsak a (60) felhasználásával mutathatjuk ki, hogy az iteratív Bernoulli-képlet invariáns az (58) helyettesítéssel szemben:

$$\beta_{n,p}=a-\frac{N_{n-1}(f^{m})}{N_n(f^{m})}\cdot f^{m}=a-\frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)}\cdot f=\beta_n.$$

A p-szeres gyökökre módosított (61) közelítés hibaképletét az (55) felbontással nyerhetjük:

$$
(62)\qquad
\begin{aligned}
\gamma_{n+1,p}-\xi &= a-\xi-\frac{\sqrt[n]{p}\cdot f}{\sqrt[n]{N_n(f)}} = d-\sqrt[n]{p}\cdot g d\cdot[pg^n+N_n(g)\cdot d^n]^{-\frac{1}{n}} = \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{N_n(g)\cdot d^{n+1}}{p\cdot g^n}-\binom{-\frac{1}{n}}{2}\cdot\frac{N_n(g)^2\cdot d^{2n+1}}{p^2\cdot g^{2n}}-\dots
\end{aligned}
$$

Az (59) hibaképletének levezetése céljából szükségünk van a $C_{nm}(f)$ polinomok d hatványok szerinti sorfejtésére:

$$
(63)\qquad C_{nm}(f)=\sum_{k=0}^{n} C_{km}(g)\cdot g^{n-k}\cdot d^{np-n+k}.
$$

Ezt az összefüggést az (54) feltételezésből hasonló módon nyerjük, mint a (47)-ből kiindulva a (49)-et. A (63)-nak egyszerű következménye a

$$
C_{nm}(f)-C_{(n-1)m}(f)\cdot g\cdot d^{(p-1)}=C_{nm}(g)\cdot d^{np}
$$

reláció. Ezzel és a (63)-mal az (59) módosítás hibája:

$$
(64)\qquad
\begin{aligned}
\varkappa_{n+1,p}-\xi &= a-\xi-\frac{C_{(n-1)m}(f)}{C_{nm}(f)}\cdot f=\frac{d}{C_{nm}(f)}\cdot[C_{nm}(f)-C_{(n-1)m}(f)gd^{p-1}]= \\
&= \frac{C_{nm}(g)}{C_{nm}(f)}\cdot d^{np+1}=\frac{C_{nm}(g)}{\sum\limits_{k=0}^{n} C_{km}(g)\cdot g^{n-k}\cdot d^k}\cdot d^{n+1}.
\end{aligned}
$$

A (62) és (64) hibaképletekből látható, hogy a módosítások valóban a kívánt konvergenciafokkal rendelkeznek.

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a három tanulmányozott képletsorozat közül egyedül a Bernoulli-közelítés invariáns a gyök többszörösségével szemben, míg a Kiss—Gornstein-, továbbá a Gräffe-közelítések módosítandók aszerint, hogy a közelítendő gyök hányszoros. Míg az eredeti eljárások egyszeres, a módosított eljárások pedig p-szeres gyökök esetében adják az indexekkel kifejezett konvergenciafokot, addig az eredeti eljárások $p(\neq 1)$-szeres gyökök esetében, a módosított eljárások pedig (és ez ugyancsak a már ismert módon könnyen igazolható) $r(\neq p)$-szeres gyökök esetében csupán egyszeres konvergenciafokkal rendelkeznek. Mindez alól kivételt képez a Bernoulli-féle képletsorozat, viszont ennek hátránya, hogy ugyanannyi számolás esetén csak 1-gyel alacsonyabb értékű konvergenciafokot biztosít, mint a két másik módszer.

8. Az F_n és f_n függvények. Kiss módszere

A Bernoulli-képlet (15) a Gräffe-féléből is levezethető azáltal, hogy a (16)-ban szereplő

(65)
$$F_n=\frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}$$

függvényre alkalmazzuk a Newton-eljárást:

$$F_n'=N_n(f)^{-\frac{n+1}{n}}\cdot\left(f'\cdot N_n-\frac{f}{n}\cdot N_n'\right),$$

vagy a (26)-tal:

(66)
$$F_n'=N_n(f)^{-\frac{n+1}{n}}\cdot N_{n+1}(f),$$

és így

$$a-\frac{F_n}{F_n'}=a-\frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)}\cdot f=\beta_{n+1}.$$

Mindezt azzal a meggondolással tehettük, hogy ahol az $f(x)$-nek zérushelye van, ugyanott általában az $F_n(x)$ függvénynek is zérushelye van, tehát az eredeti

$$F_0(x)=f(x)$$

függvény helyett bármely más $F_n(x)$ $(n>0)$ függvényből is kiindulhatunk, azt helyettesítve be az egyszerű Newton—Raphson-formulába. Egyúttal a (65) és (66) egybevetésével az is világos, hogy az F_n függvények kielégítik az

(67)
$$F_{n+1}=\frac{F_n}{\sqrt[n+1]{F_n'}}$$

rekurzív formulát.

A Kiss—Gornstein-féle (22) képletek levezetésére is hasonló módszert keresve, azt megtaláljuk az

(68)
$$f_n=\frac{f}{\sqrt[n]{K_{n-1}(f)}}$$

függvények alkalmazásával. Ha ugyanis az így definiált f_n függvényre alkalmazzuk a Newton-eljárást, akkor épp a Kiss—Gornstein-formulához jutunk:

$$f_n'=K_{n-1}^{-\frac{n+1}{n}}\cdot\left(f'\cdot K_{n-1}-\frac{f}{n}\cdot K_{n-1}'\right),$$

vagyis a (29)-cel:

(69)
$$f_n'=K_{n-1}^{-\frac{n+1}{n}}\cdot K_n,$$

és így

(70)
$$a-\frac{f_n}{f_n'}=a-\frac{K_{n-1}}{K_n}\cdot f=\varkappa_{n+1}.$$

A (68) és (69) összehasonlításával az is kiadódik, hogy az f_n függvények is kielégítik a (67) rekurziós formulát:

$$f_{n+1}=\frac{f_n}{\sqrt[n+1]{f_n'}},$$

csakhogy míg $F_0=f$, addig $f_1=f$, tehát a két függvénysorozat a kezdőindexekben különbözik egymástól.

A Kiss-féle módszer a (70) levezetéséhez kapcsolódik. KISS I. szukcesszív módon jut az egyre magasabb konvergenciafokú képletekhez. Ennek a módszernek egy láncszemét a következőképp lehet vázolni.

Eljutottunk az n-ik konvergenciafokú képlethez:

$$x_n=a-\frac{K_{n-2}}{K_{n-1}}\cdot f.$$

A jobboldal nevezőjében szereplő polinomot felhasználva, most a (68) helyett a

$$\varphi_n=\frac{f}{\sqrt[n]{K_{n-1}(f)}}$$

definícióval konstruálunk új függvényt és erre alkalmazzuk a Newton-eljárást:

$$a-\frac{\varphi_n}{\varphi_n'}=a-\frac{K_{n-1}}{L_n}\cdot f, \tag{71}$$

ahol

$$L_n=f'\cdot K_{n-1}-\frac{1}{2}f\cdot K_{n-1}'.$$

Az ily módon nyert „hibás“ képlet (71) konvergenciafoka általában csak 2, hiszen a „helyes“ (70) képlettől különbözik, minthogy nevezőjében az L_n polinomot tartalmazza a helyes K_n polinom helyett. Az L_n és a K_n-polinomok azonban csak az f-től független együtthatókban különböznek egymástól; a helyes együttható-értékek a határozatlan együtthatók módszerével nyerhetők abból a követelésből kiindulva, hogy a (71) helyére lépő „helyes“ képlet konvergenciafoka $(n+1)$ legyen.

9. A Gornstein-féle módszer*

M. S. GORNSTEINnek 1951-ben megjelent dolgozatában [2] ismertetett módszere egy előírt módon szerkesztett

$$\varphi_\nu(x;a)$$

függvényből indul ki, mely az $f(x)=0$ egyenlet egyik ξ valós gyökének elég kis környezetében van értelmezve, mind az x, mind az a változóját illetően.

* Gornstein eredeti jelöléseitől bizonyos mértékben eltérnek az itt alkalmazott jelölések.

A $\varphi_\nu(x;a)$ függvény szerkezete a következő:

$$\varphi_\nu(x;a)=x-f(x)\cdot\sum_{k=0}^{\nu}h_k(a)\cdot x^k, \tag{72}$$

ahol a csupán a-tól függő h_k együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy a

$$\varphi_\nu^{(k)}(a;a)=0 \qquad (k=1,2,\dots \nu+1) \tag{73}$$

egyenletek teljesüljenek (differenciálás az x szerint történik). A (73) egyenletrendszer fennállásából azonnal következik, ha a $\varphi_\nu(x;a)$ függvényt $(x-a)$ hatványai szerint sorbafejtjük, hogy

$$\varphi_\nu(x;a)=\varphi_\nu(a;a)+r_\nu(x;a), \tag{74}$$

ahol

$$r_\nu(x;a)=\frac{1}{(\nu+2)!}\varphi_\nu^{(\nu+2)}\big(a+\vartheta\cdot(x-a);a\big)\cdot(x-a)^{\nu+2}, \quad (0\leq\vartheta\leq 1). \tag{75}$$

A (74) sorfejtés és a maradéktag (75) alakja a hibabecslés céljaira szolgálnak.

A (73) egyenletrendszer a $h_k(a)$ együtthatókra lineáris egyenletrendszert szolgáltat; ennek megoldásával a $h_k(a)$ együtthatókat, mint a Gornstein-féle Γ-determinánsok hányadosait nyerjük:

$$h_k(a)=\frac{\Gamma_{\nu,k}(a)}{\Gamma_\nu(a)}. \tag{76}$$

A Γ-determinánsok az f függvényen és ennek deriváltjain keresztül is függenek az a-tól. A következőkben célul tűzzük ki egyrészt ezen determinánsoknak ismert polinomok segítségével történő előállítását, másrészt annak megmutatását, hogy a Gornstein-módszerrel nyert $\varphi_\nu(x;a)$ iteratív függvénynek az

$$x_{n+1}=\varphi_\nu(x_n;x_n)$$

egyenlet szerinti alkalmazása azonos a (22) képlet alkalmazásával.

Kiindulunk a (27) sorfejtésből:

$$\frac{f(a)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}K_k\cdot\alpha^k, \qquad (K_0=1)$$

ahonnét

$$\left(\alpha-\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\cdot\frac{f(a)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}K_k\cdot\left(\alpha-\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\cdot\alpha^k=$$

$$=-\frac{1}{K_n}\cdot\left[K_{n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}K_{n-1}K_k-K_nK_{k-1})\,\alpha^k\right].$$

Alkalmazva a

$$G_{nk}=\frac{1}{f^k}(K_{n-1}K_k-K_nK_{k-1}) \qquad (k>0) \tag{77}$$

és

$$G_{n0} = K_{n-1} \qquad (n > 0)$$

rövidítést, a fenti sorfejtés a következő egyszerű alakot ölti:

$$(78) \qquad \left(\alpha - \frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\frac{f(a)}{f(x)} = -\frac{1}{K_n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} G_{nk}\cdot(a-x)^k.$$

A (77)-ből következik, hogy

$$G_{nn} \equiv 0,$$

tehát a (78)-ból az $(a-x)^n$-t tartalmazó tag hiányzik. Célszerű a sort itt kettébontani, és az első n tag összeadásából nyert sort külön betűvel (Q_n) jelölni:

$$(79) \qquad Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} G_{nk}\cdot(a-x)^k.$$

Ezzel az új jelöléssel:

$$\left(\alpha - \frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\cdot\frac{f(a)}{f(x)} = -\frac{Q_n}{K_n} - \frac{1}{K_n}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty} G_{nk}\cdot(a-x)^k,$$

vagy átrendezve $\left(\alpha = \frac{a-x}{f(a)}\right)$:

$$(80) \qquad x - \frac{Q_n}{K_n}\cdot f(x) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n}\cdot f(a) + \frac{f(x)}{K_n}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty} G_{nk}\cdot(a-x)^k.$$

Vessük össze a (80)-t a (72), (74) és (75) összefüggésekkel, azonnal kiadódnak az alábbi identifikációk:

$$\nu = n - 1,$$

$$(81) \qquad \varphi_\nu(x; a) = x - \frac{Q_n}{K_n}\cdot f(x),$$

$$(82) \qquad \varphi_\nu(a; a) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n}\cdot f(a),$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} h_k(a)\cdot x^k = \frac{Q_{\nu+1}}{K_{\nu+1}},$$

ez utóbbiból és a (76)-ból pedig:

$$(83) \qquad \Gamma_\nu(a) = \lambda_\nu\cdot K_{\nu+1}\,[f(a)],$$

és

$$\sum_{k=0}^{\nu} \Gamma_{\nu,k}(a)\cdot x^k = \lambda_\nu\cdot Q_{\nu+1},$$

majd ebből a (79) figyelembevételével

(84) $$\Gamma_{\nu,k}(a) = (-1)^k \cdot \lambda_\nu \cdot \sum_{h=0}^{\nu-k} \binom{h+k}{k} \cdot G_{(\nu+1)(h+k)} \cdot a^h.$$

Itt λ_ν egy — egyébként érdektelen — numerikus faktort jelent. A (83) és (84) összefüggésekkel a Γ-determinánsokat sikerült visszavezetni a K_n-polinomokra, a (81)-ből és (82)-ből viszont azonnal felismerhető, hogy Gornstein módszere $x=a$ választásával azonos lesz a Kiss-félével.

A G_{nk}-polinomok könnyebb kiszámítása céljából végül közöljük rekurziós képletüket is:

(85) $$G_{nk} = \frac{1}{f} \cdot \sum_{h=1}^{k} (-1)^{h-1} \cdot \frac{f^{(h)}}{h!} G_{n(k-h)}, \ (k>1),$$

melyhez kiindulásként hozzáveendő a (77)-ből nyerhető

$$G_{n1} = \frac{1}{f}(f' . K_{n-1} - K_n)$$

összefüggés. A (85) könnyen következik a (77)-ből, ha tekintetbe vesszük a K_n-polinomok rekurziós képletét (20).

10. A konvergencia-sugár becslésén alapuló módszer

A közelítőformulák levezetésére eddig ismertetett módszereken kívül figyelmet érdemel még az a módszer, mely a konvergencia-sugár becslésén alapszik. Feltételezve ugyanis, hogy az

(86) $$S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

végtelen sor két egymást követő együtthatójának hányadosa véges határérték felé tart:

(87) $$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = q \ (\neq 0),$$

az x megfelelő előjelválasztásával elérhető, hogy a (86) sor bizonyos véges n indextől kezdve csupa egyenlő előjelű tagból álljon, s így alkalmazhatjuk rá az ismert konvergenciakritériumokat. A (86) sor konvergál vagy divergál, aszerint, hogy

(88) $$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} \cdot x^{n+1}}{c_n \cdot x^n} < 1, \text{ vagy } > 1,$$

illetőleg

(89) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n x^n} < 1, \text{ vagy } > 1.$$

A konvergenciasugár (ϱ) értéke pontosan leolvasható a (88), illetve (89) összefüggésekből:

(90)
$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

vagy

(91)
$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} \right|.$$

Feltételezve, hogy $f(x)$ analitikus, továbbá, hogy az

$$f(x) = 0$$

egyenletnek az $x = a$ hely környezetébe eső legközelebbi gyöke ξ, a (24) és (27) sorok konvergenciasugara szükségképpen

$$\varrho = \left| \frac{a-\xi}{f(a)} \right|.$$

Ennek megfelelően, hacsak (vö. (87)) a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{K_{n-1}}, \text{ illetőleg a } \lim_{n\to\infty} \frac{N_{n+1}}{N_n}$$

határérték létezik és véges, a (90)-ből és (91)-ből következik, hogy

(92)
$$\frac{a-\xi}{f(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{K_{n-1}}{K_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{N_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{N_n}}.$$

Véges n értéknél megállva, a nyert összefüggések alkalmasak a konvergenciasugár, s így a gyök helyzetének jó közelítéssel való becslésére, és a három tárgyalt képletsorozatot eredményezik. A (92)-nél az előjelválasztás helyessége a hibaképletekből (vö. 6. fejezet) tűnik ki.

IRODALOM

[1] E. Bodewig: Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. ZAMM **29** (1949), 45.

[2] M. S. Gornstein: Az egyenletek numerikus megoldásáról (oroszul). Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 78. 193. (1951).

[3] I. Kiss: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine. Acta Technica Hung. Tomus VIII. Fasc. 3—4, Bp. 1954.

[4] R. Ludwig: Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. ZAMM **34** (1954), 210 és 404.

Tartalmi összefoglaló

A szerző jelen dolgozatában azokat a vizsgálatokat folytatja, melyeket az irodalomban feltüntetett cikkekben az iteratív közelítőeljárások elméletének kidolgozása során elkezdtek. Az eddig ismert Kiss—Gornstein-féle

$$\varkappa_{n+1}(a) = a - \frac{K_{n-1}(f)}{K_n(f)} \cdot f$$

képletsorozaton kívül még két újabb képletsorozat, éspedig az iteratív Bernoulli-

$$\beta_{n+1}(a) = a - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)} \cdot f$$

és az iteratív Gräffe-

$$\gamma_{n+1}(a) = a - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}$$

eljárás ismertetésére is sor kerül, mely utóbbiak az algebrai egyenletek numerikus megoldására szolgáló, ismert Bernoulli-, ill. Gräffe-módszerek képleteinek iteratív használatra alkalmas átírásából származnak.

A három képletsorozatot párhuzamosan tárgyaljuk. A dolgozatban választ kapunk a következő problémákra:

1. A képletekben szereplő polinomok alaki viszonyai, tekintettel a könnyebb kiszámíthatóságra,

2. A képletek „konvergencia-foka" egyszeres és többszörös gyökök esetén; a képletek szükséges átalakítása többszörös gyök esetén ahhoz, hogy a konvergencia-fok ne változzék,

3. A három képletsorozat egymásból való leszármaztatása.

A felsoroltakon kívül az egyes képletsorozatok különféle lehetséges származtatásai egészítik ki a dolgozat anyagát, s ennek során rátérünk a Kiss-féle és a Gornstein-féle módszerek ismertetésére is, és megmutatjuk, hogy a két módszer ugyanazon képletsorozathoz vezet.

A LAPLACE-FÉLE KIFEJTÉSI TÉTEL EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA

GÁSPÁR GYULA

Az alábbiakban bemutatjuk a determinánselmélet *Laplace*-féle kifejtési tételének [1] egy új bizonyítását, amelyik a determináns axiomatikus bevezetésére általunk [2] adott alaptulajdonságok felhasználása révén nyerhető.

Először is ismertetjük a használandó jelöléseinket.

$\mathfrak{R} = a, b, \ldots$ végtelen integritástartomány, amelynek zérusát 0, egységelemét 1 jelöli.

$\mathfrak{R}_n = A, B, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ feletti n^2 rangú teljes mátrixgyűrű, amelynek egységmátrixát $E^{(n)}$, zérusmátrixát $O^{(n)}$ jelöli.

$P_\pi \in \mathfrak{R}_n$ a $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ permutációhoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető oly (p_{ik}) mátrix, amelyben $p_{\nu k_\nu} = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, a többi elem pedig zérus.

$E_{ik}(a) \in \mathfrak{R}_n$ oly mátrix, amelyet az $E^{(n)} = (\delta_{ik})$ egységmátrixból úgy nyerünk, hogy az $E^{(n)}$ δ_{ik} eleme helyébe az $a \in \mathfrak{R}$ elemet tesszük, többi elemét pedig változatlanul hagyjuk.

$A^{i_1 \ldots i_q}_{k_1 \ldots k_q}$ az A q-adrendű minormátrixa, amelyik az $i_1 < \cdots < i_q$, illetve $k_1 < \cdots < k_q$ indexű sorok, illetve oszlopok alapján van képezve. Ennek megfelelően $A^{i_{q+1} \ldots i_n}_{k_{q+1} \ldots k_n}$ jelöli a kiegészítő minormátrixot $(i_{q+1} < \cdots < i_n;\ k_{q+1} < \cdots < k_n)$.

Az A és B mátrixok *sorkombináció*ja minden olyan $C \in \mathfrak{R}_n$ mátrix, amelyben az i-ik sort vagy az A vagy a B mátrix i-ik sora alkotja $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Hasonlóan értelmezzük az A és B mátrix oszlopkombinációját.

A determináns az $\mathfrak{R}_n$-nek az $\mathfrak{R}$-be való oly nem állandó φ leképezéseként értelmezhető,[1] amelyik kielégíti az alábbi axiómákat:

(a) $\varphi(A + B) = \Sigma \varphi(C)$,

(b) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$,

(c) $\varphi(aA) = a^n \varphi(A)$, $(a \in \mathfrak{R})$,

[1] l. id. munkánk 257. Itt zéruskarakterisztikájú test szerepel az $\mathfrak{R}$ végtelen integritástartomány helyett. A tétel azonban a bizonyítás megfelelő módosításával erre az esetre is kiterjeszthető.

ahol az (a)-ban az összegezés kiterjesztendő az A és B mátrixok összes sor- vagy oszlopkombinációira.

E tulajdonságokból következik[2]:

(1) $\varphi(A)=0$ minden oly $A\in\mathfrak{M}_n$ mátrixra, amelynek (legalább) egy zérusokból álló sora vagy oszlopa van.

(2) $\varphi(E_{ik}(a))=1$, ill. a aszerint, hogy $i\neq k$, ill. $i=k$.

(3) $\varphi(P_\pi)=1$, ill. -1 aszerint, hogy π páros, ill. páratlan permutáció.

A *Laplace*-féle kifejtési tétel tárgyalására áttérve, ez így fogalmazható meg az $i_1<\cdots<i_q$ indexű sorokra nézve:

$$\varphi(A)=\sum\pm\varphi(A^{i_1\ldots i_q}_{k_1\ldots k_q})\varphi(A^{i_{q+1}\ldots i_n}_{k_{q+1}\ldots k_n}), \tag{4}$$

ahol $i_1<\cdots<i_q$ (tehát $i_{q+1}<\cdots<i_n$ is) rögzített, az összegezés pedig kiterjesztendő az $1,2,\ldots,n$ számok összes $k_1<\cdots<k_q$ kombinációira, az összegben az egyes tagok előjele $+$, ill. $-$ aszerint, hogy az

$$\begin{pmatrix} i_1\ldots i_q & i_{q+1}\ldots i_n \\ k_1\ldots k_q & k_{q+1}\ldots k_n \end{pmatrix}$$

permutáció páros vagy páratlan.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az $n=4$, $i_1=2, i_2=3$ esetre szorítkozunk, de az egyes bizonyításokat oly módon végezzük el, hogy azok az általános esetbe is betekintést engedjenek.

Először is vegyük tekintetbe, hogy az $A=(a_{ik})$ mátrix i-ik sorára nézve áll a következő kifejtés:

$$\varphi(A)=\sum_{\nu=1}^{4}a_{i\nu}\varphi(A_{i\nu}), \tag{5}$$

ahol az $A_{i\nu}$, $(\nu=1,2,3,4)$ mátrix az A mátrixból úgy keletkezik, hogy ennek $a_{i\nu}$ eleme helyébe az 1 elemet, az i-ik sor és ν-ik oszlop minden más eleme helyébe a zérust tesszük, a többi elemet pedig változatlanul hagyjuk.

Ugyanis legyen pl. $i=1$. Ekkor az

$$A_0=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mátrixokra alkalmazva az (a)-t, kapjuk az (1) figyelembevételével:

$$\varphi(A_0+B)=\varphi(A)=\varphi(A_0)+\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

[2] l. id. munkánk (d), ill. (2), (3), ill. (4).

Ámde itt

$$\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

amint ez az (a)-nak az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

összegre való (oszloponkénti) alkalmazásával azonnal következik az (1) tekintetbevételével.

Ha most ezt az eljárást folytatjuk az A_0 első sorára nézve, akkor az (5)-öt kapjuk $i=1$ esetén, ha még figyelembe vesszük, hogy a (b) és (2) révén

$$\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \varphi\left(\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\right) = a_{11}\varphi\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

stb. következik. Hasonló tétel áll az oszlopokra nézve is.

Most bizonyítjuk a következő képletet:

$$(6)\qquad \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \varphi\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \varphi\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+\varphi\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} + \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

E célból alkalmazzuk az (a)-t a következő összegre:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ekkor a fellépő $2^4 = 16$ számú tag közül — oszlopkombinációkat véve — mindössze legfeljebb $\binom{4}{2} = 6$ számú tag (éppen a (6) jobboldalán szereplő tagok) lesz zérustól különböző. Ti. azok a tagok, amelyek „négyzetesen kiegészítő elhelyezkedésben“ tartalmazzák az A mátrix elemeit, ill. P_π mátrixokkal balról, illetve jobbról szorozva ilyen alakra hozhatók. Itt a „négyzetesen kiegészítő elhelyezkedés“-en azt értjük, hogy e mátrix alakja:

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

ahol az A_1, ill. A_2 négyzetes mátrixok tartalmazzák az A-ból kiválasztott elemeket. — E tagok akkor keletkeznek, ha az első és a második mátrixban A-ban levő elemmel kezdődő, összesen négy oszlopból alkotunk kombinációkat. Ugyanis a többi mátrixnál mindig van olyan oszlop, amelyre az (5)-öt alkalmazva, a φ értéke zérus, ha még figyelembe vesszük az (1)-et is. Pl.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

esetén a jelzett transzformáció után az

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{43} \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, s ennél a φ értéke utolsó oszlop szerinti kifejtése esetén zérus.

Határozzuk most meg pl. a

$$\varphi \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} = \varphi(A_6)$$

tag értékét.

E célból vegyük tekintetbe a

$$P_{3124} A_6 P_{3142} = \begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & E^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{(2)} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix}$$

összefüggést, s erre alkalmazzuk a (b)-t. Ekkor kapjuk a (2) révén:

$$\varphi(A_6) = -\varphi \begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & E^{(2)} \end{bmatrix} \varphi \begin{bmatrix} E^{(2)} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix}.$$

Egyúttal vegyük tekintetbe azt is, hogy a $\varphi(P_{3124})\varphi(P_{3142})$ szorzat egyenlő a $\varphi(P_{3142}^{-1})\varphi(P_{3124})$ szorzattal (a megfelelő permutációk páros, ill. páratlan voltának a figyelembevételével), végül ez egyenlő $\varphi(P_{1243})$-mal, ahol a P_{1243} mátrix az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutációhoz tartozik, miként a tétel idevonatkozó része kívánja. Ha most ezt az eljárást a (6)-ban szereplő minden tagnál véghezvisszük, akkor a *Laplace*-féle kifejtési tételt kapjuk $n = 4$, $i_1 = 2$, $i_2 = 3$ esetén, ha még figyelembe vesszük, hogy

$$\varphi \begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & E^{(2)} \end{bmatrix} = \varphi(A_{24}^{23}), \ \varphi \begin{bmatrix} E^{(2)} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix} = \varphi(A_{13}^{14}) \text{ stb.}$$

fennáll, amint erről a φ kifejtett alakjára[3] való áttérés révén azonnal meggyőződhetünk.

IRODALOM

[1] LAPLACE, P. S. Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. *Histoire de l'académie des sciences de Paris,* 1772.

[2] GÁSPÁR, J. Eine neue Definition der Determinanten. *Publ. Math. Debrecen,* 3 (1954), 257—260.

[3] l. id. munkánk befejező eredményét

KÖNYVISMERTETÉSEK

Gombás Pál: „Az atom statisztikus elmélete és alkalmazásai" című könyvének ismertetése

A modern kvantumelmélet legnagyobb eredményei közé tartozik az atomfizikai többtestprobléma sikeres megoldása, mert a régi kvantumelmélet éppen ezen a téren mondott teljesen csődöt. Az atomfizikai többtestprobléma alapegyenletének a többtest Schrödinger-egyenletnek megoldására közelítő módszereket használunk, mert egzakt megoldás a legritkább esetben adható meg. A leghasználatosabb módszerek a perturbációszámítás, a variációs módszer, a „self consistent field" módszer és a statisztikus módszer. Míg az első két módszert csupán aránylag kevés részecske esetében alkalmazták sikerrel, a „self consistent field" módszer és a statisztikus módszer sok részecskéből álló rendszerek esetén is sikerrel kiállotta a próbát. A statisztikus módszer nagy előnye a „self consistent field" módszerrel szemben az, hogy nem kívánja meg nagy és költséges számológépek alkalmazását, hanem kézi és kisebb kapacitású mechanikus-elektromos számológépekkel is értékes eredményeket lehet vele produkálni.

A statisztikus módszer már a kvantumelmélet kezdeti éveiben kifejlődött és megmutatta képességeit. A módszer kifejlesztése főleg FERMInek és tanítványainak munkája, ők nemcsak a módszer elvi részét dolgozták ki, hanem számos atomfizikai problémára is alkalmazták. Magyarországon főleg GOMBÁS PÁL munkássága volt döntő a statisztikus módszer elterjedése szempontjából. Ő és tanítványai a statisztikus módszert kiterjesztették a szilárd testek és molekulák elméletének széles körére és a statisztikus elméletet olyan alakra hozták, hogy az nemcsak az atomfizikai tulajdonságok áttekintő kvalitatív értelmezésére, hanem sok tulajdonság kvantitatív értelmezésére is alkalmas. Az utóbbi fél évtizedben a statisztikus módszer világszerte újra virágzásnak indult s ebben az örvendetes eseményben igen nagy része van GOMBÁS könyvének.

A könyv I. fejezete a statisztikus módszer felépítéséhez szükséges általános alapelveket ismerteti. A módszer, bár kifejezetten hullámmechanikai közelítő módszer, a hullámmechanika bonyolult matematikai apparátusából csak igen keveset használ fel. Lényegében a szabad elektrongáz fázistérbeli viselkedését meghatározó Fermi—Dirac-statisztikát és a szabad elektronok kölcsönhatási energiáiból a klasszikusan tárgyalható Coulomb-energiát és a nem klasszikus kicserélődési és korrelációs energiákat ismerteti.

A II. fejezet a Thomas—Fermi-féle statisztikus modellel foglalkozik. Ez a fejezet és a benne szereplő problémák a könyv centrális részét képezik. A szerző a problémák megoldását több oldalról mutatja be. Először egy preciziós variációs levezetést ad, de megmutatja, hogy igen szemléletes módon is le lehet vezetni a statisztikus módszer alapegyenletét, a Thomas—Fermi egyenletet. A módszer egy nyilvánvaló hátrányának az elektronok elektrosztatikus sajátenergiájának kiküszöbölésére FERMI és AMALDI az elektronfelhő teljes elektrosztatikus energiájának egy elektronra eső részét levonják. A korrekció igen egyszerűen hajtható végre és nagyon hasznos, mert olyan statisztikus atommodell is értelmezhető a segítségével, melyben negatív ionok is stabilisak.

A statisztikus módszert többen bővítették a hullámmechanika figyelembevételével. Ezek közül legjelentősebb a kicserélődési energia figyelembevétele, melyet DIRAC végzett el. A korrelációs energia, bár a teljes energiát kisebb mértékben befolyásolja, mint a kicserélődési energia, sűrűségeloszlásra, különösen az atom szélén jelentős befolyással van és így sok atomtulajdonság számításánál jelentős a figyelembevétele. GOMBÁS újabb dolgozatai megmutatták, hogy a kinetikus energia hullámmechanika alapján való helyesbítése olyan statisztikus módszerre vezet, mely mentes sok, az előző modellekben található speciális, a hullámmechanikában meg nem szokott tulajdonságtól. Sajnálatos, hogy ebben a könyvben nincsenek ezek az újabb fejlemények ismertetve, hanem csak a régibb Weizsäcker-féle felfogásban van tárgyalva a bővítés. A III. fejezet végén található még a statisztikus atommodellnek a mellékkvantumszám szerinti csoportosítással való bővítése, a relativisztikus korrekció és a magas hőmérsékletekre korrigált alapegyenlet, melynek megoldásai a fúziós atomenergia felszabadításánál játszottak igen érdekes szerepet. Ebben a fejezetben kapott helyet a statisztikus atommodellnek és a hullámmechanikai „selfconsistent field" módszernek összefüggéseit tárgyaló rész is.

A IV. fejezetben a statisztikus perturbációs módszereket dolgozza ki a szerző és így lehetővé teszi, hogy nem centrálszimmetrikus problémák is tárgyalhatók legyenek.

A statisztikus módszer továbbfejlesztésére két főbb út áll nyitva. Felhasználható a statisztikus módszer hullámmechanikai problémák egyszerűsítésére. Ennek egyik legszebb példáját adja a könyv a Pauli-elv következményeképpen fellépő energianövekedésnek statisztikus úton való figyelembevételével foglalkozó részben. A másik lehetőséget az elektrongáz nem sztatikus tárgyalása szolgáltatja.

A könyv második része megmutatja, hogyan lehet a statisztikus módszer segítségével az anyag szerkezetét értelmezni és sok anyagi állandót kiszámítani. Több esetben statisztikus módszerrel a problémák megoldását egyszerre lehet megkapni a periódusos rendszer összes elemeire, ami különösen olyan sajátságok vizsgálatánál teszi felbecsülhetetlenné a módszert, melyek a rendszámmal folytonosan változnak. Sok esetben pedig a statisztikus módszernek a hullámmechanikával való összekapcsolása vezet igen jó kvantitatív eredményekre.

A VII. fejezetben a könyv az atomok tulajdonságainak értelmezésével foglalkozik. Meglepően sok atomtulajdonság értelmezésére használták fel a statisztikus módszert. Számítottak ionizációs energiákat, közepes gerjesztési energiákat, atom- és ionsugarakat, diamágneses szuszceptibilitásokat, polarizálhatóságot, röntgen- és elektronsugár szóróképességet, fékezőképességet stb. Ki szeretnénk emelni azonban a statisztikus módszer három alkalmazását, mely utolérhetetlen szépséggel mutatja a módszer átfogó erejét. Elsőnek említsük meg, hogy az elemek periódusos rendszerében bizonyos tulajdonságok rendszeresen ismétlődnek. Az egyes periódusok hosszát, kialakulását már a régi Bohr-féle kvantumelmélet alapján sikerült kvalitatíve értelmezni. Egyes periódusok hossza, bár kevéssé, de eltér ez elméletileg előre jósolt periódushossztól. A statisztikus elmélet alapján meg lehet mutatni, hogy ennek okozója az atom sajátos potenciáleloszlása, mely atomról atomra változik és a statisztikus módszerrel jól megadható. Az atomspektrumokkal kapcsolatos számítások jó példát mutatnak a hullámmechanika és a statisztikus módszer egészséges összekapcsolására. Végül a ritka földfémek csoportjának elmélete rámutatott arra, hogy a 4 f és 5 f héjak stabilizálódása szükségképpen következik be a 6 s és a 7 s héjak betöltődése után, s így nagyban elősegítette a transzuránokra vonatkozó kísérleti vizsgálatokat.

A molekulákat tárgyaló VII. fejezetben a heteropoláros molekulákkal foglalkozó rész a statisztikus perturbációszámítást használja fel. Meglepő, hogy ilyen egyszerű eszközökkel milyen átfogó eredmény kapható. Több molekula egyensúlyi rácsállandóját, rácsenergiáját határozza meg és mély betekintést nyújt az egyensúlyi állapot energiaviszonyaiba. A homöopoláros molekulára alkalmazható Hund-módszert is ismerteti. A statisztikus atomelméletnek ez a része a könyv megjelenése óta nagy fejlődésen ment keresztül, de ebbe a témakörbe a legjobb bevezetőnek ma is a könyv idevágó része tekinthető.

A kristályok modern elmélete a Fermi—Dirac-statisztika felfedezésével került biztos alapra. Ma is minden elmélet, amelyik a kötési energiára, egyensúlyi rácstávolságra, kompresszibilitásra stb. egyszóval a kristály atomfizikai állandóira kvantitatív számítást akar végezni, szükségképpen felhasználja a statisztikus elmélet eredményeit. A statisztikus módszer egyaránt alkalmas az ionkristályok és fémek elméletének megalkotására. Az ionkristályok statisztikus elméletét JENSEN dolgozta ki, míg a statisztikus fémelmélet alapjait GOMBÁS rakta le. Mindkét elmélet aránylag könnyű kézi számológépekkel is elvégezhető számításokra vezet és jó betekintést nyújt az egyensúlyi állapotot meghatározó erők természetébe.

Geofizikai és csillagászati alkalmazásai miatt igen nagy jelentőségű a nagy nyomás alatt levő anyag viselkedésének tanulmányozása. Kísérletileg laboratóriumokban napjainkban több százezer atmoszféra nyomás alatt álló anyag viselkedését tanulmányozzák. A statisztikus módszer lehetőséget ad arra, hogy millió atmoszférán felül eső nyomásoknál is tanulmányozhassuk az anyag viselkedését. A IX. fejezet igen érdekesen foglalja össze az ez irányban folytatott munkákat, sőt SLATER és KRUTTER tévesen interpretált eredményeit helyesen kiértékelve jelentősen ki is egészíti azokat.

A Függelékben kaptak helyet a Thomas—Fermi- és a Thomas—Fermi—Dirac-egyenletek megoldásai, a WKB-módszert ismertető és a statisztikus atomok és ionok kölcsönhatási energiájának numerikus kiszámításával foglalkozó részek. A könyvet jól használható táblázatok, név- és tárgymutatók egészítik ki.

GOMBÁS könyve először a bécsi Springer-kiadó kiadásában jelent meg 1949-ben német nyelven. A Szovjetunióban orosz nyelvre lefordítva szintén megjelent és több kiadást ért meg. Az Akadémiai Kiadó kiadásában most magyar nyelven is az olvasótábor elé lép. Várható, hogy sokan választják az ezen könyv által mutatott utat atomfizikai tanulmányaik bevezetőjéül, mert a módszer matematikai eszközei lényegesen könnyebbek a kvantum-mechanikáénál. Modelljei igen szemléletesek. Az előbb említett oknál fogva különösen ajánlható a könyv mérnököknek, vegyészeknek és más kutatóknak, akiknek nem hivatásuk a fizikával való foglalkozás, de elméleti, vagy gyakorlati munkájuk során az atomfizikával érintkezésbe kerültek. Végül említsük meg, hogy GOMBÁS könyve a statisztikus atomfizika mai napig egyetlen modern monográfiája s fiatal kutatóink is nagy haszonnal forgathatják, mert segítségével egy modern és még kellően ki nem aknázott kutatási ágba dolgozhatják be magukat.

Gáspár Rezső
a fizikai tudományok doktora

Sz. I. Vavilov: „A fény mikrostruktúrája" című könyvének ismertetése

A hazai optikai irodalom gazdagítását minden szakember és érdeklődő örömmel üdvözli, különösen, ha az olyan módon történik, hogy egy világhírű fizikus könyve jelenik meg magyar nyelven és ez a könyv nem az optikai tudományok általános ismeret-anyagát, nem a „köznapi" optikát tárgyalja, hanem a jelenségek mélyebb és finomabb analízise útján egyrészt újabb, másrészt egzaktabb ismereteket tár elénk.

VAVILOVnak a könyvben ismertetett, 30 éven át folytatott munkássága az optikai tudományok fejlődésében új utakat nyit. Az optikában általában a fényforrásokat és fényáramokat három adattal szokták jellemezni: a sugárzás erősségével, színképi eloszlásával és polarizációs állapotával. Ezek a jellemzők azonban gyakorlatilag csak akkor elegendők, ha a fényforrás nagyméretű, a sugárzás energiája viszonylag nagy és az észlelési idő hosszú.

Ha gyakorlati vagy elvi kísérleteinkben igen kis intenzitásokkal dolgozunk, előtűnik „a fény mikrostrukturája", amelynél nem a nagy energia vagy a hosszú idő következtében előállott átlag értékeket kell figyelembe vennünk. Kis intenzitású fényjelenség esetén észrevehetővé válik a fényáram kvantumos ingadozása, az elemi sugárzók természete, az elemi sugárzók közvetlen kölcsönhatása. Ez már a „mikrooptika" területe. VAVILOV szerint a mikrooptika körébe vág a fény anyaggá való átalakulása és még „számos, az optika legfontosabb kérdései közé tartozó probléma", amelyet a fejlődése első stádiumában levő tudományág van hivatva megoldani.

A mű három fő részre oszlik.

Az első rész a fény kvantum-ingadozásainak kísérleti vizsgálatával foglalkozik. Itt főképpen azokat a vizuális módszereket írja le, amelyek egyszerű eszközökkel, de elvileg kifogástalan megoldásban igen érdekes eredményeket tárnak fel a fény kvantum-ingadozásait illetően. A kísérletekből megállapítható volt nemcsak az ingadozás ténye, hanem a szem több eddig ismeretlen tulajdonsága. Különösen részletesen foglalkozik ez a rész a szem fotonszámban kifejezett küszöb-érzékenységével. Aránylag rövid leírást kapunk az egy fénynyalábból szétválasztott koherens és poláris nyalábok fluktuációs viselkedéséről. Az első rész ezzel a végkövetkeztetéssel zárul: „Minden elég kis intenzitású különválasztott fénynyalábban intenzitásbeli ingadozások lépnek fel, amelyek teljesen önállóan mennek végbe, függetlenül bármely más nyaláb ingadozásaitól."

A második rész az elemi fényinterferencia-elmélet alapfeltevéseivel és az azokból levonható következtetésekkel foglalkozik. Az egyes fő fejezetek címei: I. A szuperpozíció optikai elvének érvényességi határai. II. Az interferencia elemi elméletének alapjai. III. Az interferencia és az elemi sugárzók természete. IV. A közeg hatása az interferencia jelenségekre. V. Az interferenciatér statisztikus szerkezete.

A könyvnek ez a része a legérdekesebb és a legértékesebb. A szerző először kísérleti alapokon megvizsgálja az interferencia alapját képező szuperpozíció elv érvényességét vákuumban és elnyelő közegekben kis és nagy fényintenzitások esetén. Kimutatja, hogy vákuumban a szuperpozíció elve igen nagy fényintenzitásokig érvényes, anyagon való áthaladás alkalmával azonban egyes esetekben jelentős eltérések léphetnek fel.

Ezután az interferencia elemi elméletének keretében definiálja a koherencia fogalmát, mint az azonos világító pontokból egyidejűleg kilépő nyalábok interferencia képességét. A közelítőleg vagy a szerző szerint „eléggé monokromatikus" nyalábok interferenciájának tárgyalása után a könyv a Fresnel- és a Newton-féle interferencia érdekesebb eseteivel foglalkozik. Különösen érdekesek itt a nagyszögű interferenciával foglalkozó részletek, amelyek felfedik az interferenciakép és az azt létrehozó elemi sugárzók természete közötti összefüggést. Végül megismerkedünk azzal, hogy egyes esetekben a közeg hatása is megnyilvánul az interferencia jelenségekben, majd a könyvrész a Cserenkov-sugárzás ismertetésével és az interferenciatér kvantum-ingadozásainak leírásával zárul.

A harmadik rész címe: Az elnyelő közeg által kisugárzott fény tulajdonságai. E rész fejezetei azzal az esettel foglalkoznak, amikor a fényforrás és a közeg, amelyben a fény halad, nem tekinthetők egymástól függetleneknek, hanem az elemi sugárzók között, továbbá az elemi sugárzók és a közeg között kölcsönhatások lépnek fel. Az ilyen kölcsönhatásokra a legvilágosabban kifejthető feltételeket a folyékony és szilárd anyagok fotolumineszkálása szolgáltatja, ezért a könyvrész a címében megjelölt szempont szerint ennek jelenségeivel foglalkozik. Így részletes tárgyalás alá kerül az elnyelt energia rezonanciás vándorlása, a fluoreszcenciafény depolarizációja, a lumineszcenciafény kioltása koncentráció növeléssel vagy járulékos anyagokkal. A könyvrész legnagyobbrészt VAVILOV és más szovjet szerzők legmodernebb vizsgálatait foglalja össze.

A munka az optikai irodalomban nemcsak témájánál, hanem analitikus tárgyalásmódjánál fogva is teljesen újszerű. Kitűnően sikerült benne az elméleti és kísérleti anyag harmonikus összefogása, úgyhogy nehéz volna megállapítani, hogy elméleti vagy gyakorlati műnek lehet-e nyilvánítani. Ez azonban nyilvánvalóan nem is fontos. A benne leírt kísérleti vizsgálatok egyszerűek és mégis alapvetően egzaktak, egy nagytehetségű fizikus munkájának bizonyítékai.

A munka stílusa meglehetősen tömör, de mindenütt egzakt és sehol sem megy az érthetőség rovására. A mű mindenesetre nem „bevezetés az optikába“, olvasása bizonyos előtanulmányokat igényel.

Külső kiállítása tetszetős, a becsúszott néhány sajtóhiba nem értelemzavaró. A szerkesztő, fordító és lektor igen lelkiismeretes és értékes munkát végeztek. A magyar előszó kitűnő összefoglalásával és vonzó stílusával az olvasóban erős érdeklődést kelt a könyv tartalma iránt.

Szalkay Ferenc
a műszaki tudományok kandidátusa

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Pukánszky Lajos kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1955. október 1-én rendezte a Tudományos Minősítő Bizottság PUKÁNSZKY LAJOS „Vizsgálatok a Hilbert-tér operátorgyűrűinek elméletéből" című kandidátusi disszertációjának vitáját a Szegedi Tudományegyetem Matematikai Intézetében. A vita elnöke: ALEXITS GYÖRGY akadémikus volt. Az értekezés opponensei: CSÁSZÁR ÁKOS, a matematikai tudományok doktora és TANDORI KÁROLY kandidátus.

A vita elején PUKÁNSZKY LAJOS ismertette disszertációjának eredményeit. A disszertáció témája a topologikus csoportok előállításelméletéhez csatlakozik. Ennek az elméletnek a célja a véges csoportok unitér mátrixokkal való előállításának elméletét kiterjeszteni az általános Haar-mértékkel rendelkező topologikus csoportokra. A kommutatív csoportok esetében a csoportok természetére tett további kikötés nélkül sikerült egy általános karakterelméletet kiépíteni (A. WEIL és D. A. RAIKOV), amely egyaránt magábafoglalja a véges kommutatív csoportok előállításelméletét, valamint a Fourier sorokra és integrálokra vonatkozó klasszikus teljességi tételeket. A nem-kommutatív esetben ilyen általános elmélet kiépítése csak kompakt csoportokra sikerült PETER WEYL és HAAR klasszikus vizsgálatai eredményeképpen. Az újabb kutatások két csoportra oszthatók: 1. Matematikailag különlegesen érdekes csoportok például az ún. klasszikus csoportok előállításelméletének kiépítése és az előállítások effektív megszerkesztése; ezen a területen GELFAND, NAJMARK, valamint iskolájuk által főképpen a klasszikus analízis módszereivel elért eredmények már megmutatják a nem-kommutatív és nem-kompakt eset lényeges újszerűségét. 2. A másik irány viszont a kommutatív esetben már elért általános eredmények kiépítésére törekszik (GODEMENT, DIXMIER, MAUTNER, SEGAL stb.); itt a kutatás fő segédeszköze a Hilbert-tér operátorainak elmélete. Ezen kutatási irány fő nehézségei abban rejlenek, hogy a csoportalgebra fogalmának természetes általánosításaként fellépő Hilbert-térbeli operátorgyűrűk természete gyökeresen különbözik a véges dimenziós operátorgyűrűkétől. Klasszikus eredményekből következik, hogy az utóbbi esetben minden operátorgyűrű direkt összege skaláris centrumú operátorgyűrűknek (az ún. faktoroknak) és egy ilyen izomorf egy végesdimenziós tér összes operátorai által alkotott gyűrűvel. Mint MURRAY és NEUMANN kutatásai megmutatták a Hilbert-tér végtelen dimenziós volta lényegesen új viszonyokat teremt. Itt a véges, vagy végtelen dimenziós tér összes operátorai által alkotott gyűrűvel izomorf faktorok osztálya mellett (I. osztály), a faktorok két további, ún. folytonos osztályai léteznek (II. és III. osztály). Az operátorgyűrűknek faktorok direkt összegére való felbonthatósága pedig csak akkor marad érvényben, ha a diszkrét direkt összeg fogalmát a folytonos direkt összegével helyettesítjük. Az I. és II. osztály faktoraiból az említett módon előálló ún. félig véges gyűrűk bizonyos hasonlóságot mutatnak a véges dimenziós gyűrűkkel, amennyiben ezeken a véges dimenziós mátrixok nyomképzésével analóg lineáris operációk értelmezhetők. Ezen, az előállításelmélet szempontjából lényeges tulajdonság miatt ezek a gyűrűk különleges szerepet játszanak.

A csoportalgebra speciális esete olyan operátorgyűrűknek, amelyek egy skaláris szorzattal rendelkező és néhány az alkalmazások során természetesen adódó axiómáknak elegettevő ún. kváziunitér algebrákhoz rendelhetők hozzá; ezek bevezetését és ezzel a tárgyalás absztrakttá tételét az indokolta, hogy ilyen módon az operátor gyűrűk fontos példái is tárgyalhatók.

DIXMIER a kváziunitér algebrák elméletét kiépítő dolgozatában egy elégséges feltételt állapított meg arra nézve, hogy a kváziunitér algebrákhoz tartozó operátorgyűrű félig véges legyen, ugyanakkor pedig sejtésként kimondta ezen feltétel szükségességét. Az értekezés első eredménye ennek a sejtésnek igazolása. A továbbiak során eljárást ad meg az összes félig véges gyűrűvel rendelkező kváziunitér algebrák előállítására, nevezetesen kimutatja, hogy a mondott határokon belül ez a gyűrű tetszőlegesen választható.

PUKÁNSZKY beszámolója után aspiránsvezetője, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA röviden ismertette e problémakör lényegét és a matematika más ágaival való kapcsolatát. Véleménye szerint PUKÁNSZKY disszertációja jelentős eredménnyel viszi tovább e témakör egy aktuális kérdésének vizsgálatát.

Ezután CSÁSZÁR ÁKOS és TANDORI KÁROLY opponensek olvasták fel bírálatukat. Mindketten hangsúlyozták, hogy az értekezés megválasztása szerencsés és aktuális, mert egy a topologikus csoportok előállítás elméletével kapcsolatos vizsgálatokban felmerülő struktúratípus szerkezetének tisztázásához járul hozzá azáltal, hogy legalább a kérdéses struktúrák egy osztályának szerkezetébe nyújt betekintést; a disszertáció eredményei igen értékes önálló eredmények és a jelölt széleskörű ismereteiről, nagyfokú irodalmi tájékozottságáról és fejlett technikájáról tesznek tanúságot. Ezek alapján mindketten alkalmasnak találták a jelöltet a kandidátusi fokozat elnyerésére. Rámutattak továbbá arra is, hogy az értekezés fogalmazása helyenként túlzottan szűkszavú és az értekezésben néhány elírás, illetve gépelési, vagy formulabeírásból eredő hiba található.

Ezután PUKÁNSZKY LAJOS válaszolt az opponensek bírálatára.

Miután az opponensek kielégítőnek tartották a választ, a disszertáció feletti további vitára került sor. KALMÁR LÁSZLÓ professzor megkérdezte a jelölttől, hogy hol van tulajdonképpen nehézség a tisztán végtelen típusú operátorgyűrűk vizsgálatában; a kvantummechanikai tárgyalásnál a tisztán végtelen típusú operátorgyűrűk vizsgálatában észlelt nehézségek kizárhatók-e valamilyen fizikai meggondolás alapján, mik voltak az igazi nehézségek a disszertáció fő eredményének bizonyításánál, mi okozta azt, hogy ez DIXMIERnek nem sikerült?

Ezután PUKÁNSZKY LAJOS válaszolt KALMÁR LÁSZLÓ professzor hozzászólására. Megemlítette, hogy a tisztán végtelen operátorgyűrűk vizsgálatában a leglényegesebb nehézség a félig véges gyűrűknél létező nyomoperációk hiánya. De ettől függetlenül, ami a gyűrűk algebrai szerkezetét illeti, a tisztán végtelen faktorokról nem tudunk kevesebbet, mint a faktorok többi osztályairól. Arra a kérdésre válaszolva, hogy a kvantummechanikai tárgyalásnál a tisztán végtelen típusú operátorgyűrűk vizsgálatában észlelt nehézségek kizárhatók-e valamilyen fizikai meggondolás alapján, idézte I. E. Segal azon véleményét, amelynek értelmében bizonyos valószínűség van arra, hogy a tisztán végtelen típusú gyűrűk a kvantummechanikai vizsgálatoknál nem fognak fellépni.

Pukánszky válasza után a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza. A bizottság határozata leszögezte: Pukánszky Lajos aspiráns „Vizsgálatok a Hilbert-tér operátorgyűrűinek elméletéből" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bírálóbizottság megállapította, hogy az értekezés tárgyának megválasztása aktuális, amenyiben a topologikus csoportok előállítás-elméletével kapcsolatos vizsgálatoknál fellépő bizonyos struktúra-típus szerkezetének tisztázásához járul hozzá. A megoldott probléma nehézségét mutatja, hogy az egész elmélet megalkotójának, Dixmiernek nem sikerült a felmerülő akadályokat leküzdenie. Az értekezés eredményei a kváziunitér algebrák szerkezetére vonatkozó ismereteinket lényegesen kibővítik, elérésükhöz a funkcionális analízis módszereinek és a témakör irodalmának alapos ismeretén kívül mélyenjáró gondolatokra is szükség volt.

Az értekezés szövegezése szabatos és tömör, helyenként azonban túlzottan szűkszavú.

Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy Pukánszky Lajost nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Fodor Géza
a matematikai tudományok kandidátusa

Szüsz Péter kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1955. február 4-én rendezte meg a Tudományos Minősítő Bizottság Szüsz Péter „Adalékok a diofantoszi approximáció elméletéhez" c. kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a Tudományos Akadémia felolvasó termében. A disszertáció opponenséül Turán Pál akadémikust és Rényi Alfréd levelező tagot kérte fel a Tudományos Minősítő Bizottság, a bíráló bizottság elnökéül pedig Alexits György akadémikust.

A disszertáns, miután eddigi tudományos munkásságát röviden ismertették, vázolta disszertációjának tartalmát.

A disszertáció számok többszöröseinek egyenletes eloszlásával kapcsolatos két tételt tartalmaz. Ezek S. Hartmann egy 1947-ben felvetett problémájára adnak választ, mely probléma E. Hecke egy tételének több dimenzióra vonatkozó általánosítását célozza.

Jelöljük (x)-szel az x valós szám tört részét. Rég ismeretes, hogy ha az $1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ valós számok lineárisan függetlenek, akkor a

$$(\nu\omega_1), (\nu\omega_2), \ldots, (\nu\omega_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

koordinátájú $P_\nu^{(k)}$ pontok a k-dimenziós euklideszi tér egységkockájában WEYL-értelemben egyenletesen vannak eloszolva, azaz, ha $J^{(k)}$ egy JORDAN-értelemben mérhető tartomány az egységkockában és Jordan-mértéke $|J^{(k)}|$, továbbá $N_{\omega_1,\dots,\omega_k}(n, J^{(k)})$-val jelöljük azon $P_\nu^{(k)}$ pontok számát, amelyekre $\nu \leqq n$ és $P_\nu^{(k)} \in J^{(k)}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_{\omega_1,\dots,\omega_k}(n, J^{(k)}) = |J^{(k)}|.$$

HECKE a $k=1$ esetben megmutatta, hogy az

$$(1) \qquad N_\omega(n, J^{(1)}) - n|J^{(1)}|$$

különbség — mely általában nem korlátos — mégis csak ω-tól és az intervallum hosszától függő korlát alatt marad bármely $|(s\omega)-(r\omega)|$ hosszúságú félig zárt intervallumot választva $J^{(1)}$ gyanánt, ahol r és s pozitív egészek, az (1) különbség (természetesen az intervallum hosszától függő) korlát alatt marad. HARTMANN azt a kérdést vetette fel, hogy mi felel meg a HECKE tételének két ω_1, ω_2 szám esetén. Megvan-e a megfelelő tulajdonságuk azoknak a tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapoknak, amelyeknek oldalai

$$|(s_1\omega_1)-(r_1\omega_1)| \quad \text{és} \quad |(s_2\omega_2)-(r_2\omega_2)|$$

hosszúságúak? HARTMANN kérdése az $r_1=r_2=0$ esetre vonatkozott. A disszertáció első tétele szerint választhatók ω_1 és ω_2 irracionális, lineárisan független számok úgy, hogy a vizsgált különbség már az $s_1=s_2=1$ esetnek megfelelő téglalapra vonatkozóan se maradjon korlátos. A bizonyítás legnehezebb része ω_1 és ω_2 megszerkesztése, amihez L. DIRICHLET számtani sorok prímszámaira vonatkozó tétele is alkalmazásra kerül, továbbá a reguláris lánctörtek számos mély tulajdonsága.

A disszertáció második tétele szerint, ha a q természetes számra $(q\omega_1) \leq (q\omega_2)$, akkor azon $J^{(2)}$ parallelogrammákra, amelyek oldalait a

$$\frac{(q\,\omega_1)}{(q\,\omega_2)} \quad \text{és} \quad (q\omega_1)+i(q\omega_2)$$

komplex számok reprezentálják, az

$$N_{\omega_1,\omega_2}(n, J^{(2)}) - n|J^{(2)}|$$

különbség csak ω_1, ω_2 és q-tól függő korlát alatt marad. Az utóbbi eredmény nyomtatásban megjelent. (Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5* (1953), 35—38. l.) Az ilyen parallelogrammába eső rácspontok számának explicit kifejezése igen jól kezelhető.

Ezután az opponensek ismertették bírálatukat. Mindketten rámutattak, hogy az első tétel bizonyításában SZÜSZ PÉTER számos finom ötletet alkalmaz, köztük ezen a területen olyan váratlan eszközt is, mint DIRICHLET említett tétele. Jól kezeli a lánctörtek elméletét és azt jól tudja a problémához alakítani. A második tételben fő érdeme az alkalmas alakú parallelogrammák megtalálása, ami után a tétel bizonyítása (hasonlóan, mint HECKÉnél is) viszonylag egyszerű.

Mindketten rámutatnak emellett azonban arra, hogy a dolgozat igen nehezen olvasható. Ehhez nagyban hozzájárul a dolgozat helyenként túl rövid fogalmazása, a jelölések inkonzekvenciája, a képletek helyenként pontatlan beírása. RÉNYI ALFRÉD a bizonyítás egyes részletei egyszerűsítésének lehetőségére és néhány könnyen pótolható hiányosságra mutat rá. Mindketten hiányolják, hogy szerző nem mutat rá az eredményeivel kapcsolatban felmerülő további problémákra, még ott sem, ahol bizonyítása adna is bizonyos mértékű választ e kérdésekre

SZÜSZ PÉTER köszönettel veszi az opponensek számos észrevételét és megjegyzését. A felvetett kérdésekre és hiányosságokra válaszol. A választ az opponensek elfogadják.

A továbbiakban számos hozzászólás hangzott el, melyek — elismerve a dolgozat tudományos értékét, ötletgazdagságát, — annak fogyatékos stílusát, indokolatlan tömörségét kifogásolták. HAJÓS GYÖRGY ellenpéldákkal megmutatta, hogy mindkét tétel megfogalmazása a disszertációban szereplő formában helytelen. Ezután SZÜSZ PÉTER válaszolt a hozzászólásokra, majd a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza.

Az elnök az ülést újra megnyitva rámutatott, hogy a bíráló bizottság hosszas vita után hozta meg határozatát. A vita során elismerte SZÜSZ figyelemre méltó tudományos alkotókészségét, ötleteit, ugyanakkor nyomatékosan esett latba a dolgozat megengedhetetlenül pongyola és gondatlan fogalmazása, mely még a tételek kimondására is kiterjed. A jelölések indokolatlan bonyolultsága és itt-ott helytelensége is felmerült a vita során. A bizottság ezért úgy határozott, hogy a disszertációt visszaadja kijavításra és amennyiben az átdolgozott értekezés mentes lesz az említett hibáktól, a bizottság további nyilvános vita mellőzésével azt kandidátusi disszertációként elfogadja.

SZÜSZ PÉTER átdolgozott disszertációját március végén adta be. Ezt áttanulmányozva a bizottság 1955. június 4-én hozta meg a következő végleges határozatát:

„A dolgozat sok önálló ötletet tartalmaz, a szerző a témakör igen alapos ismeretén túl arról is tanúságot tett, hogy változatos segédeszközöket tud mozgósítani problémák megoldására, néha egész váratlan formában is. Ezzel bebizonyította, hogy önálló kutatásra messzemenően képes.

Annál elítélendőbb az a hanyagság, amivel először még tételeit is hibásan fogalmazta meg és bizonyításai is követhetetlenekké váltak a jelölésbeli inkonzekvenciák és felületességek miatt. A visszaadás után kijavított dolgozat már helyesen fogalmazott tételek mellett a gondolatmenet áttekinthető vázolásában is sokat nyert. A bizonyításnak még mindig pongyola, vagy hibásan leírt részletei kijavíthatók, mégpedig anélkül, hogy újabb ötleteket igényelnének. A bizonyítás mégis tartalmaz még lényeges pontatlanságokat is apróbb pongyolaságok mellett, úgy hogy pontos követése igen nehéz, fáradságos munkát jelent. A szerzőnek a jövőben igen nagy gondot kell fordítania eredményeinek világos, helyes leírására, hogy munkája hasznos és értékes lehessen."

Ennek alapján a bizottság szótöbbséggel javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy SZÜSZ PÉTERt nyilvánítsák a matematikai tudományok kandidátusává. A Tudományos Minősítő Bizottság a javaslatot elfogadta.

Surányi János
a matematikai tudományok kandidátusa

Moór Artúr kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1955. október 22-én rendezte meg MOÓR ARTÚR kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a Bolyai János Matematikai Társulat székházában. MOÓR ARTÚR három évig volt aspiráns a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen VARGA OTTÓ, az MTA levelező tagja mellett. Disszertációja, amelynek címe: „Vizsgálatok általános metrikus terekben (dualitáselmélet és görbületelmélet)", a felsőbb differenciálgeometriának egy 1936 óta fejlődő új fejezetéből meríti tárgyát. A disszertáció opponensei HAJÓS GYÖRGY akadémikus és FEJES-TÓTH LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora voltak. A bíráló bizottság elnökéül a TMB EGERVÁRY JENŐ akadémikust kérte fel.

EGERVÁRY JENŐ akadémikus elnöki megnyitója után a bíráló bizottság titkára ismertette MOÓR ARTÚR eddigi tudományos munkásságát, majd MOÓR ARTÚR előadta kandidátusi értekezésének téziseit.

Az általános metrikus terek elméletének alapjait először J. A. SCHOUTEN és J. HAANTJES egy közös dolgozatban építették ki. Ezen terek alapeleme egy kovariáns vagy kontravariáns vektorsűrűség jellegű mennyiség, a geometriai struktúrájukat pedig egy az alapelemek sokaságán definiált metrikus alaptenzor határozza meg. Az eddigi matematikai irodalomban ezen tereknek két, látszólag különböző típusa alakult ki, aszerint, amint ez az alapelem kovariáns, illetve kontravariáns vektorsűrűség jellegű mennyiség volt.

MOÓR ARTÚR disszertációjának első részében, amely ezen terek dualitáselméletével foglalkozik, kimutatja, hogy ez a két tértípus lényegileg azonos, amennyiben az a tér, amelynek alapeleme egy $(+p)$-edsúlyú kontravariáns vektorsűrűség, kölcsönösen és egyértelműen leképezhető egy olyan térre, amelynek alapeleme egy $(-p)$-edsúlyú kovariáns vektorsűrűség. A leképezésnél, amelyet explicite megad, az egyes terek megfelelő alapmennyiségei egymásba mennek át. Ezeket a tereket, amelyeknél tehát a megfelelő alapmennyiségek alkalmas transzformációval egymásba átvihetők, a szerző duális tereknek nevezi. Disszertációja első részének fő eredménye tehát úgy fogalmazható meg, hogy minden kontravariáns alapelemű tér duális egy kovariáns alapelemű térrel és viszont. Azokban az esetekben, amikor a két tér alapelemeinek súlya abszolút értékben különböző, a terek között dualitás csak akkor állhat fenn, ha a két tér torzióvektora eltűnik. Ez az eset áll fenn pl. a Finsler és Cartan terek dualitásánál is, amellyel a disszertáns már két régebbi dolgozatában foglalkozott. Itt ugyanis az alapelemek súlya 0, ill. (-1).

Az általános metrikus sűrűségterek duális sajátságainak vizsgálatát MOÓR ARTÚR az ún. Riemann-féle oszkuláló terek megkonstruálásával végezte el. A Riemann-féle oszkuláló tér bevezetése ezen terekbe önmagában véve is egy fontos módszer megszerkesztését jelenti, mert pl. a Finsler tér esetében az oszkuláló tér a geometriai alkalmazásokon túlmenően már a fizikában is felhasználásra talált.

Kandidátusi értekezésének második részében MOÓR ARTÚR a SCHOUTEN—HAANTJES-féle sűrűségterek görbületi viszonyait vizsgálta. Eddig a matematikai irodalomban ezen terek görbületelméletére vonatkozó vizsgálatok még alig voltak találhatók. A teljes görbületi tenzorok meghatározása után behatóan foglalkozik az ún. skalárgörbületű terekkel. Ezek azáltal vannak definiálva, hogy az általa bevezetett görbületi invariánsok nem egy sík-állástól, hanem csak az alapelemtől függnek. Külön fejezetet szentel a dolgozat a kétdimenziós eset vizsgálatának; a kétdimenziós terek ugyanis mindig skalárgörbületűek, amellett az $n > 2$ dimenziójú terekhez képest több eltérés is mutatkozik. A dolgozat eredményei alapján a kétdimenziós sűrűségterek görbületelmélete csaknem lezártnak mondható, az n-dimenziós eset ($n > 2$) azonban még további vizsgálati lehetőségeket rejt magában.

A görbületelmélet tárgyalásánál mutatkozott meg a dualitáselmélet nagy fontossága és használhatósága — amint azt az opponensi vélemények is hangsúlyozták — mert a dualitáselmélet révén elegendő volt egyetlen tértípus, pl. mint ahogyan a dolgozatban is történt, a kontravariáns típus vizsgálata. A kontravariáns esetre kapott eredmények a dualitás révén a kovariáns esetre is átvihetők lesznek.

MOÓR ARTÚR téziseinek elhangzása után HAJÓS GYÖRGY akadémikus és FEJES-TÓTH LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora ismertették opponensi véleményüket.

HAJÓS GYÖRGY opponensi véleményében kiemeli, hogy a szerzőnek erős érzéke van a problémák formai oldalának megragadására. A dolgozat legértékesebb részének a görbületelmélet és a kétdimenziós eset tárgyalását tartja, de egyúttal hangsúlyozza, hogy az első rész problematikája önmagában is érdekes. Végül annak a véleményének ad kifejezést, hogy a disszertáció megfelel a kandidátusi disszertációval szemben támasztott követelményeknek.

FEJES-TÓTH LÁSZLÓ opponensi véleményében megállapítja, hogy MOÓR ARTÚR disszertációjában a SCHOUTEN—HAANTJES-féle sűrűségterek dualitás és görbületelméletének kidolgozásával jelentős problémát oldott meg és disszertációja nemcsak megüti egy kandidátusi disszertáció követelményeit, hanem messze túl is megy azon. Megjegyzi azonban, hogy a tárgy speciális volta miatt célszerűbb lett volna nagyobb történeti áttekintést adni, valamint az egyes formulák geometriai tartalmát jobban kidomborítani.

MOÓR ARTÚR részletesen válaszolt az opponensek véleményére, majd a nyilvános vita keretében elhangzott kérdésekre és felszólalásokra adta meg a választ. Ennek keretében HORVÁTH JÁNOS kérdésére kifejti, hogy a dualitáselmélet a nem-metrikus terek bizonyos típusaira is kiterjeszthető. Nem-metrikus esetben azonban duális kapcsolat a disszertáció módszereivel csak akkor létesíthető, ha mindkét tér alapeleme egyidejüleg kontravariáns, vagy kovariáns vektorsűrűség jellegű és a térben definiálható egy, egyedül a helytől függő skalársűrűség. Ezek a duális affinösszefüggő terek tehát a metrikus esetben annak a típusnak az általánosításai, amelyeknél az A_i torzióvektor eltűnik; ezek tehát a vonalelemterekkel dualizálhatók (természetesen az $A_i = 0$ feltételnek teljesülnie kell). EGERVÁRY JENŐ elnök kérdésére válaszolva kifejti, hogy a MINKOWSKI geometriák analogonjai e terekben oly speciálesetet alkotnak, amelyekben alkalmas koordinátarendszerben az alapfüggvény a helytől független.

Még néhány felszólalásra adott válasza után a bíráló bizottság (tagjai: HORVÁTH JÁNOS, KÁRTESZI FERENC, VINCZE ISTVÁN, titkár: RAPCSÁK ANDRÁS) határozathozatalra vonult vissza; majd EGERVÁRY JENŐ akadémikus, mint a bíráló bizottság elnöke, felolvassa a bizottság határozatát. A bizottság megállapította, hogy MOÓR ARTÚR a SCHOUTEN—HAANTJES-féle sűrűségterek vizsgálatában a dualitáselmélet és a görbületelmélet megkonstruálásával igen lényeges eredményeket ért el. A dualitásra vonatkozó eredményei még azért is hangsúlyt érdemelnek, mert ezeket a görbületelméletben jelentős mértékben fel is használta. A görbületelméleti vizsgálatok a kétdimenziós esetben lényegileg lezártnak tekinthetők. A bizottság azonban megállapítja, hogy a dolgozat értékét emelte volna, ha a disszertáció a sűrűségterek kialakulásáról nagyobb történeti áttekintést adott volna, valamint a felhasznált apparátust részletesebben fejti ki.

Mindezek alapján a bizottság egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy MOÓR ARTÚRt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Rapcsák András
a matematikai tudományok kandidátusa

Berencz Ferenc kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1956. február 24-én rendezte a Tudományos Minősítő Bizottság BERENCZ FERENC adjunktus „A hidrogén molekula alapállapotának számításai variációs módszerrel" című kandidátusi értekezésének a vitáját. Az értekezés opponensei GOMBÁS PÁL akadémikus és GÁSPÁR REZSŐ, a fizikai tudományok kandidátusa voltak, a vita elnökéül a TMB BUDÓ ÁGOSTON levelező tagot kérte fel.

A bizottság elnökének felkérésére BERENCZ FERENC ismertette értekezésének fontosabb téziseit.

A dolgozat célkitűzése a homöopoláros kötés legegyszerűbb típusánál, a hidrogén molekula esetében olyan hullámfüggvény alak keresése, amely a kötési energiát és a molekula egyéb fizikai állandóit jó közelítéssel szolgáltatja, valamint az abban szereplő variációs paraméterek kis száma következtében alkalmas bonyolultabb molekulák kérdésének tanulmányozására. A kérdéscsoport áttekintése céljából értekezésében összefoglalta és kritikailag elemezte a korábbi hasonló tárgyú vizsgálatokat. A dolgozat leglényegesebb része két új függvénytípus vizsgálata. Az elsőnél a WEINBAUM számításaiban szereplő

$$\Psi = N[\Psi a^{(1)} + \Psi b^{(1)}][\Psi a^{(2)} + \Psi b^{(2)}]$$

Hund—Mulliken típusú közelítő sajátfüggvényben a derékszögű koordinátákról a probléma természetének jobban megfelelő

$$\mu_i = \frac{r_{ai} + r_{bi}}{R} \qquad \nu_i = \frac{r_{ai} - r_{bi}}{R}$$

elliptikus koordinátákra tér át, majd pedig a hidrogénszerű atomi függvények helyett a következő kifejezéseket vezette be:

$$e^{-zr_a} = e^{-z\frac{R}{2}(\mu+\nu)} \to e^{-(\alpha\mu+\beta\nu)}$$

$$e^{-zr_b} = e^{-z\frac{R}{2}(\mu-\nu)} \to e^{-(\alpha\mu-\beta\nu)}$$

ahol α és β variációs paramétereket jelentenek. Ennek a lépésnek a célja, hogy az új variációs paraméterek bevezetésével a sajátfüggvény alakja nagyobb mértékben flexibilisebbé váljék. A számítások alapjául szolgáló sajátfüggvény tehát a következő alakú:

$$\psi = Ne^{-\alpha(\mu_1+\mu_2)}\left[e^{\beta(r_1+r_2)}+e^{\beta(r_1-r_2)}+e^{-\beta(r_1+r_2)}+e^{-\beta(r_1-r_2)}\right].$$

Ezzel a sajátfüggvénnyel, mint kétparaméteres variációs problémával, a következő eredményeket nyerte:

$$D=3{,}60 \text{ eV} \qquad R=0{,}76 \text{ Å} \qquad \alpha=0{,}855 \qquad \beta=0{,}735.$$

Második esetben az előbbi sajátfüggvényt az $(1+pr_{12})$ korrelációs faktorral bővítette; p újabb variációs paramétert jelent. Ezzel a sajátfüggvénnyel a következő eredmények adódtak:

$$D=4{,}26 \text{ eV} \qquad R=0{,}76 \text{ Å} \qquad \alpha=0{,}925 \qquad \beta=0{,}840 \qquad p=0{,}32.$$

Ez az eredmény az irodalomban eddig vizsgált háromparaméteres variációs függvények között a legjobb értéket adja a disszociációs energiára, valamint az egyensúlyi magtávolságra.

Az értekezés végén összeállítást közöl a dolgozat elkészítésénél felhasznált, az irodalomban eddig nem szereplő integrálokról.

Gombás Pál akadémikus opponensi véleményében megállapította, hogy a témakör, jóllehet irodalma csaknem háromévtizedes múltra tekint vissza, ma is igen aktuális. A disszertációt általában értékes munkának tartja, a disszertáció arról tanúskodik, hogy a szerző eredményesen végez tudományos munkát. Kifogásolja, hogy a dolgozatban helyenként félreértésre alkalmat adó pontatlan fogalmazású részletek találhatók, valamint több elírásra mutat rá. Javasolja a disszertációnak kandidátusi értekezés gyanánt való elfogadását.

Gáspár Rezső, a fizikai tudományok kandidátusa opponensi véleményében ugyancsak kiemeli a vizsgálat aktuális voltát. A dolgozat összefoglaló jellegű részét teljesnek tartja. Hiányolja, hogy a dolgozat nem foglalkozik az alapul vett függvényrendszer teljességének a kérdésével, továbbá az egyes közelítő lépéseknek a H_2 molekula sűrűségeloszlására való befolyásával. Megállapítja, hogy a számítások konkrét elvégzése igen nagy munkát követelt meg, amelyet a jelölt gondosan hajtott végre. A dolgozatot alkalmasnak tartja arra, hogy megvédésével a jelölt a kandidátusi fokozatot elnyerhesse.

Berencz Ferenc az opponensi véleményekre adott válaszában Gombás Pál bírálatával teljesen egyetért, Gáspár Rezső opponensi véleményével kapcsolatban megállapítja, hogy az alapul vett függvényrendszer teljességének kérdésével azért nem foglalkozott, mert a dolgozat célja a helyes függvényalak megkeresése volt, nem pedig egy teljes ortogonális függvényrendszer szerinti kifejtése a keresett sajátfüggvénynek. Bár ez utóbbi eljárás a Ritz-féle módszer segítségével igen célravezető, bonyolultabb molekulákra való általánosítása rendkívül nehézkes. A sűrűségeloszlásra vonatkozólag azért nem folytatott vizsgálatokat, mert ez az alapul vett függvény esetén rendkívül sok numerikus munkával járt volna, aminek az elvégzése az Intézet jelenlegi adottságai mellett (egyetlen számológép) szinte kivihetetlen lett volna. A további megjegyzésekkel, amelyek kisebb elírásokra vonatkoztak, egyetért.

Az opponensek a választ kielégítőnek tartották. A vitában felszólalt NEUGEBAUER TIBOR, a fizikai tudományok doktora. Megállapította, hogy az alkalmazott közelítés csak első közelítés és érdekes lenne megvizsgálni, hogy milyen eredményre vezet a második közelítés, amely lényegileg polarizációs és VAN DER WAALS típusú energiákat szolgáltat. Rámutat arra, hogy ez a polarizációs energia minden esetre igen nagy szerepet játszik, tekintetbevétele tehát az egyezést lényegesen javítaná. BERENCZ FERENC a hozzászólással egyetért.

A magas színvonalú vita után a bizottság megállapította, hogy a jelölt által választott téma a kvantumkémiai kutatásoknak ma is fontos részét képezi, mert a legegyszerűbb olyan molekulát veszi figyelembe, amelynél a fellépő jelenségeket számítással aránylag könnyen lehet követni és ennek ismeretében útmutatások nyerhetők a bonyolultabb molekulákra vonatkozó számításoknál is. Mind a disszertáció, mind pedig a jelöltnek a vita folyamán adott ismertetése és válaszai arra mutatnak, hogy a jelölt a témával kapcsolatos számítási módszerekben igen járatos. Nagyon hasznosnak tartja a bizottság a disszertáció függelékeként található integrál gyüjteményt is. Mindezekre való tekintettel a bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy BERENCZ FERENCet nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

A Tudományos Minősítő Bizottság a felterjesztést elfogadta és BERENCZ FERENCet a fizikai tudományok kandidátusává nyilvánította. Ez úton is kívánunk további eredményes működéséhez sok sikert.

Pauncz Rezső
a fizikai tudományok kandidátusa

Fenyves Ervin kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A kandidátusi értekezés megvédése 1955. szeptember 24-én volt az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetében.

A bizottság elnöke KOVÁCS ISTVÁN levelező tag volt. Az ülés megnyitása után BOROS JÁNOS bizottsági titkár ismerteti a jelölt életrajzát, valamint eddigi tudományos működését. Ezután FENYVES ERVIN ismertette értekezésének téziseit. Értekezésének címe: „Önkioltó GM csövek megszólalási valószínűsége ionizáló kozmikus részecskékre".

A GM csövek ionizáló kozmikus sugárzási részecskékre való megszólalási valószínűségének ismerete nagyon fontos. Különösen fontos nagy megszólalási valószínűségű csövek alkalmazása a koincidencia berendezéseknél, hasonlóképpen nagyon fontos a nem ionizáló részecskék vizsgálatára szolgáló antikoincidencia berendezéseknél.

A megszólalási valószínűségek elméletileg várható értékeihez képest az irodalomban található kísérleti értékek kisebbek. Nem szólal meg a cső, ha a részecske a csövön áthaladva egyetlen ion-párt sem hoz létre, vagy ha a részecske holt időn belül érkezik. Ezek valószínűsége kiszámítható. A szokásos töltésű csövek megfelelő geometriával közel 100%-os valószínűséggel szólalnak meg. A csövek holt-ideje holt-idő rövidítő elektronikus kapcsolásokkal csökkenthető s így a valószínűség 99,9%-nál nagyobbá tehető.

JÁNOSSY és KISS a valószínűségre a ténylegesnél kisebb értéket kaptak. Ennek az oka zavaró folyamatok fellépte: a részecskék szóródása és a fotonokat is tartalmazó záporok fellépte. E feltételezést a kísérletek igazolták. Pb abszorbenssel kiszűrve a kozmikus sugárzás lágy komponensét, a megszólalási valószínűségre egy GM csöves egységre 99,97 % $\pm$ 0,01 % adódott. A mérések során felépített berendezéssel a kioltó kapcsolás alkalmazása esetén a csövek legnagyobb részénél a valószínűség 99,9% körüli értéknek adódott. A legjobb csövek megszólalási valószínűsége igen jól megközelíti az elméletileg várható 99,95%-ot.

SZALAY SÁNDOR levelező tag opponensi véleménye szerint a jelölt mérőberendezése alkalmas arra, hogy a GM csövek megszólalási valószínűségét megbízhatóan meghatározza. A dolgozatban azonban nem fejti ki a megszólalási valószínűség kapcsolatát a részecske tömege és ionizáló képessége között. A megszólalási valószínűség kapcsolatban van a részecskéknek a csőben megtett útjával, ami a dolgozatban szintén nem szerepel. Nyelvészeti szempontból kifogásolja a „puha sugárzás" kifejezést, annál is inkább, mert a magyar nyelvben már megvan a „lágy sugárzás" elnevezés. Az opponensi vélemény értékesnek tartja a munkát, a jelölt széleskörű ismeretekről s a kísérleti technikában való alapos jártasságról tesz tanúbizonyságot. Az értekezést elfogadásra ajánlja.

Ezután BOZÓKY LÁSZLÓ kandidátus adta elő opponensi véleményét. A GM csövek megszólalási valószínűségének ismerete nemcsak a kozmikus sugárzásnál bír jelentőséggel, hanem újabban a magfizikai kutatásoknál, valamint a rádióizotópok gyakorlati alkalmazásánál is. Kiemeli azt, hogy a jelölt igazolta, hogy az irodalomban található kisebb valószínűségek nem a GM csövek reális hibái, hanem a mérőberendezés nem megfelelő felépítéséből erednek. Mint az értekezés kisebb hiányosságát megemlíti, hogy az oldal-záporok hatásának korrigálását röviden ismerteti. Nem nyilvánít véleményt arról, miért található az irodalomban olyan eredmény, amely a valószínűségre 100%-ot ad. Szükséges lett volna részletesebben összehasonlítani a GREISEN és NERESON elrendezést és a saját elrendezést. Hogy a jelölt ólomabszorbens nélkül is nagyobb valószínűségértéket kapott, mint JÁNOSSY és KISS, annak az értelmezése jó. Az értelmezés szerint ennek az oka a mérendő cső falából kiinduló foto és Compton elektronok. Az opponensi vélemény szerint alkalmas csőelrendezéssel ezt a hibát teljesen ki lehet küszöbölni. A vélemény kiemeli az értekezés élvezetes, könnyed stílusát és gondos kiállítását, érdeme, hogy igazolta, hogy jó önkioldó GM csövek megszólalási valószínűsége nagyobb, mint 99,9%. A jelölt az értekezésben igazolta, hogy alkalmas kutatómunkára és tudományos eredmények elérésére. A disszertációt alkalmasnak tartja arra, hogy megvédésével a jelölt a fizikai tudományok kandidátusi fokozatát elnyerje.

Ezután FENYVES ERVIN válaszolt az opponensek kérdéseire. SZALAY SÁNDOR opponens kérdésére válaszolva, rámutatott arra, hogy a primér specifikus ionizáció Bethe-féle elmélete szerint az ionizáció csak a részecske töltésétől és sebességétől függ, és nem függ a részecske típusától. Ezt az irodalomban található kísérletek igazolják. Az azonos energiájú, de különböző típusú részecskék közötti különbség a cső falán való áthatolásban nyilvánul meg. A GM cső megszólalási valószínűsége nem konstans a cső minden részében. Kisebb a cső végén, valamint a fal közelében. A megszólalási valószínűség a cső hatásos térfogatára vonatkozik. Ennek a hossza és átmérője a valódinál valamivel kisebb.

BOZÓKY LÁSZLÓ opponens kérdésére adott válaszában foglalkozik az oldalzáporok kiküszöbölésével, továbbá az irodalomban talált 100%-os valószínűségű eredményekre megjegyzi, hogy ezek hibája oly nagy, hogy a hibákon belül összeegyeztethetők a JÁNOSSY—ROCHESTER, a JÁNOSSY—KISS, valamint az elméletileg várható értékekkel. A GREISEN és NERESON méréseknél nem használtak holt-idő csökkentő kapcsolást, valamint nem biztosították a berendezésüket az oldalzáporokkal szemben. A jelölt elvégezte az opponens által javasolt mérést, azonban azt találta, hogy a saját elrendezéshez hasonló elrendezés a javasolthoz képest nagyobb valószínűséget szolgáltatott.

Az opponensek a válaszokat kielégítőknek találták.

Ezután a bíráló bizottság tagjai közül PÓCZA JENŐ kandidátus szólt hozzá. Kiemelte, hogy az értekezés messzire megüti azon cikkek mértékét, amelyek a világviszonylatban ismert szaklapokban találhatók. A dolgozattal kapcsolatban néhány kérdést tett fel, amelyekre a jelölt részletesen válaszolt. PÓCZA JENŐ bizottsági tag a válaszokat kielégítőnek találta.

A vita alapján a bíráló bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy FENYVES ERVINT nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

Boros János
a fizikai tudományok kandidátusa

Soós Gyula kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1956. július 1-én rendezte meg a Tudományos Minősítő Bizottság SOÓS GYULA aspiráns „Vonalelemsokaságok folytonos transzformációs csoportjai" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a Bolyai János Matematikai Társulat előadótermében. A jelölt aspiránsvezetője VARGA OTTÓ, az MTA levelezőtagja, az értekezés opponensei HAJÓS GYÖRGY akadémikus és RAPCSÁK ANDRÁS, a matematikai tudományok kandidátusa voltak. A bíráló bizottság elnökévé a Tudományos Minősítő Bizottság FEJES-TÓTH LÁSZLÓT, a matematikai tudományok doktorát kérte fel.

Az elnök megnyitója és SOÓS GYULA eddigi tudományos munkásságának ismertetése után a jelölt előadta értekezésének téziseit.

A modern differenciálgeometriai kutatások alapvető feladata a különféle differenciálgeometriai terek szerkezetének vizsgálata. Ezekben a vizsgálatokban hatékony eszköznek bizonyult a folytonos transzformáció-csoportok elméletének alkalmazása. Egy differenciálgeometriai tér automorfizmusainak összessége ugyanis, azaz a tér összes olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amely a tér struktúráját változatlanul hagyja, Lie-féle folytonos transzformáció-csoportot alkot. SOÓS GYULA disszertációjának tárgya differenciálgeometriai terek és különösképpen vonalelemsokaságok ilyen automorfizmuscsoportjainak vizsgálata.

A disszertáció két, jól elkülöníthető részből áll. Az első részben a szerző egy ω-térnek nevezett általános térfogalmat vezet be. Ebben alapelem az

$$(x^1, \ldots, x^n; \omega^1, \ldots, \omega^M),$$

ahol (x^i) egy A^n n-dimenziós aritmetikai tér és (ω^σ) egy M-dimenziós lokális tér pontja, továbbá e tértípus olyan differenciálgeometriai struktúrával van ellátva, hogy speciálisan magában foglalja a Finsler-, Cartan-, Schouten—Haantjes-féle és több más, már eddig is vizsgált differenciálgeometriai tér fogalmát. Az ω-tér vizsgálata tehát egyszersmind ezeknek az említett tereknek is vizsgálatát jelenti, mégpedig magasabb szempontból történő egységes tárgyalásban. Az ω-tér fogalmának megalapozása után e térben a geometriai objektum definíciója s a geometriai objektumoknak az infinitézimális transzformációval szemben tanúsított viselkedésének vizsgálata következik. Ezekben a vizsgálatokban fontos szerepet játszik az ω-tér geometriai objektumainak Lie-féle deriváltja. Szerző bebizonyítja, hogy egy geometriai objektum Lie-féle deriváltja akkor és csak akkor geometriai objektum, ha transzformációs függvénye lineáris.

Mind elvi szempontból, mind pedig a gyakorlati alkalmazhatóságot tekintve, igen jelentős a szerző által alaptételnek nevezett tétel. Ezen a ponton kapcsolja össze a szerző a folytonos transzformáció-csoportok elméletét az ω-tér elméletével. Az alaptétel azt mondja ki, hogy ha egy egyszeresen tranzitív folytonos csoportra vonatkozóan az ω-tér Φ_b^A lineáris homogén objektumai teljes rendszert alkotnak, azaz ha fennáll a

$$\Delta_{\xi a} \Phi_b^A - \Delta_{\xi b} \Phi_a^A = c_{bc}^a \Phi_b^A$$

összefüggés, akkor a

$$\Delta_{\xi i} \Omega^A = \Phi_i^A$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer a keresett Ω^A lineáris objektumra nézve teljesen integrálható. (Itt $\Delta_{\xi i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ a csoport sebességvektoraival képezett Lie-féle derivációs operátorokat jelöli.) Minthogy egy Ω^A objektum egy G transzformáció-csoporttal szemben akkor invariáns, ha

$$\Delta_{\xi i} \Omega^A = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

teljesül, az alaptétel állítása erre az esetre azt a nevezetes tényt mondja ki, hogy egy G csoport egy ω-térben mindig valamilyen geometriai objektum invarianciacsoportjaként fogható fel. — Az alaptétel jelentőségére világít rá az a számos tétel, amelyet az alaptételből alkalmazásként vezet le a szerző.

Ezekkel az eredményekkel zárul a dolgozat első része. A dolgozat második részében a szerző a vonalelemsokaságokra szorítkozik, és azt a kérdést vizsgálja, hogy mi a kritériuma annak, hogy egy vonalelemsokaság előírt típusú automorfizmuscsoporttal rendelkezzék. A sokféle automorfizmuscsoport közül a szerző a metrikus, homotetikus, konform, az általa definiált affin s végül a kollineációs csoportot vizsgálja, különös tekintettel az affin csoportra. Szükséges és elegendő feltételt ad meg az affin csoport létezésére, továbbá egy olyan térklasszist konstruál (ezek a szimmetrikus terek), amelynek mindig létezik affin csoportja. A dolgozat utolsó paragrafusában az affin csoport alcsoportjaival foglalkozik, s szükséges és elegendő feltételt talál az affin csoport homotetikus alcsoportjának létezésére.

SOÓS GYULA szabatos és világos előadása után az opponensek olvasták fel véleményüket. Mindkét opponens kiemelte, hogy SOÓS GYULA értekezése igen nagy anyagot ölel fel, bár csupán a szerző által talált eredményeket közli. A munka bizonyítja, hogy szerzője a differenciálgeometriai terek elméletében járatos, a vonatkozó irodalmat jól ismeri. HAJÓS GYÖRGY akadémikus opponensi véleményében főleg az értekezés két főrészének egymáshoz való viszonyával foglalkozik. A dolgozat általános jellegű vizsgálatait tartalmazó első részét jelentősebbnek tartja, s éppen ezért nem ért egyet a disszertáció címválasztásával. Ez az első rész ugyanis nem korlátozódik vonalelemsokaságok vizsgálatára, hanem a szerző által bevezetett igen általános ω-terekkel foglalkozik. Másrészt azonban e címválasztásból a szerzőnek az a helyes törekvése tűnik ki, hogy az első rész absztrakt fogalomalkotásaival és ezekre a fogalmakra vonatkozó kutatásaival szemben a második rész konkrét geometriai vizsgálatait és eredményeit hangsúlyozza. Az eredmények tehát nemcsak azt mutatják, hogy a szerzőnek jó érzéke van az absztraháláshoz, hanem azt is, hogy a geometriai célt állandóan szem előtt tartva, absztrakt eredményeit konkrét vizsgálatokban is jól tudja alkalmazni. HAJÓS GYÖRGY megjegyzi még, hogy az ω-terekre vonatkozó, szerző által kezdeményezett kutatási irány még további vizsgálatokra adhat bőséges anyagot.

RAPCSÁK ANDRÁS kandidátus opponensi véleményében megállapítja, hogy SOÓS GYULA értekezésében igen figyelemre méltó eredményeket ért el. Különösképpen kiemelendőnek tartja az alaptétel problémakörének megoldását, valamint azt, hogy sikerült a vonalelemsokaságokban olyan eléggé általános tértípust találnia, amelynek mindig van affin csoportja. A munka értékét emeli a szerző ama törekvése, hogy megfelelő módon kidomborítsa a tételek geometriai tartalmát. RAPCSÁK ANDRÁS ezenkívül a dolgozat részleteire vonatkozóan néhány apróbb kritikai jellegű megjegyzést tesz. E megjegyzések azonban véleménye szerint sem érintik a dolgozat érdemi részét.

Az opponensek egyetértenek abban, hogy az értekezés megfogalmazása tömör és szabatos, bár kívánatos lett volna a kevésbé használatos jelölési módok ismertetése. Az értekezést érdemei alapján mindketten alkalmasnak találják arra, hogy vele szerzője a kandidátusi fokozatot elnyerje.

Ezután SOÓS GYULA válaszolt az opponensek bírálatára. Az opponensek kritikai megjegyzéseivel egyetért, s ezeket a megjegyzéseket az értekezés anyagának publikációiban figyelembe fogja venni. Egyetért HAJÓS akadémikus ama megállapításával is, hogy az ω-terek bevezetése még további kutatásoknak lehet alapja, s valóban szándékozik ezekre a problémákra a jövőben visszatérni. Végül köszönetet mond az opponenseknek azért a fáradságért, amelyet számukra a disszertáció áttanulmányozása és egyes részeinek utánaszámolása jelentett.

Az opponensek kielégítőnek találták SOÓS GYULA válaszát s ezután a hozzászólásokra került sor. HORVÁTH JÁNOS, a fizikai tudományok kandidátusa felvilágosítást kért az értekezés egyes részleteivel kapcsolatban, továbbá az eredmények fizikai alkalmazhatóságára vonatkozóan megkérdezte, hogy ha a térben van mozgáscsoport, akkor ez mennyiben határozza meg a tér görbületi viszonyait? — ACZÉL JÁNOS kandidátus megkérdezte, hogy az ω-tér egy geometriai objektuma tekinthető-e úgy, mint egy speciális objektummezőn értelmezett objektum. — SOÓS GYULA HORVÁTH JÁNOS kérdésére válaszolva néhány idevágó tételt ismertetett, megjegyezte azonban, hogy e kérdéskörben nem járatos annyira, hogy kimerítő felvilágosítást adhasson. — ACZÉL kérdésére a válasz igenlő.

A jelölt válaszát a bíráló bizottság és a jelenlevők kielégítőnek találták. A bíráló bizottság határozatában megállapította, hogy „a disszertáció igen nagy anyagot ölel fel. Elmélyült gondolkodásról és matematikai alkotókészségről tesz tanúságot. Tárgyalja a transzformáció-csoportok elméletét, olyan általános típusú differenciálgeometriai terekben, amelyek a mostanáig vizsgált térfajtákat felölelik. Különösen értékeli a bizottság a disszertáció első felében a disszertáns által bevezetett általános térfajtának önálló vizsgálatát, amely vizsgálat további kutatásoknak nyit lehetőséget. Ennek az általános térfajtának vizsgálata során több kérdést egyszerűbben intéz el, mint ahogy az az eddig tárgyalt speciális térfajtáknál ismeretes volt. Általános eredményeinek használhatóságát bizonyítja a disszertáció második része, amelyet a disszertáns a címválasztással is hangsúlyoz, ahol konkrét differenciálgeometriai terekben a transzformáció-csoportokat illető értékes eredményeket ér el. Ezzel megmutatta, hogy a geometriai problémák formai oldalához jó érzéke van, ezen túlmenően azonban magát a geometriai tartalmat sem téveszti szem elől. Az egész disszertáció a jelölt tudományos érettségéről, tudományterületének kitűnő ismeretéről, valamint a tárgy iránt való lelkesedéséről tesz tanúságot. Mindezek alapján a bíráló bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy SOÓS GYULÁT nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.“

Kertész Andor
a matematikai tudományok kandidátusa

Mikolás Miklós kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1955. június 20-án volt MIKOLÁS MIKLÓS „Ortogonális rendszerek tulajdonságai és a Sturm—Liouville típusú differenciálegyenletek sajátfüggvényei“ c. kandidátusi disszertációjának nyilvános vitája.

A jelölt disszertációjában B. M. GAGAJEV egy korábbi és D. C. LEWISnak egy, vele egy időben publikált eredményét általánosítva kimutatja, hogy másodrendű közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó Sturm—Liouville típusú sajátértékfeladatok sajátfüggvényei (röviden: Sturm—Liouville sorozat) — feltéve, hogy a határfeltételeket alkalmasan választjuk — azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a sajátfüggvények differenciálása útján nyert sorozat is egy Sturm—Liouville probléma sajátfüggvényeit szolgáltatja. Hasonlóan súlyfüggvénnyel szorzott sajátfüggvények alkalmasan választott primitív függvényeinek sorozata is Sturm—Liouville típusú sajátfüggvény sorozatot alkot. Mindkét tulajdonság felhasználható a Sturm—Liouville sorozatok jellemzésére, éspedig olyan módon, hogy a függvények és a deriváltjaik (ill. a primitív függvényeik) is ortogonálisak egy-egy (a differenciálegyenlet együtthatóiként adott) súlyfüggvényre és a fent említett peremfeltételnek tesznek eleget. A MIKOLÁS által megadott peremfeltétel-típus magában foglalja azt a klasszikus esetet, amikor a függvény, ill. a deriváltja a vizsgált véges intervallum két végén eltűnik, de ennél általánosabb, végtelenbe nyúló tartományon is használható, és például a Jacobi, Laguerre és Hermite-féle polinomok (összefoglaló néven: klasszikus ortogonális polinomok) esetére is alkalmazható, melyek közül még a Jacobi-polinomok, melyeknél az ortogonalitási intervallum véges, se tesznek eleget ilyen egyszerű peremfeltételeknek. Mindezen eredmények felhasználásával kimutatja, hogy a klasszikus ortogonális polinomok lényegileg az egyedüliek az $L^2_w(a,b)$ osztály ortogonális rendszereinek összességében, melyeknél

a) mind az eredeti sorozat, mind az első, második és harmadik deriváltak rendszere ortogonális és teljes, mégpedig ugyanarra az (a,b) ortogonalitási intervallumra és rendre bizonyos $w(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ súlyokra vonatkozóan;

b) a súlyfüggvények geometriai haladványt alkotnak, továbbá $g_1(x)$ az a és b helyen, és csak itt eltűnik;

c) megfelelő „simasági" feltételek érvényesek az alapintervallum belsejében és korlátossági megszorítások a végpontokban. — A szerző hasonló jellemzést ad a trigonometrikus rendszerre is. Ezek a tételek párhuzamba állíthatók HAHN és KRALL eredményével, mely szerint az ortogonális polinomsorozatok osztályán belül a klasszikus ortogonális polinomok (lineáris transzformációtól eltekintve) azáltal jellemezhetők, hogy a derivált polinomok is ortogonális rendszert alkotnak ugyanabban az ortogonalitási intervallumban, valamely más súlyfüggvény mellett.

A disszertáció utolsó részében a Sturm—Liouville sorozat szerinti ortogonális sorfejtés, ill. a tagonkénti differenciálással ebből származtatott sor konvergenciáját vizsgálja. Tétele a következő:

Legyenek $w(x)$ és $g(x)$ egy véges $[a,b]$ intervallumban pozitív, kétszer folytonosan differenciálható súlyfüggvények. Legyenek $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ egy $[a,b]$-ben w-normált, w-teljes rendszer, melynek elemei itt folytonos harmadik deriválttal bírnak és a végpontokban eltűnnek, továbbá amelyeknek $\{\varphi_n'(x)\}$ deriválttrendszere $[a,b]$-ben ortogonális. Jelentse $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ egy $f(x) \in L_w, a \leqq x \leqq b$ függvény $\varphi_\lambda(x)$-re vonatkozó Fourier-együtthatóit. Akkor a $\sum \gamma_\lambda \varphi_\lambda(x)$ Fourier-sor (a,b)-ben konvergens és előállítja $f(x)$-et, míg a $\sum \gamma_\lambda \varphi_\lambda'(x)$ deriváltsor majdnem minden $x \in (a,b)$ helyen $(c,1)$ szummábilis $f'(x)$-hez. Az utóbbi megállapítás bizonyosan érvényes (a,b)-nek olyan pontjaiban, hol $f'(x)$ létezik és folytonos, továbbá a szummábilitás egyenletes $f'(x)$ minden zárt folytonossági intervallumában.

A disszertáció egyik opponense CSÁSZÁR ÁKOS volt. Véleményében a disszertáció fő érdemének azt tartja, hogy egy tárgykörben, melynek irodalma a tárgy sokoldalú elméleti és gyakorlati alkalmazásai miatt vaskos kötetekre rúg, aránylag egyszerű eszközökkel új és érdekes összefüggéseket derített fel. Különösen kiemeli a klasszikus ortogonális polinomok új jellemzését. Ez újabb oldalról világítja meg azt a rég ismert tényt, hogy a klasszikus ortogonális polinomok úgy tekinthetők, mint ugyanazon alapfeladatnak véges, egy oldalról végtelen, illetőleg mindkét oldalról végtelen alapintervallumra vonatkozó megoldásai. A szerző a klasszikus irányú analízis régebbi és újabb irodalmát jól ismeri és az ott használt módszereket gyakorlottan alkalmazza, de a valós függvénytan fogalmainak és módszereinek használatában nem rendelkezik kellő rutinnal. Ez abban nyilvánul meg, hogy (amint az opponens részletesen elemezte) egyes helyeken feleslegesen bonyolultan okoskodik, más alkalommal feleslegesen erős megszorításokat tesz, sőt némelykor állításai szabatosság szempontjából is kifogásolhatóak. A tételek kimondása során a regularitási feltételekkel (azaz integrálhatóság, korlátosság, folytonosság, differenciálhatóság) kapcsolatban az az álláspontja, hogy feltesz mindent, ami csak kell, hogy az alkalmazott gondolatmenetben biztosan ne legyen semmi baj, s kevés kivételtől eltekintve nem vizsgálja meg, hogy a tett feltevések valóban szükségesek-e a bebizonyított állítás érvényességéhez. Ilyen módon azután többször feltesz olyasmit is, ami minden további nélkül elhagyható vagy enyhíthető volna. Hangsúlyozza, hogy mindezek a hiányok könnyen helyrehozhatók.

A másik opponens, TANDORI KÁROLY megállapítja, hogy a kereken 50 oldal terjedelmű értekezés stílusa világos, a tételek megfogalmazása és bizonyítása általában szabatos. Felsorol néhány elírást, melyek a lényeget nem érintik. Megjegyzi, hogy a Sturm—Liouville sorfejtés derivált sorára vonatkozó tétel nemcsak $(c, 1)$ szummációra, hanem $(c, \alpha > 0)$ szummációra is érvényes. A klasszikus ortogonális polinomokra adott új jellemzésről megállapítja, hogy nagyon bonyolultan hangzik és kevéssé alkalmazható.

MIKOLÁS MIKLÓS részletesen válaszolt az opponensek által felvetett kérdésekre. Rendkívül hosszasan foglalkozott CSÁSZÁR ÁKOS bírálatával és ennek során (mint RÉNYI ALFRÉD megjegyezte) a „disszertáció megvédése" kifejezést félreértve olyan hibák tekintetében is magyarázatokat fűzött, ahol megelégedhetett volna a hiba elismerésével. TURÁN PÁL kérdésére válaszolva közli, hogy a klasszikus polinomok jellemzése során mind a három deriváltsorozatra szükség van.

A vita során a fent említetteken kívül még KALMÁR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY és e sorok írója tettek fel kérdéseket a jelölthöz. CSÁSZÁR ÁKOS válaszában ismét kiemeli, hogy az értekezésnek komoly értékei vannak, s megnyugtatja őt, hogy a kifogásolt egyetlen komolyabb és több csekély jelentőségű hézagot a szerzőnek sikerült a feltételek némi módosítása árán kiküszöbölnie.

A bíráló bizottság, FEJÉR LIPÓT akadémikus elnöklete alatt az alábbi határozatot hozta: „A jelölt egy önálló kérdést vetve fel, értékes tudományos eredményt ért el. A dolgozat legjelentősebb eredménye a klasszikus ortogonális polinomrendszerek új és egységes jellemzése. Az opponensi vélemények és a vita feltárta a dolgozat több kisebb hiányosságát. Így pl. a trigonometrikus rendszer jellemzése során a jelölt egy lényeges szükséges feltételt kihagyott a tétel szövegezéséből. A szerző általában nem vizsgálja meg, hogy tételei érvényességéhez az általa tett feltevések elengedhetetlenül szükségesek-e. A fogalmazás általában szabatos, bár helyenként körülményes. Mindezek alapján a bíráló bizottság egyhangúlag javasolja a TMB-nek, hogy MIKOLÁS MIKLÓSt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává."

Freud Géza
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1956. VII. 18. — Terjedelem: 22 (A/5) ív, 32 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 56-2962 Felelős vezető: Gabnai János

Ára: 63,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI